HSC 2023

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র প্রশ্নব্যাংক

(শর্ট সিলেবাস)





উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

উদ্ভাসিত আলোর মাঝে
দেখো তোমার মুখ;
জীবন মানে সংগ্রাম
আর বিজয় মানে সুখ।

HSC 2023
উচ্চতর গণিত ২য় পত্র
প্রশ্নব্যাংক

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, তপু, আরিফ ও সাইফুল

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
মার্চ, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com



উৎসর্গ

''এমন অর্ঘ্য রচিত হয় নাই ঘুচাইবে রুধির ঋণ,
সৃষ্টির নাশ স্রষ্টায় ঘটে তোমাতে অমলিন!''

আপনার জীবন থেকে মাত্র ১০ মিনিট + ৪৫০ মি.লি. রক্ত দিন = একটি জীবন বাঁচান!

যখন অন্যের কষ্ট আপনাকে কষ্ট দেয় তখন আপনি প্রাণী; কিন্তু যখন তার পাশে দাঁড়ান তখন আপনি 'মানুষ'! কয়েক মিনিট সময় আর একটু স্বদিচ্ছাই হতে পারে আরেকটি জীবনের বেঁচে থাকার রসদ। এই স্বদিচ্ছা আর রসদ যোগানিয়াদের মাহাত্ম্য-ই সুন্দর করে পৃথিবী, সৃষ্টি করে অসম্ভব সুন্দর কিছু গল্প। যে গল্প শুনলে ঢুলু ঢুলু চোখে ঘুমিয়ে যেতে ইচ্ছে হয় না বরং আর একটু রাঙিয়ে দিতে প্রত্যয়ী হতে হয়।

সেই সকল বীরদের যারা নিঃস্বার্থ ভাবে স্বেচ্ছায় রক্ত দিয়ে যাচ্ছে প্রতিনিয়ত......

সূচিপত্র

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC 2023 প্রশ্নব্যাংক" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solution.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC 2023 প্রশ্নব্যাংক" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ : "HSC 2023 প্রশ্নব্যাংক" Math 2nd Paper, Chapter-03, Page-08, Question-44, দেওয়া আছে, 3/5 কিন্তু হবে 4/5.

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

♦ বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ

বোর্ড	অধ্যায়	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
		CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	০১																				
	০২																				
	০৩	1	1	1	4					1			3			1	3				3
	০৪	1	1	1	5	3	3	3	6		1	1	5	1	1		2	1	1	1	2
	০৫																				
	০৬	2	2	2	5				8	1	1	1	4	1	1	1	5	1	1	1	3
	০৭	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3	1	1	1	2	1	1	1	3
	০৮	1	1	1	2	2	3	2	5	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	০৯	2	1	1	4					1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
	১০																				
রাজশাহী	০১																				
	০২																				
	০৩	2	1	1	5					1		1	2					1	1		2
	০৪	1	2	2	1	1	1	1	6	1	1	1	1					1		1	2
	০৫																				
	০৬	2	2	2	5				7	1	1	1	4					1	1	1	4
	০৭	1	1	1	6	2	2	2	6	1	1	1	1					1	1	1	3
	০৮				2	2	3	2	4	1	1	1	2					1	1	1	2
	০৯	1	1	1	4					1	1	1	1					1	1	1	2
	১০																				
চট্টগ্রাম	০১																				
	০২																				
	০৩	2	2	1	4					2			3					1	1		4
	০৪	1	1	2	6	2	2	2	8		1	1	3					1	1	1	2
	০৫																				
	০৬	2	2	2	4				7	1	1	1	4					1	1	1	3
	০৭	1	1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	2					1	1	1	2
	০৮	2	2	2	2	2	2	2	4	1	1	1	1					1	1	1	2
	০৯	1	1	1	4					1	1	1	2					1	1	1	2
	১০																				
সিলেট	০১													সকল বোর্ড							
	০২																				
	০৩	1	2	1	3					1		2	3					1	1		1
	০৪	2	1	2	4	2	2	2	5	1	1		3							1	2
	০৫																				
	০৬	2	2	2	8				7	1	1	1	3					1	1	1	4
	০৭	1	1	1	5	2	2	2	7				3					1	1	1	3
	০৮	1	1	1	2	2	2	2	3	1	1	1	1					1	1	1	4
	০৯	1	1	1	3					1	1	1	2					1	1	1	1
	১০																				
বরিশাল	০১																				
	০২																				
	০৩	1	1	2	3					1	1	1	2					2		1	3
	০৪	2	2	1	4	2	2	2	8	1	1		4					1	1		3
	০৫																				
	০৬	2	2	2	5				8				3					1	1	1	4
	০৭	1	1	1	7	2	2	2	6	1	1	1	1					1	1	1	3
	০৮	2	2	2	3	2	2	2	4	1	1	1	1					1	1	1	2
	০৯	1	1	1	3					1	1	1	4					1	1	1	2
	১০																				

বোর্ড	অধ্যায়	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
		CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
যশোর	০১																				
	০২																				
	০৩	1	1	1	4							1	2					1	1		2
	০৪	2	2	2	3	2	2	2	6	1	1	1	3						1		3
	০৫																				
	০৬	1	1	1	5				7				1					1	1	1	4
	০৭	1	1	1	4	2	2	2	6	1	1	1	2					1	1	1	2
	০৮	2	2	2	6	3	3	3	6	1	1	1	2					1	1	1	3
	০৯	1	1	1	2					1	1	1	3					1	1	1	1
	১০																				
কুমিল্লা	০১																				
	০২																				
	০৩	1	1	1	5					2	1	1	3					1	1	1	3
	০৪	2	2	2	3	2	2	2	5		1		3					1	1		3
	০৫																				
	০৬	2	2	2	4				6				3					1	1	1	3
	০৭	1	1	1	3	2	2	2	7	1	1	1	2					1	1	1	3
	০৮	1	1	1	4	3	3	3	5	1	1	1	1					1	1	1	1
	০৯	1	1	1	5					1	1	1	1					1	1	1	2
	১০																				
দিনাজপুর	০১													সকল বোর্ড							
	০২																				
	০৩	1	1	1	4					1		1	2								2
	০৪	2	2	2	4	2	2	2	6	1	1	1	3					1	1	1	2
	০৫																				
	০৬	2	2	2	5				7				4								3
	০৭	1	1	1	4	2	2	2	8	1	1	1	3					1	1	1	3
	০৮	1	1	1	3	2	2	2	5	1	1	1	2					1	1	1	3
	০৯	1	1	1	4					1	1	1	2					1	1	1	3
	১০																				
ময়মনসিংহ	০১																				
	০২																				
	০৩	2	1	1	4																
	০৪	1	2	2	4	2	2	2	6												
	০৫																				
	০৬	2	2	2	4				9												
	০৭	1	1	1	4	2	2	2	5												
	০৮	2	1	1	4	3	3	3	3												
	০৯	1	1	1	3																
	১০																				

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

অধ্যায় ০৩ জটিল সংখ্যা

♦ এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	1	1	1	4					1			3			1	3				3
রাজশাহী	2	1	1	5					1		1	2	সকল বোর্ড				1	1		2
চট্টগ্রাম	2	2	1	4					2			3					1	1		4
সিলেট	1	2	1	3					1		2	3					1	1		1
বরিশাল	1	1	2	3					1	1	1	2					2		1	3
যশোর	1	1	1	4							1	2					1	1		2
কুমিল্লা	1	1	1	5					2	1	1	3					1	1	1	3
দিনাজপুর	1	1	1	4					1		1	2								2
ময়মনসিংহ	2	1	1	4																

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই, ২০২১ সালে শর্ট সিলেবাসে অধ্যায়-০৩ ছিল না। ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ i এর পরিচয় এবং জটিল সংখ্যা:

যখন, $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \therefore x = \pm 1$

এরূপ সমীকরণ সমাধান করতে কোন সমস্যা হয় না।

কিন্তু, যখন $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ ……… (i)

কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হয় না।

$\therefore$ ঋণাত্মক সংখ্যাকে বর্গমূল করলে কোন বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় না

তাই, ধরা হয়, $\boxed{\sqrt{-1} = i}$, $\boxed{i^2 = -1}$ ……… (ii)

যেখানে i একটি কাল্পনিক সংখ্যা (Imaginary number) তাহলে (i) নং সমীকরণে $\sqrt{-1}$ এর মান বসালে, $\boxed{x = \pm i}$

এখন (ii) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, $i^2 = -1$ কিন্তু এখান থেকে, $i = \pm\sqrt{-1}$ লেখা যাবে না কারণ $i = \sqrt{-1}$ (সংজ্ঞায়িত) তাই এক্ষেত্রে $\pm$ নেওয়া যাবে না, শুধুমাত্র + চিহ্ন নিতে হবে।

x এবং y বাস্তব সংখ্যা হলে, $x + iy$ আকারের সকল সংখ্যাকে বলা হয় জটিল সংখ্যা। দ্বিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় (x, y) এর অবস্থান যেখানে $x + iy$ এর অবস্থানও সেখানে। [এখানে, x বাস্তব অক্ষ, y কাল্পনিক অক্ষ]

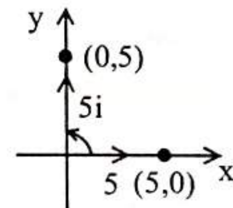
তাহলে,

$x + iy$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল (x, y)

$3 + 4i$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল $(3, 4)$

$5 = 5 + 0.i$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল $(5, 0)$

$5i = 0 + 5.i$ আকারের জটিল সংখ্যার ক্রমযুগল $(0, 5)$



তাহলে দেখা যাচ্ছে, 5 এর অবস্থান x অক্ষের উপর এবং 5i এর অবস্থান y অক্ষের উপর।

অর্থাৎ চিত্র হতে দেখা যায় যে, 5 কে i দ্বারা গুণ করার ফলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।

সুতরাং সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় যে, i এমনই একটি অপারেটর যা দ্বারা যেকোন সংখ্যাকে গুণ করলে সংখ্যাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।

কোন সংখ্যাকে i^2 দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $2.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।

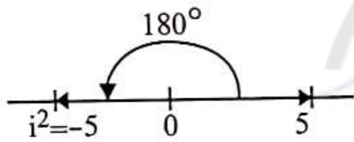
কোন সংখ্যাকে i^3 দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $3.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।

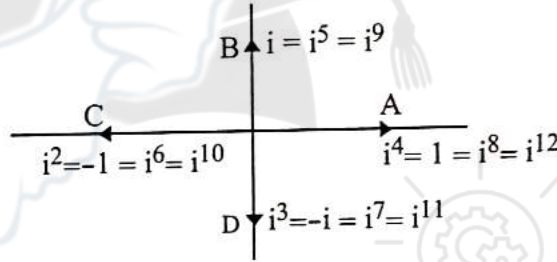
কোন সংখ্যাকে i^4 দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $4.\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।

কোন সংখ্যাকে i^n দ্বারা গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $\frac{n\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।

তাহলে লক্ষণীয় যে, i^2 দ্বারা কোন সংখ্যাকে গুণ করলে সেটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $2.\frac{\pi}{2}$ বা $180°$ কোণে ঘুরে যায়। আর আমরা জানি যে, যে কোনো জিনিসকে তার স্বাভাবিক অবস্থান থেকে $180°$ কোণে ঘুরালে সেটি বিপরীত হয়ে যায়। সংখ্যা পদ্ধতির ক্ষেত্রে ধনাত্মক সংখ্যাকে $180°$ কোণে ঘুরালে সেটি ঋণাত্মক হয়ে যায়।

$\therefore 5i^2 = -5 \therefore i^2 = -1$





এবার উপরের চিত্র লক্ষ করো-

1 কে i দ্বারা গুণ করলে i, A অবস্থান থেকে B অবস্থানে যায়

i কে i দ্বারা গুণ করলে i^2, B অবস্থান থেকে C অবস্থানে যায়

i^2 কে i দ্বারা গুণ করলে i^3, C অবস্থান থেকে D অবস্থানে যায়

i^3 কে i দ্বারা গুণ করলে i^4, D অবস্থান থেকে পুনরায় A অবস্থানে যায়।

$\therefore i^2 = -1, i^3 = -i, \; i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$

$\therefore$ n পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^{4n} = 1$

$\therefore i^{4n+1} = i^{4n}.i = i, \; i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = -1 \; \therefore i^{4n+p} = i^p$

আবার, $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 1 + i - 1 - i = 0$

Note: $4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা।

◈ জটিল সংখ্যার ধর্ম:

(i) $x + iy = 0$ হলে, $x = 0, y = 0$

(ii) দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ সমান হবে যদি ও কেবল যদি $x_1 = x_2$ ও $y_1 = y_2$ হয়।

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $x + iy$ ও $x - iy$ এর সমষ্টি এবং গুণফল বাস্তব সংখ্যা।

(iv) অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ $(y_1 \neq -y_2)$ এর সমষ্টি, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

(v) $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে z^n জটিল সংখ্যা হবে।

◈ কোনো জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এর জন্য,

(i) $|z + a| = |z + b|$ সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $|z + a| = k$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iii) $|az + k_1| = |bz + k_2|$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iv) $\left|\frac{z+a}{z+b}\right| = k$; $k = 1$ হলে সরলরেখা নির্দেশ করে। $k \neq 1$ হলে বৃত্ত নির্দেশ করে এবং $|z + a| = k|z + b|$ (বৃত্ত)

(v) $z\bar{z} = 0$ বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vi) $|z - a| + |z - b| = k$; $|a - b| < k$ হলে উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

(vii) $||z - a| - |z - b|| = k$; $|a - b| > k$ হলে অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। [যেখানে a, b, k বাস্তব ধ্রুব সংখ্যা]

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

➲ মডুলাস নির্ণয়ের সূত্র:

(i) $x + iy$ আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(ii) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)$ ....আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস,

$$r = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2)}$$

(iii) $\frac{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)......}{(x_4+iy_4)(x_5+iy_5)(x_6+iy_6)......}$ আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস, $r = \sqrt{\frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)(X_3^2+y_3^2)........}{(x_4^2+y_4^2)(X_5^2+Y_5^2)(X_6^2+Y_6^2)........}}$

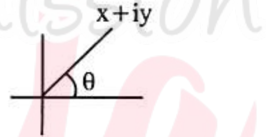
➲ আর্গুমেন্ট নির্ণয়ের সূত্র:

(iv) $x + iy$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

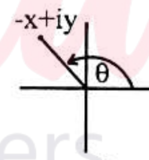
(v) মুখ্য আর্গুমেন্টের জন্য $-\pi < \theta \leq \pi$

➤ কিন্তু —

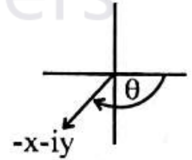
(vi) কোনো জটিল সংখ্যা প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



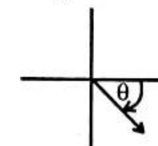
(vii) কোনো জটিল সংখ্যা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



(viii) কোনো জটিল সংখ্যা তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



(ix) কোনো জটিল সংখ্যা চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করলে মুখ্য আর্গুমেন্ট, $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



(x) $(x + iy)^n$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট $= n \times \arg(x + iy)$

(xi) $\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} - \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2} = \tan^{-1}\frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1+\frac{y_1y_2}{x_1x_2}} = \tan^{-1}\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1x_2 + y_1y_2}\right)$

(xii) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_1x_2 - y_1y_2}\right) = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} + \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2}$

➲ দুটি জটিল সংখ্যা $(z_1 z_2)$ এর ক্ষেত্রে:

(xiii) $\text{mod}(z_1.z_2) = \text{mod}(z_1) \times \text{mod}(z_2)$
(xiv) $\text{mod}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\text{mod}(z_1)}{\text{mod}(z_2)}$
(xv) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ [শর্ত প্রযোজ্য]
(xvi) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ [শর্ত প্রযোজ্য]

➲ জেনে রাখা ভালো:

(xvii) De Moivre's Theorem:
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
ব্যাখ্যা: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ [Euler's Theorem]
$\Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{i(n\theta)}$
$\therefore \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$
(xviii) জটিল সংখ্যার n তম মূল
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}[\cos\theta + i\sin\theta]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right]$; [De moivre's]
n সংখ্যক মূলের জন্য
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)$; $k = 0,1,2,3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)$
$\therefore a + ib$ কে পোলার রূপে প্রকাশ করলে যদি তা $re^{i\theta}$ হয় তবে,
$\sqrt[n]{a+ib} = r^{\frac{1}{n}}.e^{i\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)}$ যেখানে, $k = 0,1,2,\ldots(n-1); n \in \mathbb{N}$.
$\sqrt{x \pm iy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{r+x} \pm i\sqrt{r-x}\}$ যেখানে $r = \sqrt{x^2+y^2}$

➲ i ও ω সংক্রান্ত সূত্র: [যেখানে $n \in Z$]

(xix) $\omega^{3n} = 1$	(xxiv) $i^{4n+1} = i^{4n}.i = i$
(xx) $\omega^{3n+1} = \omega$	(xxv) $i^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = -1$
(xxi) $\omega^{3n+2} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$	(xxvi) $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = i^3 = i^2 i = -i$
(xxii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$	(xxvii) $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$
(xxiii) $i^{4n} = 1$	

সহজে মনে রাখার কৌশল

(i) $\sqrt[3]{(-n)^3} = -n, -n\omega, -n\omega^2$
$[\text{i.e.} \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-3^3} = -3, -3\omega, -3\omega^2]$
(ii) $\sqrt[4]{-x^4} = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$
(iii) $\left[\text{i.e.} \sqrt[4]{-169} = \sqrt[4]{-(\sqrt{13})^4} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}(1 \pm i)\right]$

$\therefore a, b, c, d$ চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে, $i^a + i^b + i^c + i^d = 0$ [সূত্র **xxviii** দ্রষ্টব্য]

আবার, $i^{01717722655} = i^{4\times429430663+3} = i^3 = -i$
i-এর Power এর শেষ দুটি ডিজিটকে 4 দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট যা হবে সেটাই i এর Power হবে এবং সেটিই হবে সঠিক Answer, যেমন, 55 কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ = 3
$\therefore i^{01717722655} = i^3 = -i$ (**Ans.**)

আবার i এর ধারার ক্ষেত্রে

$i + i^2 = i - 1$

$\underline{i} + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = i^5 = i^1$

$\underline{i + i^2} + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 = i^5 + i^6 = \underline{i + i^2}$

$\underline{i + i^2 + i^3} + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = i^5 + i^6 + i^7 = \underline{i + i^2 + i^3}$

ধারাটির সর্বোচ্চ Power কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ সংখ্যাটি যত পাওয়া যাচ্ছে প্রথম হতে (i এর Power 1 হতে) i এর Power যেখানে ভাগশেষের সমান ততদুর পর্যন্ত রাখলেই ধারাটির Answer পাওয়া যাচ্ছে। তবে খেয়াল রাখতে হবে যে i এর power যেন ক্রমিক সংখ্যা হয়।

এবার একটা সমস্যা সমাধান করি–

$1 + i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{202} = ?$

এখানে, সর্বোচ্চ Power 202 কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ = 2

$\therefore$ Answer হবে $= 1 + i + i^2 = 1 + i - 1 = i$ **(Ans.)**

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **MCQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $z_1 = 1 + 2i$ এবং $z_2 = 3 + i$, হলে $\overline{z_1} - z_2$ এর মডুলাস হল— **[DB'22]**

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{13}$ (c) $\sqrt{25}$ (d) $5\sqrt{2}$

সমাধান: (b); $|\bar{Z}_1 - Z_2| = |1 - 2i - 3 - i|$

$= |-2 - 3i| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

02. $z = 1 - i$ হলে $z - \bar{z}$ এর বর্গমূল কত? **[DB, SB, BB'22; SB, CB'19; DB'17]**

(a) $-1 - i$ (b) $\pm(1 + i)$

(c) $\pm(1 - i)$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

সমাধান: (c); $Z - \bar{Z} = 1 - i - (1 + i) = -2i$

$\therefore \sqrt{Z - \bar{Z}} = \pm\sqrt{-2i} = \pm\sqrt{1 - 2i - 1}$

$= \pm\sqrt{1 - 2.1.i + i^2} = \pm\sqrt{(1 - i)^2} = \pm(1 - i)$

03. $1 - \sqrt{3}i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? **[DB BB, JB, CB, MB'22; DB, Ctg.B, JB, Din.B'19; All.B'18; DB, RB, Ctg.B, CB'17]**

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{-\pi}{3}$ (d) $\frac{-2\pi}{3}$

সমাধান: (c); $\arg(1 - \sqrt{3}i) = -\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$

04. $\sqrt[4]{-49}$ এর মান কোনটি? **[DB'22]**

(a) $\pm\sqrt{7}i$ (b) $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1 \pm i)$

(c) $\pm\frac{7}{2}(1 \pm i)$ (d) $\frac{7}{\sqrt{2}}(1 \pm 2i)$

সমাধান: (b); $\sqrt[4]{-49} = \pm\sqrt{\sqrt{49i^2}} = \pm\sqrt{(\pm 7i)}$

$= \pm\sqrt{7}.\sqrt{\pm i} = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\sqrt{\pm 2i} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{(1 \pm 2i + i^2)}$

$= \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{(1 \pm i)^2} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1 \pm i)$

05. $i^2 = -1$ হলে $\frac{-i-i^{-5}}{2i^{-5}+i}$ এর মান– **[Ctg.B'22]**

(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

সমাধান: (b); **Use Calculator**

06. $\sqrt[3]{1}$ এর মূলত্রয়ের– **[Ctg.B'22] [Ans: d]**

(i) যোগফল শূন্য (ii) দুইটি জটিল

(iii) একটি মূল অপর একটি মূলের বর্গের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. $-i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট– **[Ctg.B, Din.B'22; SB'19; BB'17]**

(a) 1 ও 0 (b) 1 ও $-\frac{\pi}{2}$ (c) 1 ও π (d) 1 ও $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (b); $|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1, \arg(-i)$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

08. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\frac{2}{\omega^{13}+\omega^{26}}$ এর মান– **[Ctg.B'22]**

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 2

সমাধান: (a); $\frac{2}{\omega^{13}+\omega^{26}} = \frac{2}{\omega^{4\times3+}+\omega^{8\times3+2}} = \frac{2}{\omega+\omega^2}$

$= \frac{2}{-1} = -2$

09. $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$ হলে $\frac{y}{x} = ?$ **[RB'22]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) -2

সমাধান: (b); $i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019} = \frac{1}{i^{2021}} + \frac{2}{\omega^{2019}}$

$= \frac{1}{i} + \frac{2}{\omega^3} = -i + 2 = 2 - i \therefore x + iy = 2 - i$

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

10. $-1-i\sqrt{3}$ এর অনুবন্ধী রাশির আর্গুমেন্ট কত? [RB'22]
(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$
সমাধান: (d); $\bar{Z}=-1+i\sqrt{3}$
$\therefore \arg(\bar{Z})=\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{2\pi}{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও
$z=3i$

11. $\bar{z}$ দ্বারা গঠিত বিন্দু কোনটি? [RB'22; RB'19]
(a) $(0,-3)$ (b) $(0,3)$ (c) $(-3,0)$ (d) $(3,0)$
সমাধান: (a); $\bar{Z}=-3i$

12. $\bar{z}$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত? [RB'22]
(a) $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (c) $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (d) $n\pi-\frac{\pi}{2}$
সমাধান: (b); $\arg(\bar{Z})=2n\pi+\left(-\tan^{-1}\frac{3}{0}\right)$
$=2n\pi-\frac{\pi}{2}$

13. $\sqrt{-3}\times\sqrt{-1}$ এর মান কোনটি? [RB'22]
(a) $\sqrt{3}i$ (b) $\pm\sqrt{3}$ (c) $-\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{3}$
সমাধান: (c); $\sqrt{-3}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{3}i\times i=i^2\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

14. $n\in\mathbb{N}$ হলে i^{8n+5} এর মান কত? [SB'22]
(a) 1 (b) -1 (c) i (d) $-i$
সমাধান: (c); $i^{8n+5}=i^{4\times 2n}.i^5=1.i=i$

15. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে– [SB'22] [Ans: d]
(i) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$ (ii) $\bar{\bar{z}}=z$
(iii) $\overline{z_1z_2}=\bar{z_1}.\bar{z_2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii

16. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে $1-x-y+xy$ এর মান কত? [BB'22]
(a) -2 (b) 2 (c) 3 (d) -3
সমাধান: (c); $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\omega$
$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\omega^2$
$1-x-y+xy=1-\omega-\omega^2+\omega^3$
$=1-(\omega+\omega^2)+\omega^3=1-(-1)+1=3$

17. $z=x+iy$ হলে, $|z|=5$ সমীকরণটি প্রকাশ করে- [JB, CB'22; Ctg.B'17]
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (b); $|Z|=5\Rightarrow|x+iy|=5$
$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=5\Rightarrow x^2+y^2=25$

18. $i^2=-1$ হলে i^{-39} এর মান- [JB, CB, MB'22; Ctg.B, JB'17]
(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i
সমাধান: (d); **Use Calculator**

19. $z=i-1$ হলে- [JB'22]
i. $\bar{Z}=-i-1$ ii. $|z|=\sqrt{2}$
iii. z এর পোলার আকার $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); $|Z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}, \arg(Z)$
$=\pi-\tan^{-1}\frac{1}{1}=\frac{3\pi}{4}\therefore 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

20. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে অপর মূলটি কত? [CB'22]
(a) $\frac{1}{1-i}$ (b) $\frac{1-i}{2}$ (c) $\frac{1+i}{2}$ (d) $1-i$
সমাধান: (c); একটি মূল $=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1+1}$
$=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, অপর মূল$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1+i}{2}$

21. $-1+i$ এর পোলার আকার– [CB'22]
(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
(c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
সমাধান: (d); $|Z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}, \arg(Z)$
$=\pi-\tan^{-1}\frac{1}{1}=\frac{3\pi}{4}$
$\therefore 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

22. $i^7+i^9+i^{11}+i^{13}$ এর মান কত? [Din.B'22]
(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) 0
সমাধান: (d); **Use Calculator**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x=\sqrt[3]{1}$ একটি সমীকরণ।

23. সমীকরণের মূলগুলোর যোগফল- [Din.B'22]
(a) ω (b) ω^2 (c) 0 (d) 1
সমাধান: (c); $\sqrt[3]{1}=x\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1,\omega,\omega^2$
$\therefore 1+\omega+\omega^2=0$

24. সমীকরণের মূলগুলোর গুণফল- [Din.B'22]
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $1+i$
সমাধান: (c); $1.\omega.\omega^2=\omega^3=1$

25. $z=x+iy$ হলে- [MB'22] [Ans: a]
(i) $|z|=|\bar{z}|$ (ii) $z.\bar{z}=|z|^2$
(iii) $\arg(\bar{z})=\arg(z)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

26. $x = 1 + \sqrt{2}i$ হলে $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ এর মান কত? [MB'22]

(a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) −2

সমাধান: (d); $x = 1 + \sqrt{2}i \Rightarrow x - 1 = \sqrt{2}i$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$
$2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$
$= 2x^3 - 4x^2 + 6x + x^2 - 2x + 3 - 2$
$= 2x(x^2 - 2x + 3) + 1(x^2 - 2x + 3) - 2$
$= 0 + 0 - 2 = -2$

27. এককের জটিল ঘনমূল x ও y হলে- [DB'19]
(i) $x^2 = y$ (ii) $x^2 + y^2 = i^2$ (iii) $x^2y^2 = i^4$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $(\omega^2)^2 + (\omega)^2 = \omega^4 + \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1 = i^2$, $\omega^2\omega^4 = \omega^6 = 1 = i^4$

28. $z = 2x + i.3y$; x ও y বাস্তব সংখ্যা হলে $|z| = 1$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? [DB'19]
(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: (b); $|z| = 1 \Rightarrow |2x + i3y| = 1$
$\Rightarrow \sqrt{(2x)^2 + (3y)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/9} = 1$

29. $z = x + iy$ হলে- [RB'19]
(i) $z - \bar{z}$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা
(ii) $z.\bar{z}$ একটি বাস্তব সংখ্যা
(iii) z^n একটি বাস্তব সংখ্যা, যেখানে $n \in \mathbb{N}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); ধরি, $n = 1$; $z^n = (x + iy)^1 = x + iy$
$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2yi$
এবং $z.\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

30. ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে $(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})(1 - \omega^{14})$ এর মান হল- [Ctg.B'19]
(a) −1 (b) 1 (c) 3 (d) 9
সমাধান: (d); $(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})(1 - \omega^{14})$
$= (1 - \omega^3.\omega)(1 - \omega^3.\omega^3.\omega^2)(1 - \omega^3.\omega^3.\omega^3.\omega)(1 - \omega^3.\omega^3.\omega^3.\omega^3.\omega^2)$
$= (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)$ [$\because \omega^3 = 1$]
$(1 - \omega)^2(1 - \omega^2)^2$
$= (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2 = 3^2 = 9$

31. $z = x - 2iy$ হলে, $z\bar{z} = 7$ এর সঞ্চারপথ একটি- [Ctg.B, CB'19]
(a) পরাবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) বৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: (b); $z\bar{z} = |z|^2 = 7 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 7$
$\Rightarrow \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$

32. 2i এর বর্গমূল কত? [SB'19]
(a) $2 + i$ (b) $-(1 + i)$
(c) $\pm(1 + i)$ (d) $\pm(1 - i)$
সমাধান: (c); $2i = 1 + 2i + i^2 = (1 + i)^2$
$\therefore \sqrt{2i} = \pm(1 + i)$

33. 1 এর ঘনমূল তিনটির- [BB'19; DB, CB'17] [Ans: d]
(i) যোগফল = 0 (ii) গুণফল = 1
(iii) জটিল মূল দুটির একটি অপরটির বর্গ
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

34. যদি $\frac{2+3i}{2-i} = A + iB$ এবং A ও B বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে B = কত? [BB'19]
(a) $\frac{-8}{5}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $-\frac{1}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$
সমাধান: (d); Use Calculator.
অথবা, $\frac{(2+3i)}{(2-i)} = \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+8i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i \therefore B = \frac{8}{5}$

35. $(2i)^{-1/2} + (-2i)^{-1/2}$ এর মান কত? [JB'19]
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 0 (d) ∞
সমাধান: (b); $2i = 1 + i^2 + 2.1.i = (1 + i)^2$
$\Rightarrow (2i)^{\frac{1}{2}} = 1 + i$; $-2i = 1 + i^2 - 2.1.i$
$= (1 - i)^2 \Rightarrow (-2i)^{\frac{1}{2}} = 1 - i$
$\therefore (2i)^{-\frac{1}{2}} + (-2i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{1+i+1-i}{1-i^2} = \frac{2}{2} = 1$

36. 1 এর ঘনমূল তিনটির যোগফল- [CB'19] [Ans: b]
(i) 0 (ii) ω^3 (iii) $1 + \omega + \omega^2$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

37. $p = x + iy$ হলে, $|p + 2| = 3$ নির্দেশ করে- [Din.B'19]
(a) বৃত্ত (b) সরলরেখা (c) প্যারাবোলা (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (a); $|x + iy + 2| = 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0 \therefore$ বৃত্ত।

38. কাল্পনিক সংখ্যা i এবং $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $i^{4n} - i + i^{4n+1} - 1$ এর মান কত? [All.B'18]
(a) −i (b) i (c) 0 (d) 1
সমাধান: (c); $(i^4)^n - i + (i^4)^n.i - 1$
$= 1 - i + i - 1 = 0$

39. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ এবং এর অনুবন্ধী $\bar{\alpha}$ হলে কোনটি সত্য? [All.B'18]

(a) $\alpha\bar{\alpha} = \alpha^2$ (b) $\alpha + \bar{\alpha} = 2\alpha$
(c) $\alpha + \bar{\alpha} = -1$ (d) $\bar{\alpha} + \alpha^2 = -1$

সমাধান: (c); $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega \therefore \bar{\alpha} = \omega^2$
$\therefore 1 + \omega + \omega^2 = 0 \therefore \omega + \omega^2 = -1$

40. $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} =$ কত? $[m \in \mathbb{Z}]$ [RB'17]

(a) -1 (b) $-i$ (c) 0 (d) i

সমাধান: (c); $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3}$
$= i^m(1 + i + i^2 + i^3) = i^m(1 + i - 1 - i) = 0$

41. নিচের কোনটি মূলদ সংখ্যা? [Ctg.B'17] [Ans: d]

(a) π (b) e (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}}$

42. $2x - i3y$ জটিল সংখ্যাটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত? [SB'17] [Ans: d]

(a) ১ম চতুর্ভাগে (b) ২য় চতুর্ভাগের
(c) ৩য় চতুর্ভাগে (d) ৪র্থ চতুর্ভাগের

43. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে $\omega^{6n+3} = ?$ [BB'17]

(a) -1 (b) 1 (c) ω (d) ω^2

সমাধান: (b); $\omega^{6n+3} = \omega^{6n}.\omega^3 = 1.$

44. $\frac{2-i}{2+i} = A + iB$ হলে, A = ? [BB'17]

(a) 1 (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $-\frac{4}{5}$

সমাধান: (c); $\frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)(2-i)}{4-i^2} = \frac{4-2.2.i+i^2}{5} = \frac{3-4i}{5}$
$= \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \therefore A = \frac{3}{5}$

45. ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $\omega^{92} + \omega^{16}$ এর মান কত? [JB'17]

(a) -1 (b) $-\omega$ (c) $-\omega^2$ (d) 2ω

সমাধান: (a); $\omega^{92} + \omega^{16} = \omega^{90} \times \omega^2 + \omega^{15} \times \omega$
$= \omega^2 + \omega = -1$

46. কাল্পনিক একক i এবং এককের জটিল ঘনমূল ω হলে- [CB'17] [Ans: c]

(i) $\omega^3 = -1$ (ii) $i^2 = -1$
(iii) $\omega + \omega^2 = -1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

47. $z = -1 + i\sqrt{3}$ হলে– [Din.B'17]

(i) $z^9 = 64$ (ii) z এর আর্গুমেন্ট 120°
(iii) z- এর বর্গমূল $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3})$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $z^9 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^9}{2^9}.2^9 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^9.2^9$
$= (\omega^2)^9 2^9 = 2^9 = 512; \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$
$= \frac{2\pi^c}{3} = 120°$

48. $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$ এর মান কোনটি? [Din.B'17]

(a) $-2\omega^2$ (b) -2ω (c) 0 (d) 3

সমাধান: (c); $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega}$
$= \frac{\omega+\omega^3+\omega^2}{\omega^3} = 0$

◆ **MCQ:** বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. i^{29} এর মান কত?

(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i

সমাধান: (d); $i^{29} = i^{28}.i = (i^4)^7.i = i^7.i = i$

02. a ও b দুইটি সংখ্যায়- [Ans: a]

(i) $a^2 > 0$ হলে a বাস্তব
(ii) $b^2 < 0$ হলে b কাল্পনিক
(iii) a বাস্তব হলে a কে সংখ্যারেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় কিন্তু আর্গন্ডের চিত্রে চিত্রিত করা যায় না

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

03. $i^{-2017} = ?$

(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i

সমাধান: (c); $i^{\overset{-201}{(4\text{ দিয়ে ভাগ})}} = i^{\overset{-1}{(\text{ভাগশেষ})}} = -i$

04. $1 + \sqrt{2}i$ জটিল সংখ্যার অবস্থান বাস্তব অক্ষ হতে কত একক দূরে? [Ans: b]

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) i (d) $1 + \sqrt{2}$

05. মূল বিন্দু হতে $1 - \sqrt{2}i$ জটিল সংখ্যাটি কত একক দূরত্বে অবস্থিত? [Ans: d]

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) 3 (d) $\sqrt{3}$

06. জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্টের মুখ্য মান θ এর সীমা নিচের কোনটি? [Ans: c]

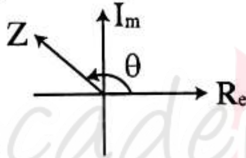
(a) $-\pi < \theta < \pi$ (b) $-\pi \le \theta < \pi$
(c) $-\pi < \theta \le \pi$ (d) $-\pi \le \theta \le \pi$

07. আর্গন্ড চিত্রে $|z| = 1$ এর জ্যামিতিক প্রতিরূপ একটি-
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত
(c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (b); $z = x + iy; |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ যা একটি বৃত্ত।

08. $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ জটিল সংখ্যার মডুলাস কোনটি?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) −1
সমাধান: (c); $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$

09. $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ জটিল সংখ্যার কার্তেসীয় আকার কোনটি?
(a) $-1-\sqrt{3}i$ (b) $-1+\sqrt{3}i$
(c) $-\sqrt{3}-i$ (d) $-\sqrt{3}+i$
সমাধান: (d); $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i$

10. $-2\sqrt{3}+6i$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি?
(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$
সমাধান: (c); $Z = -2\sqrt{3}+6i\,; \theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{2\sqrt{3}}\right)$
$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$



11. $(1+\sqrt{3}i)^4$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি?
(a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$
সমাধান: (a); $z = 1+\sqrt{3}i\,; \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3})$
$= \frac{\pi}{3}\,; r = \sqrt{3+1} = 2\,; z = r\,e^{i\theta} = 2.e^{i.\frac{\pi}{3}}$
$z^4 = 2^4.e^{i.4\frac{\pi}{3}}\,; \text{Arg}(z^4) = 4.\text{Arg}(z) = 4.\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

12. $z = x+iy$ জটিল রাশির আর্গুমেন্ট $\frac{4\pi}{3}$ হলে, এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নিম্নের কোনটি?
(a) $x-\sqrt{3}y=0$ (b) $x+\sqrt{3}y=0$
(c) $\sqrt{3}x+y=0$ (d) $\sqrt{3}x-y=0$
সমাধান: (d); $z = x+iy\,; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{4\pi}{3}$
$\Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \therefore \sqrt{3}x - y = 0$

13. $-3i-2$ এর অনুবন্ধী সংখ্যা কোনটি?
(a) $2i-3$ (b) $2+3i$
(c) $-2-3i$ (d) $-2+3i$
সমাধান: (d); $z = -3i-2\,; \bar{z} = -2+3i$

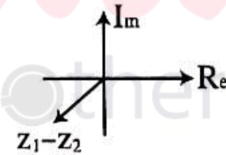
14. $a - ib = -i - 1$ হলে b এর মান কত?
(a) −1 (b) 1 (c) −i (d) i
সমাধান: (b); $a - ib = -i - 1\,; I_m(a-ib)$
$= I_m(-i-1) \Rightarrow -b = -1 \therefore b = 1$

15. $\frac{1+\sqrt{3}i}{i^2} = A + iB$ হলে, $A - iB$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি?
(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$
সমাধান: (b); $A+iB = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{i^2} = -1-\sqrt{3}\,i\; [\because i^2 = -1]$
$A - iB = -1+\sqrt{3}\,i\,;\; \text{Arg}\,(A-iB)$
$= \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

16. $-x+5i$ ও $iy+7$ এর অনুবন্ধী পরস্পর সমান হলে $(x,y) =$?
(a) $(-7,5)$ (b) $(-7,-5)$
(c) $(7,5)$ (d) $(7,-5)$
সমাধান: (a); $\overline{-x+5i} = \overline{iy+7} \Rightarrow -x-5i$
$= 7 - iy \therefore x = -7; y = 5$

17. $x = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ হলে, x^{12} এর মান কোনটি?
(a) −1 (b) 1 (c) −i (d) i
সমাধান: (a); $x = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{2i}{2} = i$
$\therefore x^{12} = (x^2)^6 = i^6 = -1$

18. $z_1 = -3+2i, z_2 = -1+3i$ হলে, $z_1 - z_2$ এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?
(a) প্রথম (b) দ্বিতীয় (c) তৃতীয় (d) চতুর্থ
সমাধান: (c); $z_1 = -3+2i, z_2 = -1+3i$
$z_1 - z_2 = -2 - i$



19. $z_1 = -3+2i, z_2 = -4, z_3 = -i$ হলে-
(i) $\overline{z_1} = -3-2i$ (ii) $\arg z_3 = -\frac{\pi}{2}$
(iii) z_1 ও z_2 এর দূরত্ব $= \sqrt{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); $z_1 = -3+2i \Rightarrow \overline{z_2} = -3-2i$
$\text{Org}\; z_3 = -\tan^{-1}\frac{1}{0} = -\frac{\pi}{2}$
Z_1, Z_2 এর দূরত্ব $= \sqrt{(-3+4)^2 + (2-0)^2}$
$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ একক

20. $z = -i - 2$ হলে-
(i) $z^2 = 4i + 3$ (ii) $z\bar{z} = -5$
(iii) $|\bar{z}| = \sqrt{5}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $z^2 = (-i-2)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$
$z\bar{z} = (-2-i), (-2+i) = (-2)^2 - i^2 = 4 + 1 = 5$
$|\bar{z}| = |-2+i| = \sqrt{5}$

21. $x = 3 + 2i$ হলে, $x^2 + x\bar{x} + (\bar{x})^2$ এর মান কোনটি?
(a) 21 (b) 23 (c) 27 (d) 29
সমাধান: (b); $x = 3 + 2i$; $x^2 + x\bar{x} + (\bar{x})^2$
$= (3+2i)^2 + (3+2i)(3-2i) + (3-2i)^2$
$= \{(3+2i)^2 + (3-2i)^2\} + \{3^2 - (2i)^2\}$
$= 2(3^2 - 4) + 9 + 4 = 10 + 13 = 23$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\sqrt{2}x - i + 1 = 0$ একটি জটিল সংখ্যা।

22. x এর আর্গুমেন্ট কোনটি?
(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$
সমাধান: (d); $\sqrt{2}x - i + 1 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
$\theta = \pi - \tan^{-1}(1)$(কেননা, 2 চতুর্ভাগ)$= \frac{3\pi}{4}$

23. $x^4\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$ এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i
সমাধান: (c); $x^2 = -i$; $x^4\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$
$= x^4 + x^2 + 1 = i^2 - i + 1 = -i$

24. $|(3+4i)(-i+1)|$ এর মান কত?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) $7\sqrt{2}$ (d) 50
সমাধান: (b); $|(3+4i)(-i+1)|$
$= |3+4i|\,|-i+1| = 5\sqrt{2}$

25. $(1+\omega)^3$ এর মান কত?
(a) 1 (b) -1 (c) $-\omega^2$ (d) ω^2
সমাধান: (b); $(1+\omega)^3$ $[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$
$= (-\omega^2)^3 = -1$ $[\because \omega^3 = 1]$

26. এককের ঘনমূলগুলি $1, \omega, \omega^2$ হলে-
(i) ω^{17} এর মান ω^2 এর সমান
(ii) জটিল মূল দুইটির গুণফল শূন্য
(iii) ঘনমূল তিনটির যোগফল এক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, iii
সমাধান: (a); $\omega^{17} = \omega^{15}.\omega^2 = \omega^2$
এবং $1 + \omega + \omega^2 = 0$

27. $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এর বর্গ নিচের কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ (b) $\frac{1}{2}(4 + \sqrt{-3})$
(c) $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ (d) $\frac{1}{2}b(1 - \sqrt{-3})$
সমাধান: (c); $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$
$\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$

28. $\omega^{32} + \omega^{64} - \sqrt{3}i^{13}$ এর আর্গুমেন্ট কত?
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$ (d) $-\frac{5\pi}{6}$
সমাধান: (c); $z = \omega^{32} + \omega^{64} - \sqrt{3}\,i^{13} = \omega^{30}.\omega^2 + \omega^{63}.\omega - \sqrt{3}.i^{12}.i = \omega^2 + \omega - \sqrt{3}.i = -1 - \sqrt{3}\,i$
মুখ্যমান, Arg(z)
$= -\pi + \tan^{-1}(\sqrt{3})$ (কেননা, ৩য় চতুর্ভাগ) $= -\frac{2\pi}{3}$

29. $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হলে, $x^{101} + x^{300}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) -1 (b) 2 (c) $-x$ (d) $2x^2$
সমাধান: (c); $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \omega$; $x^{101} + x^{300}$
$= \omega^{300} + \omega^{101} = 1 + \omega^2 = -\omega = -x$

30. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল P হলে-
(i) $P + P^2 = 1$ (ii) $\bar{P} = P^2$
(iii) $(1 + P - P^2)^2 + (1 - P + P^2)^2 = -4$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); (i) $1 + p + p^2 = 0$ (ii) $\bar{p} = p^2$
(iii) $(1 + p - p^2)^2 + (1 - p + p^2)^2$
$= (-2p^2)^2 + (-2p)^2 = 4(p^4 + p^2) = 4(p + p^2) = -4$

31. i এর একটি বর্গমূল নিচের কোনটি?
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)$
(c) $\frac{1}{2}(-1 - i)$ (d) $\frac{1}{2}(1 - i)$
সমাধান: (a); $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2i - 1}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1^2 + 2i + i^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

32. $i^2 = -1$ হলে, $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{23} = ?$
(a) -1 (b) $-i$ (c) 1 (d) $-i$
সমাধান: (a); $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots\ldots + i^{23}$
$= i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots\ldots + i^{20} + i^{21} + i^{22} + i^{23}$
প্রথম থেকে প্রতি চারটি পদের যোগফল = 0
i থেকে i^{20} পর্যন্ত পদগুলোর যোগফল 0
$= i^{21} + i^{22} + i^{23} = i + i^2 + i^3 = -1$

33. $n \in \mathbb{N}$ এর সর্বনিম্ন মান কত হলে $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ হবে?
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6
সমাধান: (c);
$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left(\frac{2i}{-2}\right)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$
z এর মান 1 হবে যদি $\frac{n}{2}$ জোড় হয়
n এর সর্বনিম্ন মান $n = 4$

34. $\frac{(1+i)^2}{(i-1)^4}$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট নিচের কোনটি?
(a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $-\pi$ (d) π
সমাধান: (a); $\frac{(1+i)^2}{(i-1)^4} = \frac{2i}{(-2i)^2} = \frac{2i}{4.(-1)} = -\frac{i}{2}$
$\text{Argument} = -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

35. $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) 4i (b) 4ω (c) −4 (d) 4
সমাধান: (c); $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1} = 4i \times i = -4$

36. $i^2 = -1$ হলে, $\frac{i^{-1}-i}{i+2i^{-1}}$ এর মান কত? [Ans: d]
(a) $1+i$ (b) $1-i$ (c) -2 (d) 2

37. $\frac{i-i^{-1}}{i+2i^{-1}}$ এর মান ও নতি যথাক্রমে-
(a) 0, 0 (b) $-2i, -\frac{\pi}{2}$ (c) $2i, \frac{\pi}{2}$ (d) $-2, \pi$
সমাধান: (d); $\frac{-i^{-1}+i}{i+2i^{-1}}$ $[i^{-1} = -i]$
$= \frac{i+i}{i-2i} = \frac{2i}{-i} = -2$; Mod = 2; Ang = π

38. $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right|$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{\sqrt{34}}{5}$ (b) $\frac{5\sqrt{65}}{13}$ (c) $\frac{\sqrt{11}}{9}$ (d) $\frac{\sqrt{29}}{7}$
সমাধান: (b); $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right| = \frac{|(2+i)^3|}{|2+3i|} = \frac{(\sqrt{5})^3}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

39. $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}}$ এর মান কত?
(a) $1+i$ (b) $1-i$ (c) -2 (d) 2
সমাধান: (a); $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{i(1+i)}{i} = \frac{i-1}{i}$
$= 1 - \frac{1}{i} = 1 + i$

40. $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে, $1 - x - y - xy$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
সমাধান: (b); $x = \omega$; $y = \omega^2$; $1 - x - y - xy$
$= 1 - \omega - \omega^2 - \omega^3 = 1 - (\omega + \omega^2 + 1)$
$= 1 - 0 = 1$

41. $4 - 4\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল কোনটি?
(a) $\pm(2-\sqrt{-2})$
(b) $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}} - i(\sqrt{8}-2)^{\frac{1}{2}}\right]$
(c) $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}} - i(2-\sqrt{8})^{\frac{1}{2}}\right]$
(d) $\pm(4-\sqrt{-2})$
সমাধান: (b); $z = 4 - 4i$ $\left[\sqrt{a+ib} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{r+a} + i\sqrt{r-a}\}; r = \sqrt{a^2+b^2}\right]$
$\sqrt{z} = 2\sqrt{1-i} = \pm 2.\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\sqrt{2}+1} - i.\sqrt{\sqrt{2}-1}\right]$
$= \pm\left[\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right]$
$= \pm\left[\sqrt{\sqrt{8}+2} - i\sqrt{\sqrt{8}-2}\right]$

42. $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল কোনটি?
(a) $-1+3i$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{7} + 2i$
(c) $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$ (d) $\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)$
সমাধান: (c); $z = \frac{5+12i}{3-4i}$
$\sqrt{\frac{5+12}{3-4i}} = \sqrt{\frac{9+2.3.2i+(2i)^2}{4-2.2.i+i^2}} = \pm\frac{3+2i}{2-i} = \pm\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$= \pm\frac{4+7i}{5} = \pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$

43. $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান কত?
(a) ±2 (b) ±3 (c) $\pm\sqrt{2}$ (d) $\pm\sqrt{3}$
সমাধান: (c); $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(1+i)^2} + \sqrt{(1-i)^2}\right] = \pm\sqrt{2}$

44. যদি ω এককের একটি কাল্পনিক জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$ এর মান কত?
(a) 3 (b) −3 (c) 4 (d) −4
সমাধান: (d); $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$
$= (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2 = -4$

45. $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 3 + i$ হলে $z_1\bar{z}_2$ এর মডুলাস-
(a) 6 (b) $5\sqrt{2}$ (c) 7 (d) $5\sqrt{3}$
সমাধান: (b); $z_1\overline{z_2} = (2+i)(3-i)$ Mod $|z_1\overline{z_2}|$
$= \sqrt{5}\sqrt{10} = 5\sqrt{2}$

46. যদি $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে-
(a) 1 (b) −1 (c) i (d) −i
সমাধান: (d); $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ $a^2 = i$; $a^6 = i^3 = -i$

47. $\sqrt{-2} \times \sqrt{-1}$ এর মান কোনটি? [Ans: a]
(a) $-\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\pm\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2i}$

এস ইউ আহাম্মাদ স্যার

48. $(-1+\sqrt{-3})^3+(-1-\sqrt{-3})^3$ এর মান কত?
(a) 8 (b) 16 (c) 12 (d) −16
সমাধান: (b); $(-1+\sqrt{-3})^3+(-1-\sqrt{-3})^3$
$=(2\omega)^3+(2\omega^2)^3=16$

49. এককের ঘনমূলত্রয়ের সমষ্টি কত? [Ans: d]
(a) 1 (b) −1 (c) $\sqrt{-3}$ (d) 0

50. $i^{15}+i^{-15}$ এর মান–
(a) 2i (b) −2i (c) 0 (d) i
সমাধান: (c); $i^{15}+i^{-1} = -i+\frac{1}{i}=-i+\frac{i^2}{i}$
$=-i+i=0$

51. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^{14}+\omega^{-14}$ এর মান- [Ans: b]
(a) −1 (b) 0 (c) ω (d) ω^2

52. 8 এর একটি জটিল ঘনমূল–
(a) $-1+\sqrt{3}i$ (b) $1-\sqrt{3}i$
(c) $\sqrt{3}+i$ (d) $\sqrt{3}-i$
সমাধান: (a); $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2, 2\omega, 2\omega^2$
$=2, (-1+\sqrt{3}i), (-1-\sqrt{3}i)$

53. −i এর বর্গমূল–
(a) i (b) −i
(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ (d) 1 − i
সমাধান: (c); $\sqrt{-i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-i)^2}=\pm\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$

54. $z=x+iy$ হলে $|z-5|+|z+5|=16$ নির্দেশ করে–
(a) Circle (b) Parabola
(c) Hyperbola (d) Ellipse
সমাধান: (d); $z=x+iy; |z-5|+|z+5|=16$
$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+y^2}=16$
$\Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; যা উপবৃত্ত

55. i এর আর্গুমেন্ট কত? [Ans: b]
(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) ∞ (d) $\frac{\pi}{4}$

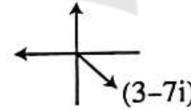
56. i কাল্পনিক সংখ্যা হলে, i^{51} এর মান–
(a) 1 (b) −1 (c) i (d) −i
সমাধান: (d); $i^{51}=(i^4)^{12}.i^3=-i$

57. যদি $z_1=1-i, z_2=\sqrt{3}+i$ হয়, তবে $\frac{z_2}{z_1}$ এর নতি–
(a) $\frac{5\pi}{12}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{5\pi}{12}$
সমাধান: (a); $\frac{z_2}{z_1}=\frac{\sqrt{3}+i}{1-I}$; $\text{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$
$=\text{Arg}(z_2)-\text{Arg}(z_1)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\{-\tan^{-1}(1)\}$
$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi+3\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

58. $x=3+2i$ এবং $y=3-2i$ হলে $x^2+xy+y^2=$?
(a) 0 (b) 23 (c) 26 (d) 29
সমাধান: (b); $x=3+2i$; $y=3-2i$; $x^2+xy+y^2=(3+2i)^2+(3-2i)^2+(3+2i)(3-2i)$
$=2(3^2-4)+3^2+4=(2\times 5)+13=23$

অসীম কুমার সাহা স্যার

59. 3 − 7i জটিল সংখ্যাটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে?
(a) চতুর্থ (b) তৃতীয় (c) দ্বিতীয় (d) প্রথম
সমাধান: (a); 3 − 7i



60. −5i − 4 জটিল সংখ্যার ক্রমজোড় কোনটি? [Ans: c]
(a) (−5, −4) (b) (−5, 4)
(c) (−4, −5) (d) (−4, 5)

61. $x-iy=-1-i$ হলে y এর মান কত?
(a) −1 (b) 1 (c) i (d) −i
সমাধান: (b); $x-iy=-1-i \therefore y=1$

62. কোন জটিল সংখ্যা ও তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি কিরূপ সংখ্যা?
(a) কাল্পনিক (b) জটিল
(c) বাস্তব (d) অবাস্তব
সমাধান: (c); $z=x+iy$
$z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x$

63. $x=1+i$ হলে $x^4-2x^3+2x^2$ এর মান কোনটি?
(a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) i
সমাধান: (b); $x-1=i \Rightarrow x^2-2x+1=-1$
$\Rightarrow x^2-2x+2=0 \therefore x^4-2x^3+2x^2$
$=x^2(x^2-2x+2)=x^2-0=0$

64. y এর কোন মানের জন্য x + iy বাস্তব সংখ্যা হবে? [Ans: a]
(a) শূন্য (b) ধনাত্মক (c) ঋণাত্মক (d) পূর্ণ সংখ্যা

65. a − ai এর মডুলাস কত? [Ans: d]
(a) −a (b) a (c) 0 (d) $\sqrt{2}a$

66. দুটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুণফল- [Ans: c]
(i) জটিল সংখ্যা (ii) বাস্তব সংখ্যা
(iii) ধনাত্মক সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

67. $z = a + ib$ হলে- [Ans: b]
(i) $z + \bar{z}$ বাস্তব (ii) $|z| + |\bar{z}|$ জটিল
(iii) $\overline{(z - \bar{z})}$ কাল্পনিক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$z_1 = 4i$ এবং $z_2 = 1 - i$ দুটি জটিল সংখ্যা।

68. $z_1.z_2$ এর পরমমান কত?
(a) $4\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) 1
সমাধান: (a); $z_1 = 4i$; $z_2 = -1 - i$; $|z_1z_2| = 4\sqrt{2}$

69. $\frac{z_2}{z_1}$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি?
(a) 45° (b) −45° (c) 135° (d) −135°
সমাধান: (d); $\text{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + px + p = 0$ এবং $ix + 1 - x^2 = 0$ একই সমীকরণ নির্দেশ করলে-

70. $p + q =$ কত?
(a) $1 + i$ (b) $1 - i$ (c) $-1 + i$ (d) $-1 - i$
সমাধান: (d); $x^2 + px + q = 0$; $ix + 1 - x^2 = 0$
$\Rightarrow x^2 - ix - 1 = 0$ $p = -i; q = -1; p + q = -i - 1$

71. $p^2 + pq + q^2$ এর মান কত?
(a) 1 (b) $-i$ (c) i (d) $2 + i$
সমাধান: (c); $p^2 + pq + q^2 = i^2 + 1 + i = i$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$p = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ ও $q = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হলে-

72. $(p^2 + q^2)$ এর মান কোনটি?
(a) −1 (b) i (c) 1 (d) q
সমাধান: (a); $\omega^2 + \omega^4 = -1$

73. $\sqrt{p^2 + q^2}$ এর মান কত?
(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) pq
সমাধান: (b); $\sqrt{\omega^2 + \omega^4} = i$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$z = 2 - 2\sqrt{2}i$ একটি জটিল রাশি।

74. $z + \bar{z}$ এর মান কেমন সংখ্যা হবে? [Ans: b]
(a) জটিল (b) বাস্তব (c) কাল্পনিক (d) শূন্য

75. $\overline{(z - \bar{z})}$ এর মান কোনটি?
(a) $-4\sqrt{2}i$ (b) $-2\sqrt{2}i$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) $4\sqrt{2}i$
সমাধান: (d); $\overline{z - \bar{z}} = \overline{\left((2 - 2\sqrt{2}i) - (2 + 2\sqrt{2}i)\right)}$
$= 4\sqrt{2}i$

76. $i^{4n-2} =$ কোনটি? (n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)
(a) i (b) 1 (c) $-i$ (d) −1
সমাধান: (d); $i^{4n-2} = \frac{i^{4n}}{i^2} = \frac{1}{i^2} = -1$

77. $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557} =?$
(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 2
সমাধান: (a); $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557}$
$= 1 + \omega + \omega^2 = 0$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

78. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল p হলে-
(i) $p + p^2 = -1$ (ii) 2p এর মডুলাস 2
(iii) p এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা p^2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (i) $p + p^2 = -1$
(ii) $2p = 2\omega$; $|2\omega| = 2$ (iii) $\bar{p} = p^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$z = 4 - 3i$ একটি জটিল সংখ্যা

79. z এর আর্গুমেন্ট কোনটি? [Ans: b]
(a) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (b) $-\tan^{-1}\frac{3}{4}$
(c) $\pi - \tan^{-1}\frac{3}{4}$ (d) $-\pi + \tan^{-1}\frac{3}{4}$

80. $(1 - i)^{-2} - (1 + i)^{-2}$ এর মান কত?
(a) 1 (b) i (c) $-i$ (d) −1
সমাধান: (b); $(1 - i)^{-2} - (1 + i)^{-2}$
$= (-2i)^{-1} - (2i)^{-1} = \frac{1}{2}(-i^{-1} - i^{-1})$
$= \frac{1}{2}(i + i) = i$

81. $\sqrt[4]{-169}$ এর মান কত?
(a) $\pm\frac{\sqrt{26}}{2}(1 \pm i)$ (b) $\pm\frac{\sqrt{100}}{2}(1 + 2i)$
(c) $\pm\frac{\sqrt{62}}{2}(1 + i)$ (d) কোনটিই নয়
সমাধান: (a); $\sqrt[4]{-169} = \sqrt[4]{-13^2} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$
Full: let; $x = \sqrt[4]{-169}$; $x^4 = -169$
$x^2 = \pm 13i$; $x = \pm\sqrt{13i}$; $x = \pm\sqrt{-13i}$

82. $\sqrt{[-2+2\sqrt{\{-2+2\sqrt{(-2+\ \ldots\ldots\ldots\infty)}\}}]}$ এর মান কত?

(a) $2 \pm i$ (b) $1 \pm 2i$ (c) $2 \pm 2i$ (d) $1 \pm i$

সমাধান: **(d)**; $x = \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+\ \ldots\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow x^2 = -2 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$x = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

83. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^2 =$ কত?

(a) -1 (b) $-2i$ (c) i (d) $\frac{i}{2}$

সমাধান: **(d)**; $\left(\frac{i}{1+i}\right)^2 = \frac{i^2}{2i} = \frac{i}{2}$

84. $\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2}$ এর মান হল -

(a) 0 (b) i (c) c (d) $\frac{1+i}{1}$

সমাধান: **(a)**; $\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2} = \frac{2(1+i^2)}{4i} = 0$

85. $(\omega^{3n} + \omega^{3n+1} + \omega^{3n+2})^5 (n \in \mathbb{N})$ এর মান কত? **[Ans: c]**

(a) ω (b) ω^2 (c) 0 (d) 1

86. ω এককের একটি জটিল ঘনমূল হলে-

(i) $\frac{1}{\omega^{99}} = 1$ (ii) $1 + \omega^5 + \omega^{13} = 0$

(iii) $3\omega^{10} + 3\omega^{12} = -3\omega^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(d)**; (i) $\frac{1}{\omega^{99}} = 1$

(ii) $1 + \omega^5 + \omega^{13} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$

(iii) $3\omega^{10} + 3\omega^{12} = 3 + 3\omega = -3\omega^2$

87. $1 + 2i$ – **[Ans: d]**

(i) একটি জটিল সংখ্যা

(ii) এর বাস্তব অংশ 1 এবং কাল্পনিক অংশ 2.

(iii) এর ক্রমজোড় আকার $(1, 2)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

88. $z = (-4 + 3i)/i$ এর কাল্পনিক অংশ-

(a) 3 (b) 4 (c) -4 (d) -3

সমাধান: **(b)**; $z = \frac{(-4+3i)}{i} = 4i + 3$

89. $\sqrt{5}\, e^{it\ \ ^{-1}(-2)}$ দ্বারা কোন সংখ্যাটি প্রকাশ করা যায়?

(a) $5 + i$ (b) $1 + 2i$ (c) $5 - i$ (d) $1 - 2i$

সমাধান: **(d)**; $z = \sqrt{5}\, e^{i \tan^{-1}(-2)}$

$= \sqrt{5}\,[\cos(\tan^{-1}(-2)) + i \sin(\tan^{-1}(-2))] = 1 - 2i$

90. $(1 + ai)^2$ জটিল রাশিটির আর্গুমেন্ট (argument) $\frac{\pi}{4}$ হলে, a এর মান কত?

(a) $1 \pm \sqrt{2}$ (b) $-1 \pm \sqrt{2}$

(c) $2 \pm \sqrt{2}$ (d) $-2 \pm \sqrt{2}$

সমাধান: **(a)**; $(1 + ai)^2 = z$

$\text{Arg} z = \text{Arg}\{(1 + ai)^2\} = 2\,\text{Arg}\,(1 + ai) = 2\tan^{-1}(a)$

Now, $2\tan^{-1}(a) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2a}{1-a^2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \therefore a = 1 \pm \sqrt{2}$

91. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(\omega + \omega^2)^{6m}$ এর মান কোনটি?

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ω

সমাধান: **(c)**; $(\omega + \omega^2)^{6m} = (-1)^{6m} = (1)^m$; $m \in \mathbb{R}$

92. n যদি 3 এর গুণিতক হয় তবে $1 + \omega^n + \omega^{2n} =$? **[Ans: d]**

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 3

◆ MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. $1 - i$ জটিল সংখ্যাটির— **[Ans: b]**

(i) মডুলাস $= \sqrt{2}$ (ii) আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{4}$

(iii) পোলার আকৃতি, $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

02. $z = x + iy$ হলে $|z - 5| = 3$ দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণ কি নির্দেশ করে?

(a) সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) বৃত্ত

সমাধান: **(d)**; $|z - 5| = 3$ হল বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র $(5,0)$ ও ব্যাসার্ধ 3, $\pm\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 3$

03. এককের ঘনমূল- **[Ans: c]**

(i) i (ii) $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

(iii) $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

$Z_1 = 1 + i$

04. $\overline{Z_1}$ এর পরমমান কত? **[Ans: c]**

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) 2

05. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $\omega^{3000} + \omega^{3001} + \omega^{3002}$ এর মান নিচের কোনটি? [Ans: a]
(a) 0 (b) 1 (c) ω (d) ω^2

06. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$ হলে p ও q এর মান কোনটি? $[p, q \in \mathbb{R}]$
(a) $p = 2, q = 1$ (b) $p = 2, q = 2$
(c) $p = -2, q = 2$ (d) $p = 2, q = -2$
সমাধান: (c); $-p = 1 + i + 1 - i = 2$ এবং $q = (1^2 - i^2) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow p = -2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω, যেখানে $\omega = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

07. $(1 + \omega)(1 + \omega^2)$ এর মান কোনটি? [Ans: c]
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

08. $\arg \omega$ কোনটি? [Ans: a]
(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

09. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots \ldots + i^{25}$ এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) i (d) $-i$
সমাধান: (c); $(i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + \cdots\cdots\cdots + i^{20}(i + i^2 + i^3 + i^4) + i^{25}$
$= 0 + 0 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 0 + i^{25} = (i^{24}).i = i$

10. $Z = \frac{i}{1-i}$ জটিল সংখ্যার-
(i) আর্গুমেন্ট $\frac{3\pi}{4}$
(ii) পোলার আকৃতি $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
(iii) বাস্তব অংশ $\frac{1}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $z = \frac{i}{1-i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

11. $z_1 = 3 + i$; $z_2 = 5 + i$ হলে- [Ans: c]
(i) $Z_1 + Z_2 = 8$
(ii) $Z_1^2 + Z_2^2 = 32 + 16i$
(iii) $|Z_1 + Z_2| = 2\sqrt{17}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

12. যদি $z = x + iy$ হয় হবে $Z\overline{Z} = 0$ সমীকরণটি হবে-
(a) সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) বৃত্ত
সমাধান: (d); $Z = x + iy$ হলে, $Z\overline{Z} = x^2 + y^2$
$Z\overline{Z} = 0$ একটি বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

13. একের কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে–
(i) $1 + \omega^4 + \omega^8 = 0$
(ii) $\sqrt{\omega + \omega^2} = 1$
(iii) $\omega^3 = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $\sqrt{\omega + \omega^2} = i$

14. $x + iy = 3i$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি? [Ans: b]
(a) $(x, y) \equiv (1, 3)$ (b) $(x, y) \equiv (0, 3)$
(c) $(x, y) \equiv (3, 1)$ (d) $(x, y) \equiv (1, 3)$

15. এককের ঘনমূলত্রয় $1, \omega, \omega^2$ হলে—
(i) $\omega + \omega^2 = 1$ (ii) $\omega^3 = 1$ (iii) $\omega = \frac{1}{\omega^2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $\omega + \omega^2 = -1$

16. $(x - 1)(x^2 + 4) = 0$ সমীকরণের সমাধান নিচের কোনটি? [Ans: c]
(a) $1, 2, -2$ (b) $1, -2, -2$
(c) $1, 2i, -2i$ (d) $1, -2i, -2i$

17. $y = 3 - 5i$ এখানে- [Ans: c]
(i) y একটি জটিল সংখ্যা
(ii) y একটি বাস্তব সংখ্যা
(iii) y এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করা যায়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) iii (c) i, iii (d) ii, iii

18. $(\omega^{3n} + \omega^{3n+1} + \omega^{3n+2})^5$ $(n \in \mathbb{N})$ এর মান কত? [Ans: c]
(a) ω (b) ω^2 (c) 0 (d) 1

19. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর: [Ans: c]
(i) এককের জটিল ঘনমূল দুইটির গুণফল একক
(ii) এককের জটিল ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির উল্টা
(iii) এককের তিনটি ঘনমূলের সমষ্টি শূন্য
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) ii (b) i (c) i, ii, iii (d) iii

20. $\frac{2+3i}{2-i} = x + iy$ হলে $y =$ কত?
(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{8}{5}$ (d) $\frac{7}{5}$
সমাধান: (c); $\frac{2+3i}{2-i} = \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+6i+2i-3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$

21. $z = 3 + 4i$ এবং $\overline{z} = 3 - 4i$ হলে $z - \overline{z}$ সংখ্যাটি একটি– [Ans: b]
(i) বাস্তব (ii) অবাস্তব (iii) জটিল
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

22. $a + ib = p + iq$ হলে কোনটি সঠিক? [Ans: a]
(a) $a = p, b = q$ (b) $a = q, b = p$
(c) $a = b, p = q$ (d) কোনটিই নয়

23. $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}}$ এর মান কত?
(a) $1 + i$ (b) $1 - i$ (c) -2 (d) 2
সমাধান: (a); $\frac{i}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{i}}} = \frac{i}{1-\frac{i}{i-1}} = \frac{i(i-1)}{-1} = 1 + i$

24. $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হলে a^6 এর মান কত?
(a) 1 (b) -1 (c) i (d) $-i$
সমাধান: (d); $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{1+2i-1}{2} = i$
$a^6 = (a^2)^3 = (i)^3 = -i$

25. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $(1-\omega+\omega^2)^5 + (1+\omega-\omega^2)^5$ এর মান কত?
(a) 64 (b) -32 (c) 32 (d) -64
সমাধান: (c); $(1-\omega+\omega^2)^5 + (1+\omega-\omega^2)^5 = ?$
$(1-\omega+\omega^2)^5 + (1+\omega-\omega^2)^5$
$= (-2\omega)^5 + (-2\omega^2)^5 = -32\omega^2 - 32\omega$
$= -32(\omega+\omega^2) = 32$

26. $i = \sqrt{2}a - 1$ হলে $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$ এর মান কত?
(a) 5 (b) -1 (c) 1 (d) 0
সমাধান: (c); $i = \sqrt{2}\,a - 1 \Rightarrow a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{i}$
$\therefore a^2 = i\,;\, a^4 = -1\,;\, a^6 = -i$
$a^8 = 1 \therefore a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1 = 1$

27. $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^4} = ?$
(a) 0 (b) ω (c) ω^2 (d) $-\omega^2$
সমাধান: (a); $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^2} + 1 + \frac{1}{\omega}$
$= \omega + 1 + \omega^2 \left[\because \omega = \frac{1}{\omega^2}\right] = 0$

28. x + iy জটিল সংখ্যাটির মডুলাস r এবং আর্গুমেন্ট θ হলে এর পোলার আকার নিচের কোনটি? [Ans: b]
(a) $re^{-i\theta}$ (b) $re^{i\theta}$ (c) $e^{i\theta}$ (d) $e^{-i\theta}$

29. $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 1
সমাধান: (b); $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}(1+2i+i^2)} + \sqrt{\frac{1}{2}(1-2i+i^2)}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-i)^2}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i+1-i) = \sqrt{2}$

30. ω একটি এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots\cdots\cdots + \omega^{34}$ এর মান কত?
(a) 0 (b) ω (c) ω^2 (d) কোনটিই নয়
সমাধান: (d); $(1+\omega+\omega^2) + \omega^3(1+\omega+\omega^2) + \omega^6(1+\omega+\omega^2) + \cdots + \omega^{30}(1+\omega+\omega^2) + \omega^{33} + \omega^{34} = 0 + \omega^{33}(1+\omega) = 1 + \omega = -\omega^2$

31. $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 3 + i$ হলে $z_1\overline{z_2}$ এর সঠিক মডুলাস নিচের কোনটি?
(a) 6 (b) 7 (c) $5\sqrt{2}$ (d) $5\sqrt{3}$
সমাধান: (c); $|Z_1.Z_2| = |Z_1|.|Z_2|$; $[|Z_2| = |\overline{Z_2}|]$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
$a = 3 - 2i, b = 3 + 2i$

32. (a + b) কী ধরণের রাশি? [Ans: a]
(a) বাস্তব (b) অবাস্তব
(c) কাল্পনিক (d) কোনটিই নয়

33. $|a| + |b| =$ কত? [Ans: d]
(a) 3 (b) 13 (c) $\sqrt{13}$ (d) $2\sqrt{13}$

34. উদ্দীপকের আলোকে— [Ans: b]
(i) $a - b = 0$ (ii) $a - b$ কাল্পনিক রাশি
(iii) $a^2 + b^2 = 10$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

35. $\sqrt{2}(\sqrt{i} + \sqrt{-i}) = ?$
(a) $\sqrt{2}$ (b) 2 (c) $2\sqrt{2}$ (d) 4
সমাধান: (b); $\sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\frac{[(1+i)\pm(1-i)]}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{2}}$ or $\pm\frac{2i}{\sqrt{2}}$
$\therefore \sqrt{2}(\sqrt{i} + \sqrt{-i}) = \pm 2$ or $\pm 2i$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
$$Z = \frac{5-i}{2-3i}$$

36. $\overline{Z} = ?$
(a) 1 + i (b) 1 − i (c) 2 + 3i (d) 5 + i
সমাধান: (b); $Z = \frac{5-i}{2-3i}$; $\overline{Z} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$
$= \frac{13-13i}{13} = 1 - i$

37. $\arg(\overline{Z}) = ?$
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$
সমাধান: (d); $\overline{Z} = 1 - i$; $\arg(\overline{z}) = -\tan^{-1}1 = -\frac{\pi}{4}$

38. 4 + 3i এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা নিম্নের কোনটি? [Ans: c]
(a) −3 − 4i (b) −4 + 3i (c) 4 − 3i (d) 3 − 4i

39. a + ib = 0 বলতে কি বোঝায়? $[a, b \in \mathbb{R}]$ [Ans: a]
(a) $a = 0, b = 0$ (b) $a = 0, b \neq 0$
(c) $a \neq 0, b = 0$ (d) $a \neq 0, b \neq 0$

40. z = i − 1 হলে –
(i) $|Z| = \sqrt{2}$ (ii) $\arg(z) = 135°$ (iii) $\overline{z} = i + 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); $\overline{z} = -1 - i$

41. $\omega^{(3n-1)}$ এর মান কোনটি? [যেখানে $n \in N$] [Ans: c]
(a) ω (b) −ω (c) ω^2 (d) $-\omega^2$

42. কোনো জটিল সংখ্যা z = x + iy হলে- [Ans: b]
(i) $\overline{z}$ বাস্তব (ii) $\overline{\overline{z}} = z$ (iii) $\mathrm{Arg}(z) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

43. $(-1+\sqrt{-3})^3+(-1-\sqrt{-3})^3$ এর মান কত?
(a) 8 (b) 16 (c) 12 (d) −4
সমাধান: (b); $(2\omega)^3+(2\omega^2)^3=8+8=16$

44. $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\ldots\ldots}}}$ হলে x এর মান কত?
(a) -2 (b) 3 (c) 6 (d) 9
সমাধান: (b); $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\cdots}}}$
$\Rightarrow x^2=6+x\Rightarrow x=3$ [$x\neq-2$ কারণ x ধনাত্মক]

45. $x=3+2i$ এবং $y=3-2i$ হলে, x^2+xy+y^2 এর মান কোনটি? [Ans: b]
(a) 21 (b) 23 (c) 27 (d) 29

46. $(3+2i)^5$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত? [Ans: a]
(a) $5\tan^{-1}\frac{2}{3}$ (b) $\tan^{-1}\frac{2}{3}$
(c) $\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{2}{3}$ (d) $5\tan^{-1}\frac{3}{2}$

47. এককের জটিল ঘনমূল দুটির গুণফল– [Ans: b]
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) −2

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও।
i^{-49}

48. উদ্দীপকটির মান কোনটি?
(a) −1 (b) 1 (c) i (d) −i
সমাধান: (d); $i^{-49}=\frac{1}{i^{49}}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

49. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ =? [এখানে z_1 এবং z_2 দুটি জটিল সংখ্যা] [Ans: b]
(a) $\arg z_1+\arg z_2$ (b) $\arg z_1-\arg z_2$
(c) $\arg z_1\div\arg z_2$ (d) $\arg z_1\times\arg z_2$

50. $x^2+x+1=0$ হলে— [Ans: c]
(i) $x=\omega$ (ii) $x=\frac{1}{\omega}$ (iii) $x=-\omega$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, iii

51. $(2+3\omega+2\omega^2)^9$ এর মান কোনটি?
(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2
সমাধান: (a); $(2+3\omega+2\omega^2)^9=(3+3\omega+3\omega^2-1-\omega)^9=(0-1-\omega^2)^9=\omega^9=1$

52. এককের জটিল ঘনমূল দুটির সম্পর্ক কেমন? [Ans: d]
(a) একটি অপরটির ঘনের সমান
(b) তাদের গুণফল শূন্য
(c) পরস্পর অনুবন্ধী নয়
(d) একটি অপরটির বর্গের সমান

53. এককের ঘনমূল তিনটির গুণফল নিচের কোনটি? [Ans: c]
(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) i

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
$\frac{2+i}{2+3i}$ একটি জটিল সংখ্যা যাকে $A+iB$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

54. রাশিটির $A+iB$ আকার নিচের কোনটি?
(a) $\frac{5}{13}+i\frac{3}{13}$ (b) $\frac{5}{13}-i\frac{3}{13}$ (c) $\frac{7}{13}+i\frac{4}{13}$ (d) $\frac{7}{13}-i\frac{4}{13}$
সমাধান: (d); $\frac{(2+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{4-6i+2i-3i^2}{13}=\frac{7}{13}-i\frac{4}{13}$

55. A^2+B^2 = কত? [Ans: c]
(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{4}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\frac{7}{13}$
সমাধান: (c); $A^2+B^2=\left(\frac{7}{13}\right)^2+\left(\frac{4}{13}\right)^2=\frac{5}{13}$ (Ans)

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. উদ্দীপকে: $z=x+iy$ [DB'22]
(ক) $-1+\sqrt{3}i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2
(খ) $\sqrt[3]{p+iq}=z$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt[3]{p-iq}=\bar{z}$ 4
(গ) $3|z-1|=2|z-2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $Z=-1+\sqrt{3}i\therefore|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2\therefore\arg(z)=\pi-\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

খ. দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{p+iq}=z=x+iy$
দেখাতে হবে যে, $\sqrt[3]{p-iq}=\bar{z}=x-iy$
প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{p+iq}=x+iy\Rightarrow P+iq=(x+iy)^3\Rightarrow p+iq=x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+y^3i^3$
$\Rightarrow p+iq=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i$
$\therefore p=x^3-3xy^2; q=3x^2y-y^3\therefore p-iq=x^3-3xy^2-(3x^2y-y^3)i=x^3-3x^2yi+3xy^2i^2+y^3(-i)^3$
$=x^3-3x^2(yi)+3x(yi)^2-(yi)^3=(x-iy)^3\therefore\sqrt[3]{p-iq}=x-iy$ [**Showed**]

গ. দেওয়া আছে, $z = x + iy$

প্রশ্নমতে, $3|z-1| = 2|z-2| \Rightarrow 3|x+iy-1| = 2|x+iy-2|$

$\Rightarrow 3|(x-1)+iy| = 2|x+iy-2| \Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\Rightarrow 9(x^2-2x+1)+9y^2 = 4(x^2-4x+4)+4y^2$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2-18x+16x+9-16 = 0 \Rightarrow 5x^2+5y^2-2x-7=0$

এখানে, x^2 ও y^2 এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান এবং xy যুক্ত পদ অনুপস্থিত। তাই ইহা একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

02. দৃশ্যকল্প-১: $|z+6|+|z-6| = 20$ যেখানে $z = x+iy$. [Ctg.B'22]

দৃশ্যকল্প-২: $(1+y)^n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots + b_ny^n$.

(ক) $6-2\sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণটির সঞ্চার পথ এবং উহার নাম উল্লেখ করে চিত্র অংকন কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণ হতে দেখাও যে,

$(b_0 - b_2 + b_4 - \cdots\cdots)^2 = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots) - (b_1 - b_3 + b_5 - \cdots\cdots)^2$ 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. প্রশ্নমতে, $|z+6|+|z-6| = 20 \Rightarrow |(x+6)+iy| + |(x-6)+iy| = 20$

$\Rightarrow \sqrt{(x+6)+y^2} + \sqrt{(x-6)^2+y^2} = 20 \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2+y^2} - 20 = -\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2+12x+36+y^2+400-40\sqrt{(x+6)^2+y^2} = x^2-12x+36+y^2$

$\Rightarrow 24x+400 = 40\sqrt{(x+6)^2+y^2} \Rightarrow (24x+400)^2 = 1600(x^2+12x+36+y^2)$

$\Rightarrow 576x^2+19200x+160000 = 1600x^2+19200x+57600+1600y^2$

$\Rightarrow 9x^2+300x+2500 = 25x^2+300x+900+25y^2 \Rightarrow 16x^2+25y^2 = 1600$

$\Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64} = 1$ ইহা একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

গ. $(1+y)^n = b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+ \ldots\ldots\ldots b_ny^n$

$y = 1$ বসিয়ে পাই, $(1+1)^n = b_0+b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots\ldots+b_n \ldots\ldots\ldots$ (i)

$(1+1)^n = (1-i^2)^n = (1+i)^n(1-i)^n \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$(1+i)^n = b_0+b_1i+b_2i^2+b_3i^3+b_4i^4+b_5i^5+\ldots\ldots\ldots$

$= b_0+b_1i-b_2-b_3i+b_4+b_5i+\ldots\ldots\ldots$

$= (b_0-b_2+b_4-\ldots\ldots\ldots)+(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)i$

$(1-i)^n = b_0+b_1(-i)+b_2(-i)^2+b_3(-i)^3+b_4(-i)^4+b_5(-i)^5+\ldots\ldots\ldots$

$= b_0-b_1i-b_2+b_3i+b_4-b_5i+\ldots\ldots\ldots$

$= (b_0-b_2+b_4-\ldots\ldots\ldots)-(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)i$

$\therefore (1+i)^n(1-i)^n = \{(b_0-b_2+b_4-\ldots\ldots\ldots)+(b_1-b_3+b_5\ldots\ldots\ldots)i\}\{(b_0-b_2+b_4-\ldots\ldots\ldots)-(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)i\}$

$= (b_0-b_2+b_4-\ldots\ldots\ldots)^2+(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)^2$

$\Rightarrow (1+1)^n = (b_0-b_2+b_4-\ldots\ldots\ldots)^2+(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)^2$ [(ii)]

$\Rightarrow b_0+b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots\ldots = (b_0-b_2+b_4\ldots\ldots\ldots)^2+(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)^2$ [(i)]

$\therefore (b_0-b_2+b_4+\ldots\ldots\ldots)^2 = (b_0+b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots\ldots)-(b_1-b_3+b_5-\ldots\ldots\ldots)^2$ **(Showed.)**

03. দৃশ্যকল্প-১: $z = 32+i$. [Ctg.B'22]

(ক) $a+ib = e^{i\theta}$ হলে দেখাও যে, $a^2+b^2=1$ 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে $z+\bar{z}$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $a + ib = e^{i\theta} \Rightarrow a + ib = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow |a + ib| = |\cos\theta + i\sin\theta|$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \therefore a^2 + b^2 = 1$ **(Showed.)**

খ. $z + \bar{z} = 32 + i + 32 - i = 64$

ধরি, $z + \bar{z}$ এর ঘনমূল x

$\therefore \sqrt[3]{z + \bar{z}} = x \Rightarrow \sqrt[3]{64} = x \Rightarrow x^3 - 64 = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{64} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^3 = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{4} = 1, \omega, \omega^2 \therefore x = 4, 4\omega, 4\omega^2 \therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল: $4, 4\omega, 4\omega^2$

04. $\mathbf{a = 4, b = \sqrt{-4}, z = \frac{1}{n}(l + im)}$ একটি জটিল সংখ্যা। **[RB'22]**

(ক) $\frac{2-3i}{4-4i}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর। **2**

(খ) $\sqrt{a + b}$ নির্ণয় কর। **4**

(গ) $l = m = 3, n = \sqrt{18}$ হলে $|z|$ এর ঘনমূলগুলোর যোগফল নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. $\frac{2-3i}{4-4i} = \frac{(2-3i)(4+4i)}{(4-4i)(4+4i)} = \frac{8-12i+8i-12\ ^2}{4^2+4^2} = \frac{20-4i}{32} = \frac{5-i}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}i$

খ. ধরি, $\sqrt{a + b} = \sqrt{4 + \sqrt{-4}} = \sqrt{4 + 2i} = x + iy \therefore (x + iy)^2 = 4 + 2i$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 4 + 2i \therefore x^2 - y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots (i)$

$2xy = 2 \ldots\ldots\ldots (ii) \therefore x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5} \ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) ও (iii) যোগ করে পাই, $2x^2 = 4 + 2\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$

(iii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = 2\sqrt{5} - 4 \Rightarrow y^2 = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}$

$\therefore \sqrt{a + ib} = \pm\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \left(\pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)i = \pm\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2i}\right)$

গ. $z = \frac{1}{n}(l + im) = \frac{1}{\sqrt{18}}(3 + 3i) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3 + 3i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \therefore |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 1^2} = 1$

ধরি, $\sqrt[3]{|z|} = x \Rightarrow x^3 - |z| = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1, \omega, \omega^2 \therefore 1 + \omega + \omega^2 = 0 \therefore$ নির্ণেয় যোগফল 0

05. $\mathbf{f_1(x) = 4x^2 - 7x + 3}$ **[RB'22]**

$\mathbf{f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

(ক) $z = -4 + 4i$ এর মডুলাস ও মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। **2**

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

06. $\mathbf{f(x) = \frac{2x}{1+x^2}}$ এবং $\mathbf{g(x) = p + qx + rx^2}$ দুইটি ফাংশন। **[SB'22]**

(ক) $z = \frac{1+2i}{1-3i}$ এর মডুলাস বের কর। **2**

(খ) $f(1)$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর। **4**

(গ) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)\}^2 = 3(p^2 + 2qr)$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলোর একটি জটিল মূল। **4**

সমাধান

ক. $z = \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+2i+3i+6\ ^2}{1^2+3^2} = \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \therefore |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

খ. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. $p+q+r=0$ প্রমাণ করতে হবে যে, $\{g(\omega)\}^2+\{g(\omega^2)\}^2=3(p^2+2qr)$

$L.H.S=\{g(\omega)\}^2+\{g(\omega^2)\}^2 \Rightarrow (p+q\omega+r\omega^2)^2+(p+q\omega^2+r\omega^4)^2$

$=(p+q\omega+r\omega^2)^2+(p+q\omega^2+r\omega)^2$

$=p^2+q^2\omega^2+r^2\omega^4+2pq\omega+2qr\omega^3+2pr\omega^2+p^2+q^2\omega^4+r^2\omega^2+2pq\omega^2+2pr\omega^3+2pr\omega$

$=2p^2+q^2(\omega^2+\omega)+r^2(\omega+\omega^2)+2pq(\omega+\omega^2)+2qr(\omega^3+\omega^3)+2pr(\omega+\omega^2)$

$=2p^2+(q^2+r^2)(\omega+\omega^2)+2p(\omega+\omega^2)(q+r)+2qr\times 2$

$=2p^2-(q+r)^2+2qr+2p+2p(-1)(-p)+4qr$

$=2p^2-(-p)^2+6qr+2p^2=4p^2-p^2+6qr=3p^2+6qr$

$=3(p^2+2qr)=R.H.S$ (**Proved.**)

07. $z=x+iy$ একটি জটিল রাশি এবং $g(x)=x^2+2x+q$ একটি ফাংশন। [SB'22]

(খ) $|z+3|=4$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $|z+3|=4 \Rightarrow |x+iy+3|=4 \Rightarrow |(x+3)+iy|=4$

$=\sqrt{(x+3)^2+y^2}=4 \Rightarrow (x+3)^2+y^2=16$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-3,0)$ ও ব্যাসার্ধ 4 একক।

08. $z_1=1+ia, z_2=a+i;$ [BB'22]

এবং $|z+2|+|z-2|=6,\ z=x+iy$ একটি কনিক।

(ক) $\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

(খ) $a=\sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$. 4

(গ) কনিকটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 04 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

খ. $a=\sqrt{3}$ হলে; $z_1=1+\sqrt{3}i,\ z_2=\sqrt{3}+i$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i+3i\ \sqrt{3}i^2}{3+1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \therefore \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg(z_1)-\arg(z_2)=\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right|-\tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$ **[Showed]**

গ. $|z+2|+|z-2|=6 \Rightarrow |x+iy+2|+|x+iy-2|=6 \Rightarrow |(x+2)+iy|+|(x-2)+iy|=6$

$\Rightarrow \sqrt{(x+2)+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}-6=-\sqrt{(x-2)+y^2}$

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-2\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot 6+36=x^2-4x+4+y^2$

$\Rightarrow 8x+36=12\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow 2x+9=3\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow (2x+9)^2=9(x^2+4x+4+y^2) \Rightarrow 4x^2+36x+81=9x^2+36x+36+9y^2$

$\Rightarrow 5x^2+9y^2=81-36=45 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

ইহা একটি উপবৃত্ত; যার ক্ষেত্রে $a=3$ ও $b=\sqrt{5}$

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a=6$ ও $2b=2\sqrt{5}$ একক।

09. উদ্দীপক-২: $(y+ix)^{\frac{1}{3}}=a+ib$ একটি সমীকরণ। [BB'22]

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $ax+by=4ab(a^2-b^2)$. 4

সমাধান

গ. $(y+ix)^{\frac{1}{3}} = a+ib \therefore y+ix = (a+ib)^3$
$= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + (bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2bi - b^3i$
$= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i \therefore y = a^3 - 3ab^2; x = 3a^2b - b^3$
$\therefore ax + by = 3a^3b - ab^3 + a^3b - 3ab^3 = 4a^3b - 4ab^3 = 4ab(a^2 - b^2)$(**Showed**)

10. $\mathbf{M = -5 + 12\sqrt{-1}, p = \sqrt[3]{a+ib}}$ এবং $\mathbf{q = x + iy}$ [JB'22]

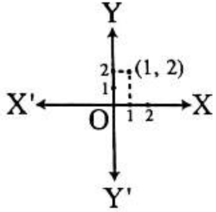
(ক) $\mathbf{1 + 2i}$ কে আর্গন্ড চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর। 2

(খ) **M** এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 4

(গ) **p = q** হলে, প্রমাণ কর যে, $\mathbf{4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}}$. 4

সমাধান

ক. $1 + 2i = x + iy \therefore x = 1, y = 2$
∴ আর্গন্ড তলে জটিল সংখ্যাটির প্রতিরূপী বিন্দু $(1, 2)$।



খ. $M = -5 + 12i = -5 + 2 \times 6i = (2)^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = (2+3i)^2 \therefore \sqrt{m} = \pm(2+3i)$

গ. 09 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

11. উদ্দীপক-১: $\mathbf{z = -1 + i}$ একটি জটিল সংখ্যা। [CB'22]
উদ্দীপক-২: $\mathbf{z = x + iy}$.

(ক) $\mathbf{z = i}$ হলে $\bar{z}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

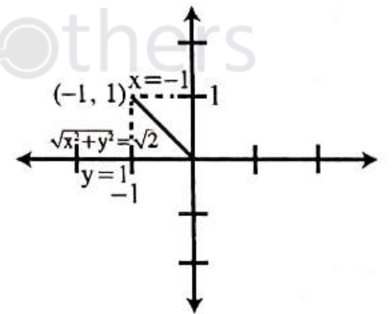
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট আর্গন্ড চিত্রে দেখাও। 4

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে $\mathbf{|z+2| = 5}$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\sqrt{\bar{z}} = \pm\sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-2i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 2i - 1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 2.1.i + i^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$

খ. $z = -1 + i = x + iy \therefore x = -1, y = 1$
∴ আর্গন্ড তলে সংখ্যাটির প্রতিরূপী বিন্দু $(-1, 1)$
$\therefore |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\therefore \arg(z) = \arg(x + iy) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ [$\because y > 0; x < 0$]
$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right| = \frac{3\pi}{4}$



গ. 07 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

12. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{z_1 = 1 - 3i, z_2 = 1 - i}$ [Din.B'22]
দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{|z - 3| - |z + 3| = 4}$

(ক) $\mathbf{(2 + i)(x + iy) = 1 + 3i}$ হলে **x, y** নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\sqrt{\mathbf{z_1 z_2}}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যখন $\mathbf{z = x + iy}$. 4

সমাধান

ক. $(2+i)(x+iy) = (1+3i) \Rightarrow x+iy = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2+6i-i-3i^2}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i \therefore x=1; y=1$

খ. $z_1z_2 = (1-3i)(1-i) = 1-3i-i+3i^2 = -2-4i$

ধরি, $\sqrt{z_1z_2} = x+iy \Rightarrow z_1z_2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi$

$\Rightarrow -2-4i = x^2-y^2+2xyi \therefore x^2-y^2 = -2 \ldots\ldots\ldots (i)$

$2xy = -4 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\therefore x^2+y^2 = \sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \ldots\ldots\ldots (iii)$

(iii) ও (i) যোগ করে পাই, $2x^2 = -2+2\sqrt{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{5}}$

(iii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = 2+2\sqrt{5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$

$\therefore \sqrt{z_1z_2} = x+iy\left(\pm\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right) - \left(\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)i = \pm\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}} - i\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$

গ. $|z-3|-|z+3| = 4 \Rightarrow |x+iy-3|-|x+iy+3| = 4$

$\Rightarrow |(x-3)+iy|-|(x+3)+iy| = 4 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} - \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} - 4 = \sqrt{(x+3)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2+16-8\sqrt{(x-3)^2+y^2} = x^2+6x+9+y^2$

$\Rightarrow -12x+16 = 8\sqrt{(x-3)^2+y^2} \Rightarrow -3x+4 = 2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$\Rightarrow 9x^2-24x+16 = 4(x^2-6x+9+y^2) \Rightarrow 5x^2-4y^2 = 36-16 = 20 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5} = 1$

13. $\mathbf{z_1 = 1+ix, z_2 = a+ib}$ **এবং** $\mathbf{z_3 = x+iy}$ **তিনটি জটিল সংখ্যা।** **[MB'22]**

(ক) $i-\sqrt{3}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2

(খ) $|z_2|^2 = 1$ হলে, দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। 4

(গ) $\sqrt[3]{z_2} = z_3$ হলে প্রমাণ কর যে, $|z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y}-\frac{a}{2x}}$. 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $z_1 = 1+ix, z_2 = a+ib$

দেওয়া আছে, $|z_2|^2 = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \therefore b^2 = 1-a^2 = -(a^2-1)$

প্রশ্নমতে, $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2} \Rightarrow \frac{1-ix}{1+ix} = a-ib \Rightarrow \frac{1-ix+1+ix}{1-ix-1-ix} = \frac{a-ib+1}{a-ib-} \Rightarrow \frac{2}{-2ix} = \frac{a-ib+}{a-ib-}$

$\Rightarrow -ix = \frac{a-ib-}{a-ib+} \Rightarrow i^2x = \frac{a-ib-1}{ai-i^2b+i} \Rightarrow x = \frac{a-ib-1}{ai+b+i} = \frac{(a-1)-ib}{b+(a+1)i}$

$= \frac{\{(a-1)-ib\}\{b-(a+1)i\}}{\{b+(a+1)i\}\{b-(a+1)i\}} = \frac{ab-b-i\ \ ^2-(a^2-1)i+(ab+b)i^2}{b^2-(a+1)^2i^2} = \frac{ab-b-i\ \ ^2+b^2i-ab-b}{b^2+(a+1)^2} = \frac{-2b}{b^2+a^2+2a+1} = \frac{-2b}{2a+2} = -\frac{b}{a+1}$

অর্থাৎ, $x = -\frac{b}{a+1}$; যা একটি বাস্তব সমাধান। তাই, x এর একটি বাস্তব মান উক্ত সমীকরণ সিদ্ধ করে। **(Showed)**

গ. $z_2 = a+ib, z_3 = x+iy$

প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{z_2} = z_3 \Rightarrow z_2 = (z_3)^3 \Rightarrow a+ib = (x+iy)^3 = x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+3xy^2i^2+y^3i^3$

$x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i = (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i$

$\therefore a = x^3-3xy^2 \therefore b = 3x^2y-y^3 \therefore \frac{b}{2y}-\frac{a}{2x} = \frac{3x^2y-y^3}{2y} - \frac{x^3-3xy^2}{2x} = \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2$

$= x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (|x+iy|)^2 = (|z_3|)^2 \therefore |z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y}-\frac{a}{2x}}$ **(Proved.)**

14. দৃশকল্প-১: $p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. [MB'22]
দৃশকল্প-২: $ax^2 + bx + c = 0$ ……………(i)
$cx^2 - 2bx + 4a = 0$ ………….(ii)
(ক) $-2i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

15. (ক) $(2 + 2\sqrt{3}i)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ র্নির্ণয় কর। [DB'19]

সমাধান

ক. একটি মূল $2 + 2\sqrt{3}i$ ∴ অপর মূল $2 - 2\sqrt{3}i$ ∴ $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 4 + 12 = 16$
∴ সমীকরণ, $x^2 - 4x + 16 = 0$

16. দৃশ্যকল্প-২: $2x = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2y = -1 - \sqrt{-3}$ [RB'19]
(ক) $-5 + 12\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর, $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$. 4

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. $2x = -1 + \sqrt{-3} \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ∴ $x = w$

$2y = -1 - \sqrt{-3} \Rightarrow y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ∴ $y = w^2$

$L.H.S. = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$
$= \omega^4 + \omega^3.\omega^2 + \omega^2.(\omega^2)^2 + \omega.(\omega^2)^3 + (\omega)^4$
$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 = -1 = R.H.S.$
∴ $L.H.S. = R.H.S$ ∴ $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^2 + y^4 = -1$ [Proved]

17. (ক) $-4 - 4i$ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [Ctg.B'19]

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

18. (ক) মান নির্ণয় কর: $\sqrt[3]{i}$ [Ctg.B'19]

সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশি = $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{i(-i^2)} = \sqrt[3]{-i^3} = -i$

19. $f(x) = x - 2$. [SB'19]
(গ) $z = p + iq$ হলে, $|f(z+6)| + |f(z-2)| = 10$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. 12 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

20. দৃশ্যকল্প-২: $y^2 + y + 1 = 0$. [SB'19]
(ক) 5i-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির মূলদ্বয় p, q হলে, দেখাও যে, $p^m + q^m = \begin{cases} 2, \text{ যখন m এর মান এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1, \text{ যখন m অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা} \end{cases}$ 4

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. $y^2+y+1=0 \therefore y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \therefore p=\omega$ এবং $q=\omega^2$

m, 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে,

এখন, $m=3n$ হলে, $\omega^{3n}+(\omega^2)^{3n}=(\omega^3)^n+(\omega^3)^{2n}=1+1=2$

m, 3 দ্বারা বিভাজ্য না হলে,

$m=3n+1$ হলে, $\omega^{3n+1}+(\omega^2)^{3n+1}=(\omega^3)^n.\omega+(\omega^3)^{2n}.\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

$m=3n+2$ হলে, $\omega^{3n+2}+(\omega^2)^{3n+2}=(\omega^3)^n.\omega^2+(\omega^3)^{2n}.\omega^4=\omega^2+\omega=-1$

$$\therefore p^m+q^m=\begin{cases}2, \text{যখন } m \text{ এর মান এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য}\\ -1, \text{যখন } m \text{ অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা}\end{cases}$$ [দেখানো হলো]

21. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{p(x)=a+bx+cx^2}$ **[BB'19]**

দৃশ্যকল্প-২: এককের একটি কাল্পনিক ঘন মূল ω।

(ক) $\mathbf{-3-4i}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে যদি $\{p(\omega)\}^3+\left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3=0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a=\frac{1}{2}(b+c)$ অথবা $c=\frac{1}{2}(a+b)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{1+\omega+\omega^2=0}$. 4

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. এখানে, $\{p(\omega)\}^3=\{a+b\omega+c\omega^2\}^3$

$\left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3=\left(a+\frac{b}{\omega}+\frac{c}{\omega^2}\right)^3=(a\omega^2+b\omega+c)^3\ \ [\omega^6=1]$

প্রশ্নমতে, $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a\omega^2+b\omega+c)^3=0 \Rightarrow -\frac{a+b\omega+c\omega^2}{a\omega^2+b\omega+c}=1,\omega,\omega^2$

1 হলে, $-a-b\omega-c\omega^2=a\omega^2+b\omega+c \Rightarrow a(1+\omega^2)+2b\omega+c(1+\omega^2)=0$

$\Rightarrow -a\omega+2b\omega-c\omega=0 \Rightarrow 2b=c+a \therefore b=\frac{c+a}{2}$

ω হলে, $-a-b\omega-c\omega^2=a+b\omega^2+c\omega \therefore \boxed{a=\frac{b+c}{2}}$

ω^2 হলে, $-a-b\omega-c\omega^2=a\omega+b+c\omega^2 \therefore \boxed{c=\frac{a+b}{2}}$ **[Showed]**.

গ. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω

ধরি, $x=\sqrt[3]{1} \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

হয় $x=1$; অথবা, $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

তাহলে, $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

এখন, L. H. S. $=1+\omega+\omega^2=1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1-\frac{2}{2}=0=$ R. H. S **[Proved]**

22. $\mathbf{z}$ একটি জটিল সংখ্যা এবং $\mathbf{f(x)=5x+1}$. **[JB'19]**

(গ) $|2z+3|=|3z+1|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. 12 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

23. উদ্দীপক: মনে কর $g(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$ একটি রাশি [CB'19]

(খ) $|g(x) + 2iy| = t$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. 07 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

24. উদ্দীপক: $z = -2 + 2i$ একটি জটিল সংখ্যা [CB'19]

(ক) z এর মুখ্য আর্গুমেন্ট বের কর। 2

(গ) $\bar{z} = (a^2 + 2) + ib$ সমীকরণটির মূল a এবং b এর প্রকৃতি নিরূপণ কর। 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. $\bar{z} = (a^2 + 2) + ib \Rightarrow -2 - 2i = (a^2 + 2) + ib \therefore a^2 + 2 = -2,\ b = -2$

$a^2 = -4 \therefore a = \pm 2i$ কাজেই a জটিল মূল, b বাস্তব মূল।

25. (ক) $x = i$ হলে $h(x)$ এর বর্গমূল বের কর। [i একটি কাল্পনিক সংখ্যা] [CB'19]

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

26. $a = x^3,\ b = 8.$ [Din.B'19]

(ক) bi এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

(গ) $a - b = 0$ সমীকরণের জটিল মূলদ্বয়, z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$। 4

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. $a - b = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1, \omega, \omega^2$

$\therefore x = 2, 2\omega, 2\omega^2 \therefore \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ & $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore 2\omega = -1 + \sqrt{3}i = z_1$ & $2\omega^2 = -1 - \sqrt{3}i = z_2$

এখন, $z_1z_2 = (-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i) = (-1)^2 - (\sqrt{3})^2 \cdot i^2 = 1 + 3 = 4$

$\therefore \arg(z_1z_2) = 0$ আবার, $\arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

এবং $\arg(z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = -\pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 0 \therefore \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

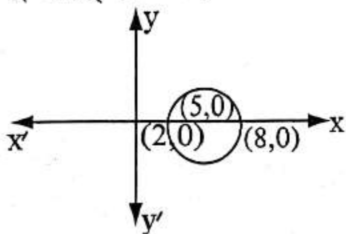
27. দৃশ্যকল্প-২: $|z - 5| = 3$ [All.B'18]

(গ) $z = x + iy$ হলে দৃশ্যকল্প-২ এর সঞ্চারপথ জ্যামিতিকভাবে কী নির্দেশ করে? চিত্র আঁক। 4

সমাধান

গ. $|z - 5| = 3 \Rightarrow |x + iy - 5| = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 3 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 3^2$

সুতরাং দৃশ্যকল্প ২ এর সঞ্চারপথ জ্যামিতিকভাবে বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র (5,0) ও ব্যাসার্ধ 3 একক।



28. দৃশ্যকল্প ১: $z = 2 + 4i - i^2$ [RB'17]

(ক) এককের জটিল ঘনমূল ω, ω^2 হলে $(-1+\sqrt{-3})^7 + (-1-\sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$ সঠিক কী না যাচাই কর। যেখানে $\bar{z}$ হচ্ছে z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, এককের কাল্পনিক মূলদ্বয়, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ এবং $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

অর্থাৎ, $2\omega = -1+\sqrt{-3}$ এবং $2\omega^2 = -1-\sqrt{-3}$

$\therefore (-1+\sqrt{-3}))^7 + (-1-\sqrt{-3})^7 = (2\omega)^7 + (2\omega^2)^7 \Rightarrow 2^7\omega^7 + 2^7\omega^{14} \Rightarrow 128(\omega^7 + \omega^{14})$

$\Rightarrow 128(\omega + \omega^2) \Rightarrow 128 \times (-1) = -128$

খ. দেওয়া আছে, $z = 2 + 4i - i^2 \Rightarrow 2 + 4i - (-1) \Rightarrow 2 + 4i + 1 = 3 + 4i$

$\bar{z}, z$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। $\therefore \bar{z} = 3 - 4i$

এখন, $3 - 4i = 2^2 - 4i + (i)^2 = (2-i)^2 \ \therefore \sqrt{\bar{z}} = \sqrt{3-4i} = \pm(2-i) = \pm 2 \pm i$

$\therefore$ বর্গমূল এর মডুলাস $= \sqrt{(\pm 2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

29. উদ্দীপক-১ $z = x + iy; |z+5| + |z-5| = 15 \ldots\ldots\ldots (i)$ [Ctg.B'17]

(ক) এককের ঘনমূল সমূহ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ হতে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

খ. 12 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

30. $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$ একটি জটিল রাশি। [SB'17]

(ক) $x + iy = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}}$ হলে দেখাও, $(x^2 + y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ 2

(খ) $\text{Arg}(\sqrt{z})$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

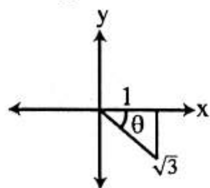
ক. $x + iy$ এর জটিল অনুবন্ধী $x - iy \ \therefore x - iy = \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}}$

$\therefore (x+iy)(x-iy) = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}} \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}} \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2-i^2q^2}{r^2-i^2s^2}}$ $[\because i^2 = -1]$

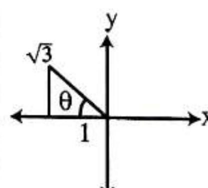
$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}} \quad \therefore (x^2+y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ (দেখানো হল)

খ. দেওয়া আছে, $Z = -2 - 2\sqrt{3}i = 1^2 - 2.1\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2 = (1-\sqrt{3}i)^2 \therefore \sqrt{Z} = \pm(1-\sqrt{3}i)$

ধরি, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$



$\therefore \arg z_1 = -\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{3}$



$\therefore \arg z_2 = \pi - \theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

31. $g(x) = p + qx + rx^2$ [BB'17]

(ক) $15 + 8i$ বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

(গ) $p + q + r = 0$হলে প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $a = x = 3$. 4

সমাধান

ক. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = p + qx + rx^2$

$\therefore g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$ এবং $g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega[\omega^3 = 1]$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 \Rightarrow (p + q\omega + r\omega^2)^3 + (p + q\omega^2 + r\omega)^3$

ধরি, $p + q\omega + r\omega^2 = x$ এবং $p + q\omega^2 + r\omega = y$

বামপক্ষ $= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)\{x^2 + (-1)xy + y^2\}$

$= (x + y)\{x^2 + (\omega^2 + \omega)xy + y^2\}[\because \omega^2 + \omega + 1 = 0]$

$= (x + y)(x^2 + \omega^2 xy + \omega xy + y^2) = (x + y)(x^2 + \omega xy + \omega^2 xy + y^2)$

$= (x + y)\left\{x(x + \omega y) + \omega^2 y\left(x + \frac{y}{\omega^2}\right)\right\} = (x + y)\left\{x(x + \omega y) + \omega^2 y\left(x + \frac{y}{\omega^2}\right)\right\}$

$= (x + y)\{x(x + \omega y) + \omega^2 y(x + \omega y)\}$ $[\because \omega^3 = 1 \therefore \omega = \frac{1}{\omega^2}]$

$= (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) \therefore x + y = p + q\omega + r\omega^2 + p + q\omega^2 + r\omega$

$= 2p + q(\omega + \omega^2) + r(\omega^2 + \omega) = 2p - q - r$

আবার, $x + \omega y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega + q\omega^3 + r\omega^2$

$= p(1 + \omega) + q(\omega + 1) + 2r\omega^2 = \omega^2(2r - p - q)$

আবার, $x + \omega^2 y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega^4 + r\omega^3 = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega + r$

$= p(1 + \omega^2) + 2q\omega + r(1 + \omega^2) = p(-\omega) + 2q\omega + r(-\omega) = \omega(2q - p - r)$

$\therefore (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) = (2p - q - r)\omega^2(2r - p - q)\omega(2q - p - r)$

$= \omega^3(2p - q - r)(2r - p - q)(2q - p - r)$

$= \{2p - (q + r)\}\{2r - (p + q)\}\{2q - (p + r)\}$

$= \{2p - (-p)\}\{2r - (-r)\}\{2q - (-q)\}[\because p + q + r = 0]$

$= 3p.3r.3q = 3^3 pqr = a^x pqr$ $[\because a = x = 3]$ = ডানপক্ষ

$\therefore \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ (প্রমাণিত)।

32. (ক) 1 এর ঘনমূল নির্ণয় কর। [BB'17]

সমাধান

ক. মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

তাহলে, $x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি, $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

33. দৃশ্যকল্প-১: $x + iy = 2e^{-i\theta}$. [JB'17]

শর্তগুলি: $x + 2y \leq 6,\ \ x + y \geq 4,\ \ x, y \geq 0$.

(ক) $z = x + iy$ হলে, $|z + i| = |\bar{z} + 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 4$ 4

সমাধান

ক. 12 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $x+iy=2e^{-i\theta} \Rightarrow x+iy=2(\cos\theta-i\sin\theta) \Rightarrow x+iy=2\cos\theta-2i\sin\theta$
বাস্তব ও কাল্পনিক সংখ্যাসমীকৃত করে পাই, $x=2\cos\theta$ এবং $y=-2\sin\theta$
এখন, $x^2+y^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2 \Rightarrow x^2+y^2=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \therefore x^2+y^2=4$ (প্রমাণিত)।

34. $\mathbf{z_1=2+3i, z_2=1+2i, a=p\omega^2+q+r\omega}$ **এবং** $\mathbf{b=p\omega+q+r\omega^2}$**, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলো একটি জটিল ঘনমূল।** [CB'17]

(ক) $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $\overline{Z_1-Z_2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের সাহায্যে $\mathbf{a^3+b^3=0}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $\mathbf{2p=q+r, 2q=r+p}$ **এবং** $\mathbf{2r=p+q}$. 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 08 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. দেওয়া আছে, $a=p\omega^2+q+r\omega \Rightarrow b=p\omega+q+r\omega^2$
প্রদত্ত সমীকরণ, $a^3+b^3=0 \Rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)=0$
$\Rightarrow (a+b)\{a^2+(\omega+\omega^2)ab+w^3b^2\}=0 \Rightarrow (a+b)\{a^2+\omega ab+\omega^2ab+\omega^3b^2\}=0$
$\Rightarrow (a+b)\{a(a+\omega b)+\omega^2b(a+\omega b)\}=0 \Rightarrow (a+b)(a+\omega b)(a+\omega^2b)=0$
হয়, $a+b=0 \Rightarrow p\omega^2+q+r\omega+p\omega+q+r\omega^2=0$
$\Rightarrow p(\omega+\omega^2)+2q+r(\omega+\omega^2)=0 \Rightarrow 2q-p-r=0 \therefore 2q=r+p$
অথবা, $a+\omega b=0 \Rightarrow p\omega^2+q+r\omega+p\omega^2+q\omega+r\omega^3=0$
$\Rightarrow 2p\omega^2-q\omega^2-r\omega^2=0 \Rightarrow 2p-q-r=0 \therefore 2p=q+r$
অথবা, $a+\omega^2b=0 \Rightarrow p\omega^2+q+r\omega+p\omega^3+q\omega^2+r\omega^4=0$
$\Rightarrow p\omega^2+p+q+q\omega^2+r\omega+r\omega=0 \Rightarrow p(1+\omega^2)+q(1+\omega^2)+2r\omega=0$
$\Rightarrow -p\omega-q\omega+2r\omega=0 \Rightarrow 2r-p-q=0 \therefore 2r=p+q$
সুতরাং $2p=q+r, 2q=r+p$ এবং $2r=p+q$ (প্রমাণিত)

◆ **CQ:** সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান

01. **(i)** $\mathbf{x=a+b,\ y=a\omega+b\omega^2}$ **এবং** $\mathbf{z=a\omega^2+b\omega}$
(ii) ω হলো এককের একটি জটিল ঘনমূল।

(ক) মডুলাস ও আর্গুমেন্ট বলতে কী বুঝ? 2

(খ) (i) নং থেকে দেখাও যে, $\mathbf{x^2+y^2+z^2=6ab}$ 4

(গ) (ii) থেকে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9}$ 4

সমাধান

ক. $r=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$ কে জটিল সংখ্যা $z=x+iy$ এর মডুলাস বা পরমমান বলা হয় যা সবসময় ধনাত্মক এবং $|z|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ কে বলা হয় z এর নতি বা আর্গুমেন্ট (Argument or amplitude) এবং arg z বা amp z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

খ. $L.H.S=(a+b)^2+(a\omega+b\omega^2)^2+(a\omega^2+b\omega)^2$
$=a^2+2ab+b^2+a^2\omega^2+2ab\omega^3+b^2\omega^4+a^2\omega^4+2ab\omega^3+b^2\omega^2$
$=a^2+2ab+b^2+a^2\omega^2+2ab+b^2\omega+a^2\omega+2ab+b^2\omega^2$ $[\because \omega^3=1]$
$=6ab+b^2(1+\omega+\omega^2)+a^2(1+\omega+\omega^2)=6ab$ $[\because 1+\omega+\omega^2=0]$
$=R.H.S$ **(Showed)**

গ. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2$
$=(1+\omega^3-\omega-\omega^2)^2=\left(1+1-(-1)\right)^2=3^2=9$ **(Proved)**

02. $\mathbf{z_1 = a + ib, z_2 = c + id}$ **এবং** $\mathbf{z_1 z_2 = p + iq}$

(ক) দেখাও যে, $\mathbf{x^3 - 1 = 0}$ সমীকরণের জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বিপরীত। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{(c^2 + d^2)z_1^2 - 2(ac + bd)z_1 z_2 + (a^2 + b^2)z_2^2 = 0}$ 4

(গ) $\mathbf{a = b = 1}$ হলে, $\mathbf{z_1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\sqrt[3]{1} = x$; তাহলে, $x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ অথবা, $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ একের তিনটি ঘনমূল $1, \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ । এদের মধ্যে 1 বাস্তব এবং অপর দুইটি জটিল।

$= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং $\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হলে,

$\omega . \omega^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \frac{1}{4}\{(-1)^2 - (\sqrt{-3})^2\} = \frac{1}{4}(1 + 3) = 1$

$\therefore \omega^3 = 1$; আবার, $\omega = \frac{1}{\omega^2}$ অথবা, $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$.

খ. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} \Rightarrow cz_1 + idz_1 = az_2 + ibz_2 \Rightarrow cz_1 - az_2 = i(bz_2 - dz_1)$

$\Rightarrow (cz_1 - az_2)^2 + (bz_2 - dz_1)^2 = 0$ $[\because i^2 = -1]$

$\Rightarrow c^2 z_1^2 - zacz_1 z_2 + a^2 z_2^2 + b^2 z_2^2 - 2bdz_1 z_2 + d^2 z_1^2$

$\Rightarrow (c^2 + d^2)z_1^2 - 2(ac + bd)z_1 z_2 + (a^2 + b^2)z_2^2 = 0$ **(Proved)**

গ. $a = b = 1$ হলে, $z = 1 + i$

ধরি, $\therefore \sqrt{1 + i} = x + iy$, যেখানে x ও y বাস্তব সংখ্যা

$1 + i = x^2 - y^2 + i(2xy)$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\therefore x^2 - y^2 = 1 \cdots\cdots\cdots (i)$ এবং $2xy = 1 \ldots\ldots (ii)$

এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 1 + 1 = 2$ [(i) এবং (ii) থেকে]

$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{2} \cdots\cdots\cdots (iii)$ [$\because$দুইটি বর্গের সমষ্টি ধনাত্মক]

(i) এবং (iii) সমাধান করে, $x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ এবং $y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}}$ এবং $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $x + iy = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2} + 1)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}} i\right\}$

03. $\mathbf{\sqrt[3]{a + ib} = x + iy}$ **এবং** $\mathbf{g(x) = ax^2 + bx + c}$

(ক) $\mathbf{i^3}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $\mathbf{\sqrt[3]{a - ib} = x - iy}$ 4

(গ) $\mathbf{\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = 0}$ হলে দেখাও যে, $\mathbf{a = \frac{1}{2}(b + c)}$ অথবা, $\mathbf{b = \frac{1}{2}(c + a)}$ অথবা, $\mathbf{c = \frac{1}{2}(a + b)}$ যেখানে $\boldsymbol{\omega}$ হলে এককের জটিল একটি ঘনমূল। 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 08 (খ) এর অনুরূপ।

খ. $(a + ib)^{\frac{1}{3}} = x + iy \Rightarrow a + ib = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

এখন, $a - ib = x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3) = x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + y^3 i$

$= x^3 - 3x^2.yi + 3x(yi)^2 - y^3 i^3 = (x - iy)^3 \therefore (a - ib)^{\frac{1}{3}} = x - iy$ **[Showed]**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 21 (খ) এর অনুরূপ।

04. $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n = p$ এবং $q = a + b + c$

(ক) i এর ঘনমূলগুলি নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, p এর মান 2 অথবা −1, যখন n যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য অথবা, অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা। 4

(গ) q = 0 হলে প্রমাণ কর যে, $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a + b\omega^2 + c\omega)^3 = 27abc$ [যেখানে ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল।] 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 03 (খ) এর অনুরূপ।

or $x^2 - xi - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{i\pm\sqrt{(-i)^2-4.1.(-1)}}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{-1+4}) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$

খ. এককের দুইটি জটিল মূল যথাক্রমে $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ এদের প্রথমটিকে ω ধরলে দ্বিতীয়টি ω^2 হবে।

বামপক্ষ $= \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^n + (\omega^n)^2$

যদি n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহলে, $\omega^n = 1 \therefore$ বামপক্ষ $= 1 + 1^2 = 2$

n এর মান অপর যেকোন পূর্ণসংখ্যা হলে, $\omega^n + \omega^{2n} = \omega + \omega^2 = -1$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

গ. মনেকরি, $x = a + b\omega + c\omega^2$ এবং $y = a + b\omega^2 + c\omega$

তাহলে, বামপক্ষ $= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{(x + y)^2 - 3xy\}$

এখন $x + y = a + b\omega + c\omega^2 + a + b\omega^2 + c\omega$

$= 2a + b(\omega + \omega^2) + c(\omega + \omega^2)$

$= 2a - b - c$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= 2a + a = 3a$ [$\because a + b = c = 0$]

এবং $xy = (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$

$= a^2 + ab\omega^2 + ca\omega + ab\omega + b^2\omega^3 + bc\omega^2 + ca\omega^2 + bc\omega^4 + c^2\omega^3$

$= a^2 + ab\omega^2 + ab\omega + ca\omega + ca\omega^2 + bc\omega + bc\omega^2 + b^2 + c^2$

$= a^2 + ab(\omega^2 + \omega) + ca(\omega + \omega^2) + bc(\omega + \omega^2) + b^2 + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ca - bc = a^2 + (b + c)^2 - 3bc - a(b + c)$

$= a^2 + a^2 - 3bc + a^2$ [$\because a + b + c = 0$] $= 3a^2 - 3bc$

বামপক্ষ $= 3a(9a^2 - 9a^2 + 9bc) = 27abc =$ ডানপক্ষ **(Proved)**

05. $b = 64$ এবং $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

(ক) $(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\sqrt[6]{-b}$ এর মানগুলো নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$. 4

সমাধান

ক. $(1 - \omega^2)(1 - \omega^4) = (1 - \omega^2)(1 - \omega)$ [$\because \omega^3 = 1$]

$= 1 - \omega - \omega^2 + \omega^3$

$= 2 - \omega - \omega^2 = 2 - (\omega + \omega^2)$

$= 2 + 1 = 3$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

খ. ধরি, $\sqrt[6]{-64} = a$

$\Rightarrow a^6 = -64 \Rightarrow \frac{a^6}{-64} = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{-4}\right)^3 = 1$

$\Rightarrow \frac{a^2}{-4} = 1, \omega, \omega^2$ [এককের ঘনমূল]

$\Rightarrow a^2 = -4, -4\omega, -4\omega^2 = -4, -4\omega^4, -4\omega^2$

$= 4i^2, 4\omega^4 i^2, 4\omega^2 i^2 \therefore a = \pm 2i, \pm 2i\omega, \pm 2i\omega^2$

গ. দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy \Rightarrow \left(\sqrt[3]{a+ib}\right)^3 = (x+iy)^3$
$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2.(iy) + 3x.(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$
বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,
$a = x^3 - 3xy^2 \Rightarrow \frac{a}{x} = x^2 - 3y^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3 \Rightarrow \frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$
এখন, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2 = 4(x^2 - y^2)$ $\therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ **(Showed)**

06. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 4 + 3i$ এবং $p = a - ib$
(ক) $z_1 + z_2$ জটিল সংখ্যাটির পোলার আকার নির্ণয় কর। 2
(খ) z_1z_2 এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 4
(গ) যদি $a^2 + b^2 = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = p$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, এখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা। 4

সমাধান

ক. $z_1 + z_2 = 7 + 7i$; $r = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$ এবং $\tan\theta = 1$ $\therefore \theta = 45°$
$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যার পোলার আকার, $7\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 01 (ক) এর অনুরূপ।

গ. $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib \Rightarrow \frac{2}{1+ix} = \frac{(1+a)-ib}{1}$ [সমানুপাতিকের গুণাবলি থাকে]
$\Rightarrow (1+a) - ib + (1+a)ix + bx = 2 \Rightarrow x\{b + (1+a)i\} = (1-a) + bi$
$\Rightarrow x = \frac{(1-a)+bi}{b+(1+a)i} = \frac{\{(1-a)+bi\}\{b-(1+a)i\}}{\{b+(1+a)i\}\{b-(1+a)i\}} = \frac{b-ab-(1-a^2)i+b^2i+b+a}{b^2+(1+a)^2}$
$= \frac{2b-ab+ab+(b^2-1+a^2)}{b^2+(1+a)^2} = \frac{2b}{b^2+(1+a)^2}$ $[\because a^2 + b^2 = 1]$
$= \frac{2b}{b^2+1+2a+a^2} = \frac{b}{1+a}$ $[a^2 + b^2 = 1]$
সুতরাং x এর একটি বাস্তব মান আছে যা সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

07. (i) $(1 + x + x^2)^n = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots p_{2n}x^{2n}$
(ii) জটিল সংখ্যা, $z = x + iy$
(ক) $\frac{i^{-1}-i}{2i^{-1}+i}$ এর মান নির্ণয় কর। 2
(খ) (i) থেকে প্রমাণ কর যে, $p_0 + p_3 + p_6 + \cdots = 3^{n-1}$ 4
(গ) (ii) অনুযায়ী $|z - 8| + |z + 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\frac{i^{-1}-i}{2i^{-1}+i} = \frac{-i-i}{-2i+i} = \frac{-2i}{-i} = 2$

খ. প্রদত্ত শর্তে x = 1 বসিয়ে আমরা পাই, $3^n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n \ldots.(i)$
$x = \omega$ বসিয়ে, $(1 + \omega + \omega^2)^n = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_4\omega^4 + \cdots$
$\Rightarrow 0 = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p^3 + p_4\omega + \cdots (ii)$
$x = \omega^2$ বসিয়ে, $(1 + \omega^2 + \omega^4)^n = p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega^4 + p_3\omega^6 + p_4\omega^8 + \cdots$
$\Rightarrow (1 + \omega^2 + \omega)^n = p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega + p_3 + p_4\omega^2 + \cdots (iii)$
(i), (ii) এবং (iii) যোগ করে, $3^n = 3p_0 + p_1(1 + \omega + \omega^2) + p_2(1 + \omega^2 + \omega) + 3p_3 + p_4(1 + \omega + \omega^2) + \cdots$
$\Rightarrow 3^n = 3(p_0 + p_3 + p_6 + \cdots)$ $\therefore p_0 + p_3 + p_6 \ldots\ldots.. = \frac{3^n}{3} = 3^{n-1}$

গ. বোর্ড প্রশ্ন 12 (খ) এর অনুরূপ।

অধ্যায় ০৪ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

- এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	1	1	1	5	3	3	3	6		1	1	5	1	1		2	1	1	1	2
রাজশাহী	1	2	2	1	1	1	1	6	1	1	1	1					1		1	2
চট্টগ্রাম	1	1	2	6	2	2	2	8		1	1	3					1	1	1	2
সিলেট	2	1	2	4	2	2	2	5	1	1		3							1	2
বরিশাল	2	2	1	4	2	2	2	8	1	1		4	সকল বোর্ড				1	1		3
যশোর	2	2	2	3	2	2	2	6	1	1	1	3						1		3
কুমিল্লা	2	2	2	3	2	2	2	5		1		3					1	1		3
দিনাজপুর	2	2	2	4	2	2	2	6	1	1	1	3					1	1	1	2
ময়মনসিংহ	1	2	2	4	2	2	2	6												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

আকারের সমীকরণকে বহুপদী সমীকরণ বলে। [যেখানে $a_0 \neq 0$ এবং $n \in N$]

◈ পদসমূহের মধ্যে কোন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত যত থাকে তাকে তত ঘাতের সমীকরণ বলে। সর্বোচ্চ ঘাতকে উক্ত সমীকরণের মাত্রা (Degree) বলে। n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণে n টি মূল থাকে। যেমন: $x^3 + 1 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ অর্থাৎ মাত্রা $= 3$। কিন্তু পদসমূহের মধ্যে কোন চলকের ঘাত ঋণাত্মক হলে তাকে বহুপদী সমীকরণ বলা যাবে না। যেমন: $3x^3 + \frac{4}{x^2} + 9 = 0$ বহুপদী সমীকরণ নয়।

◈ একাধিক চলক সমন্বিত কোন পদ থাকলে সে পদের ঘাত হয় উভয় চলকের ঘাতের যোগফল।

যেমন: $x^2y^2 + x^3 + y^3 = 0$ একটি চতুর্ঘাত সমীকরণ।

◈ ভাগশেষ উপপাদ্য **(Remainder Theorem):**

যদি a যেকোনো একটি ধ্রুবক হয় তবে $f(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $f(a)$ হবে।

Example: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ কে $x - 4$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ- $f(4) = 4^2 - 5.4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$

◈ উৎপাদক উপপাদ্য **(Factor Theorem):**

যদি $f(x)$ একটি বহুপদী হয় এবং $f(a) = 0$ হয়, তবে বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - a$ হবে।

Example: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$f(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$\therefore x - 2, x^2 - 5x + 6$ এর একটি উৎপাদক।

◈ বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (**Fundamental Theorem of Algebra**):
জটিল সহগযুক্ত প্রতিটি সমীকরণের অন্তত একটি জটিল মূল থাকে।

◈ n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের n সংখ্যক মূল থাকে। (Counted with multiplicity) যেমন: $a \neq 0$ হয়, তবে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি। মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

◈ মূলদ সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের একটি মূল $p + \sqrt{q}$ (যেখানে, p মূলদ আর $\sqrt{q}$ অমূলদ) হলে অপর আরেকটি মূল হবে। $p - \sqrt{q}$

◈ বাস্তব সহগবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণের একটি মূল জটিল হলে অপর মূলটি অনুবন্ধী জটিল হবে।
যেমন: একটি মূল $p + iq$ হলে অপরটি হবে $p - iq$ ।

◈ নিশ্চায়ক: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল হল, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; যেখানে $b^2 - 4ac$ কে প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক বা নিশ্চায়ক বলে। একে D দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore D = b^2 - 4ac.$

Case-01: $D > 0$ হলে সমীকরণের 2 টি বাস্তব ও অসমান মূল বিদ্যমান।

Example: (i) $x^2 - 5x + 4 = 0$;এখানে $a = 1, b = -5, c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$

এখানে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1} = 4, 1$; অর্থাৎ, মূলগুলো বাস্তব ও অসমান

Case-02: $D = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান এবং $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ।

Example: (i) $x^2 + 4x + 4 = 0$; $D = (4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$

এখানে, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\times1\times4}}{2\times1} = -2, -2$; অর্থাৎ, মূলগুলো বাস্তব ও সমান।

আমরা জানি, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$। নিশ্চায়কে $-b$ এর পর $\pm$ থাকার কারণে আমরা দুইটি ভিন্ন মূল পাই। কিন্তু এখানে $b^2 - 4ac = 0$ হয়ে গেলে লবে $-b \pm 0 = -b$ হয়, যার জন্য মূল দুইটি সমান হয়ে যায়। আবার, দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, রাশিটি পূর্ণবর্গ হয়।
যেমন: $x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় 2, 2।
এখানে, $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2.2.x + 2^2 = (x + 2)^2$।
অর্থাৎ, নিশ্চায়ক শূন্য হলে রাশিটি পূর্ণবর্গ হয়।

Case-03: Case 1 ও Case 2 এর ক্ষেত্রে, $D \geq 0$ এবং D পূর্ণবর্গ হলে মূলগুলো মূলদ হবে; যদি a, b ও c মূলদ সংখ্যা হয়।

Category: 01

$D > 0$ ও D পূর্ণবর্গ হলে মূলগুলো মূলদ; যখন a, b, c মূলদ সংখ্যা।

Example: (i) $x^2 - 5x + 4 = 0$; a, b ও c মূলদ।

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$; যা পূর্ণবর্গ।

এখানে, $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2\times1} = 4, 1$; অর্থাৎ, মূলগুলো বাস্তব, মূলদ ও অসমান।

[∵ '$\sqrt{}$' এর মধ্যে পূর্ণবর্গ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা আছে তাই '$\sqrt{}$' চলে যায়। ফলে মূলগুলো মূলদ হয়।]

Category: 02

$D = 0$ হলে মূলগুলো মূলদ যখন a, b, c মূলদ সংখ্যা।

Example: (i) $x^2 - 4x + 4 = 0$; a, b ও c মূলদ।

$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$

এখানে, $x = \frac{-(-4) \pm 0}{2\times1} = 2,\ 2$; অর্থাৎ, মূলগুলো বাস্তব, সমান ও মূলদ। [উল্লেখ্য যে, 0 কিন্তু পূর্ণবর্গ সংখ্যা]

Category: 03

$D \geq 0$ এবং পূর্ণবর্গ, কিন্তু a, b ও c অমূলদ হলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অমূলদ হবে।

Example: (i) $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0; D = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$

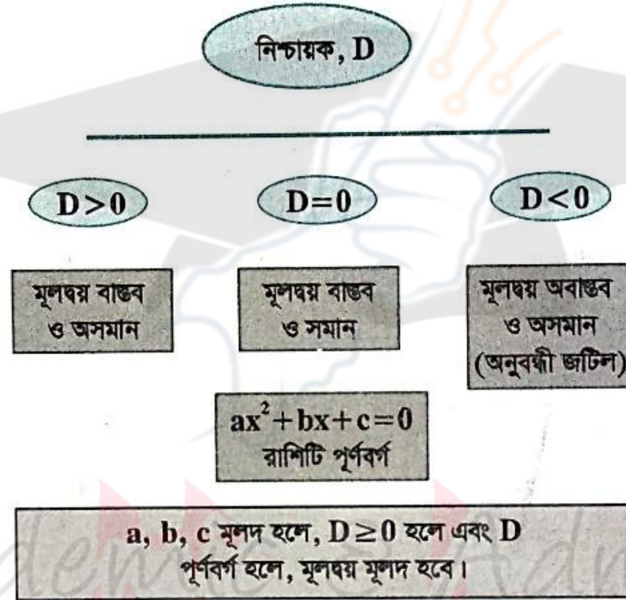
এখানে, $x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{0}}{2\times1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; অর্থাৎ, মূলগুলো বাস্তব, সমান ও অমূলদ।

অনুরূপভাবে $D > 0$ এবং পূর্ণবর্গ কিন্তু a, b ও c অমূলদ হলে মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

Case-04: $D < 0$ হলে মূলদ্বয় অবাস্তব, অসমান ও অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে।

Example: (i) $x^2 + x + 1 = 0; D = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

এখানে, $x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$; অর্থাৎ, মূলদ্বয় অবাস্তব, অসমান এবং অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।



◈ প্রতিসম রাশিমালা (**Symmetric Expression**): একাধিক চলকবিশিষ্ট রাশিমালার চলক দুটিকে পরস্পর স্থান পরিবর্তন করালে রাশিমালাটি যদি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম রাশিমালা বলে। যেমন: $\alpha + \beta, \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ রাশিমালাগুলো প্রতিসম।

প্রতিসম রাশি Σ দিয়ে প্রকাশ করা যায় । যেমন: $\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ [ত্রিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে]

আবার, $\Sigma\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha + \alpha\gamma + \beta\delta$ [চতুর্ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে]

সমীকরণের ঘাত যদি আরও বড় হয় তবে $\Sigma\alpha\beta$ এর মান নির্ণয় করা কষ্টকর হয়ে পড়বে। সেক্ষেত্রে সমাবেশের সূত্র ব্যবহার করা যায়। যেমন: ত্রিঘাত সমীকরণের তিনটি মূল (α, β, γ) হলে $\Sigma\alpha\beta =$ অর্থাৎ (α, β, γ) থেকে প্রতিবার 2 টি করে নিয়ে যে রাশিগুলো তৈরি হয় তাদের যোগফল = $^3C_2$ সংখ্যক রাশি (অর্থাৎ 3 টি) = $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ এবং $\Sigma\alpha^2 =$ অর্থাৎ (α, β, γ) থেকে একটি করে মূল নিয়ে বর্গ করলে যে রাশিগুলো তৈরি হয় তাদের যোগফল। $^3C_1$ সংখ্যক রাশি = $\alpha2 + \beta2 + \gamma2$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

➲ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে, [দ্বিঘাত সমীকরণের মূল 2 টি]

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

➲ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে [ত্রিঘাত সমীকরণের মূল 3টি]

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}; \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}; \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ এর মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে [চতুর্ঘাত সমীকরণের মূল 4টি]
  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} \rightarrow$ 4টি থেকে 1টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_1 = 4$টি] যোগফল $= -\frac{b}{a}$
  $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a} \rightarrow$ 4টি থেকে 2টি করে নিয়ে সকল সমাবেশের [$^4C_2 = 6$টি] যোগফল $= \frac{c}{a}$
  $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a} \rightarrow$ 4টি থেকে 3টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_3 = 4$টি] যোগফল $= -\frac{d}{a}$
  $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a} \rightarrow$ 4টি থেকে 4টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_4 = 1$টি] যোগফল $= \frac{e}{a}$
- অনুরূপভাবে n ঘাতের একটি বহুপদী সমীকরণের n সংখ্যক মূল থাকে।
  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots\cdots\cdots + a_n = 0$
  এর মূলগুলো $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots\cdots \alpha_n$ হলে
  (a) $\sum \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0} = (-1)^1 \frac{a_1}{a_0}$ [nটি মূল হতে 1 টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ ($^nC_1 = n$টি) হয় তাদের যোগফল $= (-1)^1 \frac{a_1}{a_0}$]
  (b) $\sum \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} = (-1)^2 \frac{a_2}{a_1}$ [nটি মূল হতে 2 টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ ($^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$টি) হয় তাদের যোগফল $= (-1)^2 \frac{a_2}{a_0}$]
  (c) $\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0} = (-1)^3 \frac{a_3}{a_0}$ [nটি মূল হতে 3 টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ ($^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$টি) হয় তাদের যোগফল $= (-1)^3 \frac{a_3}{a_0}$]
  (d) $\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots\cdots\cdots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ [nটি মূল হতে n টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ ($^nC_n = 1$টি) হয় তাদের যোগফল $= (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$]
- a, b, c সমান্তর প্রগমনে থাকবে যদি, $b - a = c - b \Rightarrow \boxed{a + c = 2b}$ হয়।
- a, b, c গুণোত্তর প্রগমনে থাকবে যদি, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{ac = b^2}$ হয়।
- a, b, c বিপরীত/হারমোনিক/প্রগমনে থাকবে যদি, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ অর্থাৎ, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}}$ হয়।
- α, β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ বা $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$
- α, β, γ মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমকরণ, $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$
- $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের দুটি মূল সাধারণ হওয়ার শর্ত, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
- 1টি মূল সাধারণ হওয়ার শর্ত, $(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - a_1c_2)^2$

সহজে মনে রাখার কৌশল

- $x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow (x-2)(x-3) = 0$
  $x^2 - 6x + 8 = 0 \longrightarrow (x-2)(x-4) = 0$ } এখান থেকে বলা যায় সাধারণ মূল 2

কিন্তু 2টি সমীকরণ দেওয়া থাকলে যদি তাদের সাধারণ মূল থাকে তাহলে তা নির্ণয়ের সহজ উপায় হলো সমীকরণদ্বয় বিয়োগ করে দেওয়া (x^2 এর সহগ একই রেখে)

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(-)\quad(+)\quad(-)$$
$$x - 2 = 0$$

$\therefore \boxed{x = 2} \leftarrow$ সাধারণ মূল= 2

[বি. দ্র.: 2টি সমীকরণের সাধারণ মূল না থাকলেও বিয়োগ করলে x এর একটি মান আসবে। কিন্তু সেটা উক্ত সমীকরণদ্বয়ের একটিরও মূল নয়। তাই 2টি সমীকরণ বিয়োগ করে x এর প্রাপ্ত মানটিকে যেকোন একটি সমীকরণে বসিয়ে দিতে হবে L.S = R.S হলে ঐটাই সাধারণ মূল।]

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

MCQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $3x^3 - 1 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = ?$ [DB, BB'22]

(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1

সমাধান: (d); $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ এবং $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}$; প্রদত্ত রাশি $= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma = 0 + 3 \times \frac{1}{3} = 1$

02. কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2+i}$ হলে সমীকরণটি হবে [DB'22]

(a) $9x^2 - 12x + 5 = 0$ (b) $5x^2 - 4x + 1 = 0$
(c) $5x^2 + 4x + 1 = 0$ (d) $25x^2 - 20x + 3 = 0$

সমাধান: (b); মূল: $\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$;
$\therefore$ অন্য মূল $= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ $\therefore$ সমীকরণ,
$x^2 - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)x + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) = 0$
$\Rightarrow x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 4x + 1 = 0$

Or, (Use Calculator)

03. $x^2 - kx + 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 3 হলে [DB'22]

(i) অপর মূল $\frac{2}{3}$ (ii) k এর মান $\frac{11}{3}$
(iii) প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক $= 7$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); (i) $\therefore$ অন্য মূল $= \frac{2}{3}$ **[Use Calculator]**
(ii) $3^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{11}{3}$
(iii) নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = \left(-\frac{11}{3}\right)^2 - 4.1.2 = \frac{49}{9}$

04. $(p^2 - 4)x^2 + 4px + (4p + 1) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর গৌণিক বিপরীত হলে p এর মান কত? [DB'22]

(a) $-1, 5$ (b) $1, 5$ (c) $-2, -2$ (d) $-3, 1$

সমাধান: (a); মূলদ্বয়, α ও $\frac{1}{\alpha}$ $\therefore \frac{4P+1}{P^2-4} = \alpha.\frac{1}{\alpha} = 1$
$\Rightarrow 4P + 1 = P^2 - 4$
$\Rightarrow P^2 - 4P - 5 = 0 \therefore P = -1, 5$

05. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-p} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে- [DB'22]

(i) $\alpha + \beta = p$ (ii) $\alpha\beta = pq$ (iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-p} = \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{x-p-x}{x(x-p)} = \frac{1}{q}$
$\Rightarrow x^2 - px = -pq \Rightarrow x^2 - px + pq = 0$
(i) $\alpha + \beta = p$ (ii) $\alpha\beta = pq$
(iii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}$

06. $5x^3 - 3x + 2 = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে $\alpha + \beta + \gamma = ?$ [Ctg.B'22] [Ans: c]

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{2}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{3}{5}$

07. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল শূন্য হবে যখন– [Ctg.B'22] [Ans: c]

(a) $a = 0$ (b) $b = 0$
(c) $c = 0$ (d) $b = c = 0$

08. $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ সমীকরণের [Ctg.B'22]

(i) একটি মূল 2 (ii) দুইটি মূল অমূলদ
(iii) মূলত্রয়ের গুণফল 4

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); **(i) Use Calculator**
(ii) Use Calculator (iii) $\alpha\beta\gamma = -\frac{4}{1} = -4$

09. $x^2 - 5x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়– [Ctg.B'22] [Ans: b]

(a) বাস্তব ও সমান (b) বাস্তব ও অসমান
(c) অমূলদ (d) জটিল

10. $x^2 - 8x + c = 0$ এর মূলদ্বয়– [RB'22] [Ans: b]

(i) সমান হবে যদি $c = 8$ হয়
(ii) জটিল হবে যদি $c > 16$ হয়
(iii) বাস্তব হবে যদি $c \leq 16$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

11. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি নয়? [SB'22] [Ans: d]

(a) $ax^2 + 2hxy + by^2$
(b) $2x^2 + 3xy + y^2$
(c) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$
(d) $2x^2 + \frac{3y}{x} + y^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ

12. সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? [SB'22; RB, SB, BB'21] [Ans: c]

(a) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান (b) মূলদ্বয় অমূলদ
(c) মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান (d) মূলদ্বয় জটিল

13. $\gamma > \delta$ হলে, $\gamma - \delta =$ কত? [SB'22]
(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5
সমাধান: (a); মূলদ্বয় 3 ও 2
$\therefore \gamma - \delta = 3 - 2 = 1$ **[Use Calculator]**

14. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের উভয় মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত— [SB, JB'22] [Ans: d]
(a) $a_1b_2 = a_2b_1$
(b) $(a_1b_2 - a_2b_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$
(c) $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$
(d) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

15. $\sqrt{-5} - 1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি? [BB'22]
(a) $x^2 + 2x + 6 = 0$ (b) $x^2 + x + 3 = 0$
(c) $x^2 + 2x - 6 = 0$ (d) $x^2 + x - 3 = 0$
সমাধান: (a); $x^2 - x\{(\sqrt{5}i - 1) + (-1 - \sqrt{5}i)\} + (-1 + \sqrt{5}i)(-1 - \sqrt{5}i) = 0$
$\Rightarrow x^2 - x(-2) + (-1)^2 - (\sqrt{5}i)^2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 6 = 0$

16. p এর কীরূপ মানের জন্য $x^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে? [BB'22]
(a) $-2 \le p \le 2$ (b) $-4 < p \le 4$
(c) $-2 < p < 2$ (d) $-4 \le p < 4$
সমাধান: (c); $P^2 - 4.1 < 0 \Rightarrow P^2 < 4$
$\Rightarrow -2 < P < 2$

17. $x^2 - 2x + 4 = 0$ সমীকরণটির – [BB'22]
(i) মূলদ্বয়ের যোগফল $= 3$ (ii) মূলদ্বয়ের গুণফল $= 4$
(iii) মূলগুল জটিল সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, ii
সমাধান: (b); $\alpha + \beta = 2$ (i) নং ভুল

18. $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে যদি- [JB'22]
(a) $K > 6$ (b) $K < 6$ (c) $K = \pm 6i$ (d) $K = \pm 6$
সমাধান: (d); $P(x) = 0 \Rightarrow x^2 - kx + 9 = 0$
$\therefore k^2 - 9 \times 4 = 0 \Rightarrow k = \pm 6$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 5x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

19. k এর মান কত হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে? [CB'22] [Ans: b]
(a) $k = 4$ (b) $k = \frac{25}{4}$ (c) $k < \frac{25}{4}$ (d) $k > \frac{25}{4}$

20. $k = 6$ হলে $\alpha + 2, \beta + 2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি? [CB'22] [Ans: a]
(a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (b) $x^2 + 9x + 20 = 0$
(c) $x^2 + 9x - 20 = 0$ (d) $x^2 - 9x - 20 = 0$

21. $x^3 - \frac{1}{3}x - 15 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে– [CB'22] [Ans: d]
i) $\sum\alpha = 0$ ii) $\sum\alpha\beta = -\frac{1}{3}$ iii) $\alpha\beta\gamma = 15$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii

22. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি? [Din.B'22] [Ans: d]
(a) $x^{-2} + x^{-3}$ (b) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ (c) $x^{\frac{1}{4}}$ (d) x

23. কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হলে পৃথায়ক হবে- [Din.B'22] [Ans: a]
(i) পূর্ণবর্গ (ii) ধনাত্মক সংখ্যা (iii) ঋণাত্মক সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (c) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β

24. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান- [Din.B'22]
(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) 5 (d) -5
সমাধান: (c); $\alpha + \beta = \frac{5}{3}$ এবং $\alpha\beta = \frac{1}{3}$
$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5$

25. α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ- [Din.B'22]
(a) $9x^2 + 19x + 1 = 0$ (b) $9x^2 - 19x + 1 = 0$
(c) $9x^2 + 19x - 1 = 0$ (d) $9x^2 - 19x - 1 = 0$
সমাধান: (b); $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{19}{9}$
$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \frac{1}{9} \therefore x^2 - \frac{19}{9}x + \frac{1}{9} = 0$
$\Rightarrow 9x^2 - 19x + 1 = 0$

26. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\sum\alpha^2$ এর মান কত? [MB'22] [Ans: b]
(a) -3 (b) -1 (c) 0 (d) 1

27. বাস্তব সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ হলে অপর মূল কোনটি? [MB'22; All.B'18]
(a) $\sqrt{2} + 1$ (b) $-\sqrt{2} - 1$
(c) $\sqrt{2} - 1$ (d) $-\sqrt{2} + 1$
সমাধান: (b); একটি মূল $= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$
$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1 \therefore$ অন্য মূলটি হবে $= -\sqrt{2} - 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x - x^2 + k = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

28. সমীকরণটির একটি উৎপাদক $x + 3$ হলে k এর মান কত? [MB'22] [Ans: d]
(a) -15 (b) -3 (c) 3 (d) 15
সমাধান: (d); $x + 3 = 0 \therefore x = -3$
অথবা, $-6 - 9 + k = 0 \Rightarrow k = 15$

29. সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হলে- [Ctg.B, MB'22] [Ans: b]
(a) $k \le -1$ (b) $k \ge -1$ (c) $k < -1$ (d) $k > -1$
সমাধান: (b); $2^2 - 4(-1).k \ge 0$
$\Rightarrow 4 + 4k \ge 0 \Rightarrow k \ge -1$

30. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর প্রকৃতি – [Ctg.B'22; DB'21]
(a) বাস্তব ও সমান (b) বাস্তব ও অসমান
(c) অবাস্তব ও অসমান (d) অবাস্তব ও সমান
সমাধান: (c); $D = 1^2 - 4.1.1 = -3 < 0$
$\therefore$ মূল অবাস্তব ও অসমান।

31. $x^2 - 4x + k = 0$ সমীকরণের একটি মূল 3 হলে অন্যটি- [DB'21]
(a) 1 (b) 3 (c) -3 (d) -4
সমাধান: (a); $3 + \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β।

32. $\sum\alpha^2$ এর মান কোনটি? [DB'21]
(a) $\frac{67}{49}$ (b) $\frac{11}{7}$ (c) $\frac{-59}{49}$ (d) $\frac{-17}{49}$
সমাধান: (a); $\alpha + \beta = \frac{5}{7}; \alpha\beta = \frac{-3}{7}$
$\sum\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$= \left(\frac{5}{7}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{25}{49} + \frac{6}{7} = \frac{25+42}{49} = \frac{67}{49}$

33. $\alpha + \beta$ ও $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [DB'21]
(a) $49x^2 - 56x - 15 = 0$
(b) $49x^2 - 56x + 15 = 0$
(c) $49x^2 - 14x - 15 = 0$
(d) $49x^2 - 14x + 15 = 0$
সমাধান: (c);$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$
$(A + \beta)\alpha\beta = \frac{5}{7} \times \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{-15}{49}$ $\therefore$ সমীকরণ,
$x^2 - \frac{2}{7}x - \frac{15}{49} = 0 \Rightarrow 49x^2 - 14x - 15 = 0$

34. দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চায়ক ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা হলে মূলগুলো হবে- [DB'21] [Ans: b]
(a) অবাস্তব ও মূলদ (b) বাস্তব ও মূলদ
(c) বাস্তব ও অমূলদ (d) অবাস্তব ও অমূলদ

35. $-i + 2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [DB'21]
(a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (b) $x^2 + 4x + 3 = 0$
(c) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (d) $x^2 - 4x + 5 = 0$
সমাধান: (d); $x = -i + 2 \Rightarrow x - 2 = -i$
$\Rightarrow (x - 2)^2 = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -1$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

36. a এর কোন মানের জন্য $ax^2 - x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? [RB'21]
(a) $\frac{1}{16}$ (b) $-\frac{1}{16}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$
সমাধান: (a); $1 - 16a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{16}$

37. $x^2 - 2x - 3 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 3 হলে অপর মূল কোনটি? [RB, Ctg.B'21]
(a) -1 (b) -2 (c) -3 (d) -5
সমাধান: (a); $3 \times \alpha = -3 \therefore \alpha = -1$

38. $3x^2 - 9x - 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল কত? [RB'21]
(a) -9 (b) $\frac{-5}{3}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 3
সমাধান: (d); যোগফল $= -\left(\frac{-9}{3}\right) = 3$

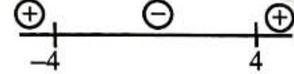
39. $2 + 3i$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি? [RB, BB'21]
(a) $x^2 + 4x + 13 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 13 = 0$
(c) $x^2 + 4x - 13 = 0$ (d) $x^2 - 4x - 13 = 0$
সমাধান: (b); $x = 2 + 3i \Rightarrow x - 2 = 3i$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -9 \Rightarrow x^2 - 4x + 13 = 0$

40. $2x^3 - 4x^2 + 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum\alpha\beta$ এর মান কোনটি? [RB'21; JB'17]
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6
সমাধান: (b); $\sum\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = 1 + 3x - 2x^2$.

41. f এর গরিষ্ঠ মান কত? [Ctg.B'21; DB'19]
(a) $-\frac{17}{8}$ (b) $-\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{17}{8}$
সমাধান: (d); $f(x) = 1 + 3x - 2x^2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 4x = 0 \therefore x = \frac{3}{4}$
$\therefore$ গরিষ্ঠ মান $= f\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + 3 \times \frac{3}{4} - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$
$= 1 + \frac{9}{4} - 2 \times \frac{9}{16} = 1 + \frac{9}{4} - \frac{9}{8} = \frac{8+18-9}{8} = \frac{17}{8}$

42. $f(x) = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে $-\alpha$ ও $-\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি? [Ctg.B'21]
(a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (b) $2x^2 + 3x - 1 = 0$
(c) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (d) $2x^2 + 3x + 1 = 0$
সমাধান: (b); $f(x) = 0$ এর মূল α হলে,
$f(\alpha) = 1 + 3\alpha - 2\alpha^2 = 0$
নতুন সমীকরণে, $x = -\alpha \Rightarrow \alpha = -x$
$\therefore 1 + 3(-x) - 2(-x)^2 = 0 \Rightarrow 1 - 3x - 2x^2 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$

43. $2x^2 - kx + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে k এর মান কত? [Ctg.B'21]
(a) $(-4, 4)$ (b) $(-4, 4]$
(c) $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ (d) $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$
সমাধান: (c); $2x^2 - kx + 2 = 0$; $D > 0$
$\Rightarrow (-k)^2 - 4.2.2 > 0 \Rightarrow (k+4)(k-4) > 0$


$\therefore k < -4$ or $k > 4 \therefore k \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

44. $2x^2 - px + 8$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হলে p এর মান কত? [Ctg.B'21]
(a) $\pm 2\sqrt{2}$ (b) ± 4 (c) $\pm 4\sqrt{2}$ (d) ± 8
সমাধান: (d); $(-p)^2 - 4.2.8 = 0 \Rightarrow p^2 = 64$
$\therefore p = \pm 8$

45. $x^3 - 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হলে $\sum a$ এর মান কত হবে? [JB'22; Ctg.B'21]
(a) −4 (b) −3 (c) 0 (d) 4
সমাধান: (c); $x^3 - 4x + 3 = 0$ এর মূল a, b, c হলে,
$a + b + c = 0 \therefore \sum a = 0$

46. যদি $x^2 + x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয় তবে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান কত? [Ctg.B, SB, BB'21]
(a) −1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2
সমাধান: (b); $x^2 + x + 2 = 0; \alpha + \beta = -1$
$\alpha\beta = 2; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-1}{2}$

47. $3x^2 - px + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির তিনগুণ হলে p এর মান কত? [Ctg.B'21]
(a) ± 3 (b) $\pm 2\sqrt{2}$ (c) ± 6 (d) ± 8
সমাধান: (d); $\alpha.3\alpha = \frac{4}{3} \therefore \alpha^2 = \frac{4}{9} \therefore \alpha = \pm\frac{2}{3}$
$\alpha + 3\alpha = \frac{p}{3} \Rightarrow 4\left(\pm\frac{2}{3}\right) = \frac{p}{3} \Rightarrow p = \pm 8$

48. $mx^2 - x + n = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত? (যেখানে $m \neq 0$) [SB'21]
(a) $\frac{2mn-1}{m^2}$ (b) $\frac{1-2mn}{m^2}$ (c) $\frac{2n-1}{m^2}$ (d) $\frac{1-2n}{m^2}$
সমাধান: (b); মূল $\alpha, \beta \therefore \alpha + \beta = \frac{1}{m}; \alpha\beta = \frac{n}{m}$
$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2\frac{n}{m}$
$\Rightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2n}{m} = \frac{1-2mn}{m^2}$

49. $2x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 1 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [SB'21]
(a) $2x^2 - x + 4 = 0$ (b) $2x^2 + x + 6 = 0$
(c) $2x^2 - x - 6 = 0$ (d) $2x^2 + 9x + 4 = 0$
সমাধান: (c); $2x^2 - 5x - 3 = 0$ এর মূলদ্বয় $3, -\frac{1}{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - \left(2 - \frac{3}{2}\right)x - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 - \frac{x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$
বিকল্প: $2(x+1)^2 - 5(x+1) - 3 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4x^2 + kx + 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 2.

50. k এর মান কত? [SB'21]
(a) −5 (b) −18 (c) −9 (d) −10
সমাধান: (c); $16 + 2k + 2 \Rightarrow 2k = -18 \Rightarrow k = -9$

51. $6x^3 + 3x^2 + 2 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণটির মূলত্রয় a, b ও c হলে $\sum a^2b^2$ এর মান কোনটি? [SB'21]
(a) $-\frac{1}{3}$ (b) 3 (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$
সমাধান: (a); $\sum a^2b^2 = (\sum ab)^2 - 2abc(\sum a)$
$= 0 - 2.\left(-\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$
$\left[\sum a = -\frac{1}{2}; \sum ab = 0; \sum abc = -\frac{1}{3}\right]$

52. $2 + i$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? [BB'21; CB'17]
(a) $x^2 - 4x + 5 = 0$ (b) $x^2 + 4x - 3 = 0$
(c) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (d) $x^2 + 4x - 5 = 0$
সমাধান: (a); $x = 2 + i \Rightarrow (x-2)^2 = i^2$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -1 \therefore x^2 - 4x + 5 = 0$

53. $x^3 - 2x^2 + 4 = 0$ এর মূলগুলো p, q, r হলে pqr এর মান– [BB'21]
(a) −2 (b) −4 (c) 2 (d) 4
সমাধান: (b); $pqr = -\frac{d}{a}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + 2x - p = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

54. সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল 4 হলে p এর মান কত? [BB'21]
(a) 4 (b) 2 (c) −4 (d) −2
সমাধান: (c); $\alpha\beta = -P = 4 \Rightarrow p = -4$

55. সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে মূলদ্বয় কত? [BB'21]
(a) $\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}$ (b) $\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}$ (c) $\frac{-4}{3}, \frac{2}{3}$ (d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$
সমাধান: (b); $\alpha + 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}; 2\alpha = -\frac{4}{3}$

56. k এর মান কত হলে $kx^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে? [JB'21]
(a) $k > 4$ (b) $k < 4$ (c) $k > 1$ (d) $k > 16$
সমাধান: (c); $4^2 - 4.k.4 < 1$ অর্থাৎ $k > 1$

57. কী শর্তে $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের সমষ্টি শূন্য হবে? [JB'21]
(a) $pr = q$ (b) $pq + r = 0$
(c) $qr = p$ (d) $r = p$
সমাধান: (b); শর্তমতে, $\alpha, -\alpha, \beta$ ৩ টি মূল $\therefore \beta = -p$
$\therefore -p^3 + p.p^2 - pq - r = 0 \Rightarrow pq + r = 0$

58. $x^2 - 5x + 6 = 0$ এবং $x^2 + x - 12 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের– [JB'21]
(i) প্রতিটির মূলদ্বয় মূলদ (ii) সাধারণ মূল 3
(iii) প্রথম সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি 5
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); স্পষ্টত (iii) সঠিক। আবার, $3^2 - 5.3 + 6 = 0$; $3^2 + 3 - 12 = 0$, অর্থাৎ (ii) সঠিক।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় α^{-1} ও β^{-1} হলে–

59. $(\alpha - \beta)$ এর মান কত? [JB'21]
(a) 1 (b) $\sqrt{3}i$ (c) -1 (d) $1 + 3i$
সমাধান: (b); $\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = -1 \therefore \alpha + \beta = -1; \alpha\beta = 1$
$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-1)^2 - 4.1$
$= -3$ $\alpha - \beta = \pm\sqrt{3}i$

60. α এর মান কত? [JB'21]
(a) $1 - i$ (b) $1 + i$
(c) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (d) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
সমাধান: (c); '10' থেকে $\alpha + \beta = -1$
$\alpha - \beta = \pm\sqrt{3}i \therefore \alpha = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$

61. x এর মান বাস্তব হলে $-4x^2 + 4ax + b^2$ এর সর্বোচ্চ মান– [JB'21]
(a) $a^2 + b^2$ (b) $a + b$ (c) $a^2 - b^2$ (d) $a - b$
সমাধান: (a); $-(4x^2 - 4ax - b^2)$
$= -\{(2x - a)^2 - a^2 - b^2\} \Rightarrow a^2 + b^2 - (2x - a)^2$
[$(2x - a)^2$ এর সর্বনিম্ন মান 0]
$\therefore$ max value $= a^2 + b^2$

62. $x^2 - 7x + p = 0$ সমীকরণের একটি মূল -4 হলে, p এর মান কত? [CB'21]
(a) -66 (b) -44 (c) 44 (d) 60
সমাধান: (b); $(-4)^2 - 7(-4) + p = 0 \therefore p = -44$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$5x^2 - 7x - 3 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β.

63. কোন সমীকরণের মূল $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$? [CB'21]
(a) $25x^2 - 20x - 21 = 0$
(b) $25x^2 - 20x + 21 = 0$
(c) $25x^2 + 20x - 21 = 0$
(d) $25x^2 + 20x + 21 = 0$
সমাধান: (a); $\alpha + \beta = \frac{7}{5}; \alpha\beta = -\frac{3}{5}$
$\therefore$ সমীকরণ $x^2 - \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{5}\right)x + \frac{7}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) = 0$
বা, $25x^2 - 20x - 21 = 0$

64. α - এর মান কত (যদি $\alpha > \beta$ হয়)? [CB'21]
(a) $-\frac{1}{10}(7 + \sqrt{109})$ (b) $\frac{1}{10}(-7 + \sqrt{109})$
(c) $\frac{1}{10}(7 - \sqrt{109})$ (d) $\frac{1}{10}(7 + \sqrt{109})$
সমাধান: (d); $\alpha = \frac{7+\sqrt{49-4\times5\times(-3)}}{2\times5} = \frac{1}{10}(7 + \sqrt{109})$

65. $4x^2 + 4x - 1 = 0$ সমীকরণে- [CB'21]
(i) মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান (ii) একটি মূল $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
(iii) মূলদ্বয় জটিল ও অসমান
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i ও ii (b) ii ও iii (c) i ও iii (d) i, ii ও iii
সমাধান: (a); মূলদ্বয় $\frac{-4\pm\sqrt{16+1}}{8} = \frac{\pm\sqrt{2}-1}{2}$

66. k-এর কোন মানের জন্য $(k - 1)x^2 - (k + 2)x + 4$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? [CB'21]
(a) $(-10, 2)$ (b) $(10, -2)$
(c) $(2, 10)$ (d) $(-2, -10)$
সমাধান: (c); $(k + 2)^2 = 4 \times 4 \times (k - 1)$
বা, $k^2 + 4k + 4 = 16k - 16$
বা, $k^2 - 12k + 20 = 0$ বা, $(k - 10)(k - 2) = 0$

67. $\sqrt{3} - 1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? [Din.B'21]
(a) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (b) $x^2 + 2x - 2 = 0$
(c) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ (d) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0$
সমাধান: (b); $x = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{3}$
$(x + 1)^2 = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 3$
$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

68. দ্বিঘাত সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব হবে যদি- [Din.B'21] [Ans: a]
(i) পৃথায়ক শূন্য হয় (ii) পৃথায়ক ধনাত্মক হয়
(iii) পৃথায়ক ঋণাত্মক হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

69. $x^2 + 5x - 7 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো- [Din.B'21; DB, Ctg.B, SB'19]
(a) বাস্তব ও মূলদ (b) বাস্তব ও অমূলদ
(c) জটিল (d) বাস্তব ও সমান
সমাধান: (b); $D = 25 - 4.1(-7) = 53$ যা পূর্ণবর্গ নয়।

70. $2x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর গুণাত্মক বিপরীত হলে c এর মান কত? [Din.B'21]
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) 2
সমাধান: (d); $\frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$

71. $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয়ের সমষ্টি কত? [Din.B'21]
(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) 2
সমাধান: (b); $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

72. $x^3 - px^2 + q = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে $\sum\alpha^2$ এর মান কত? [Din.B'21]
(a) p^2 (b) $p^2 - 2q$ (c) $-p^2$ (d) $-q$
সমাধান: (a); $\sum\alpha^2 = (\sum\alpha)^2 - 2\sum\alpha\beta$
$= p^2 - 2 \times 0 = p^2$

73. k এর মান কত হলে $x^2 + (2k + 4)x + 8k + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হয়? [MB'21]
(a) $-3, -1$ (b) $0, 3$ (c) $-1, 3$ (d) $1, 3$
সমাধান: (d); শর্তমতে, $(2k + 4)^2 = 32k + 4$
$\Rightarrow 4k^2 + 16k + 16 = 32k + 4$
$\Rightarrow 4k^2 - 16k + 12 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0$
$\Rightarrow (k - 3)(k - 1) = 0 \therefore k = 1,3$

74. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে c এর মান- [MB'21]
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8
সমাধান: (b); মূলদ্বয় $n, (n + 1)$; $2n + 1 = 5$
$\Rightarrow n = 2 \therefore c = n(n + 1)c = 2 \times 3 = 6$

75. $x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি- [MB'21]
(a) $6x^2 - 3x + 1 = 0$ (b) $5x^2 + 3x - 1 = 0$
(c) $5x^2 - 3x + 1 = 0$ (d) $3x^2 - 5x + 1 = 0$
সমাধান: (c); $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5 = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 + 5x^2$
$= 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x + 1 = 0$

76. $1 - \sqrt{-1}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি- [MB'21]
(a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ (b) $x^2 + 2x - 2 = 0$
(c) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (d) $x^2 + 2x + 2 = 0$
সমাধান: (a); $x = 1 - i \Rightarrow x - 1 = -i$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

77. $x^3 + 2x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c হলে $\sum a$ এর মান- [MB'21]
(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) 3
সমাধান: (b); যেহেতু, x^2 এর সহগ 0

78. $x^2 + 4x + 16 = 0$ সমীকরণের- [MB'21]
(i) মূলদ্বয় জটিল (ii) মূলদ্বয়ের যোগফল -4
(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল 16
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $b^2 - 4ac = -48 \therefore$ মূলদ্বয় জটিল

79. $x^3 - bx^2 + cx - a = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নিচের কোনটি? [DB'19]
(a) $-x^3 + bx^2 - cx + a = 0$
(b) $ax^3 + cx^2 - bx + 1 = 0$
(c) $x^3 + bx^2 + cx + a = 0$
(d) $ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$
সমাধান: (d); $\left(\frac{1}{x}\right)^3 - b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x}\right) - a = 0$
$\Rightarrow 1 - bx + cx^2 - ax^3 = 0$
$\Rightarrow ax^3 - cx^2 + bx - 1 = 0$

80. $\sqrt{3} + 2$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি? [DB'19]
(a) $x^2 - x + 4 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 1 = 0$
(c) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ (d) $x^2 + x + 2\sqrt{3} = 0$
সমাধান: (b); অপর মূল $2 - \sqrt{3}$; মূলদ্বয়ের যোগফল $= 4$, গুণফল $= 1$ $\therefore$ সমীকরণ $x^2 - 4x + 1 = 0$
[Note: 'গ' এর সমীকরণেও $2 + \sqrt{3}$ মূল আছে। তবে 'খ' অধিক গ্রহণযোগ্য।]

81. k এর মান কত হলে $x^2 + (k^2 - 4)x + 2k - 6 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি পরস্পর উল্টা ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে? [DB'19]
(a) $\pm\sqrt{3}$ (b) $\pm\sqrt{5}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{7}{2}$
সমাধান: (c); $\alpha.\frac{1}{-\alpha} = (2k - 6)$
$\Rightarrow 2k = 6 - 1 = 5 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$

82. $x^2 + 4x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + 1$ এবং $\beta + 1$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি? [RB'19]
(a) $x^2 + 2x + 10 = 0$ (b) $x^2 + 6x + 18 = 0$
(c) $x^2 - 2x + 10 = 0$ (d) $x^2 - 6x + 18 = 0$
সমাধান: (a); $\alpha + \beta = -4$; $\alpha\beta = 13$
$\alpha + \beta + 2 = -4 + 2 = -2$
$\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 13 - 4 + 1 = 10$
$\therefore$ সমীকরণ, $x^2 - (-2)x + 10 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$; $g(x) = x$.

83. $f(x)\,g(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\sum \alpha\beta$ এর মান- [Ctg.B'19]
(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{5}{2}$
সমাধান: (c); $2x^3 - 5x^2 + x = 0$ $\therefore \sum \alpha\beta = \frac{1}{2}$.

84. $x^2 - 8x + k = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অন্য মূলটি- [Ctg.B'19]
(a) $k - 4$ (b) -4 (c) 4 (d) $4 - k$
সমাধান: (c); $x^2 - 8x + k = (x-4)(x-\alpha)$
$= x^2 - (4+\alpha)x + 4\alpha$ $\therefore 4 + \alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 - 4x - k = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

85. সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল 10 হলে, k এর মান কোনটি? [SB'19]
(a) +30 (b) −10 (c) 10 (d) −30
সমাধান: (d); $-\frac{k}{3} = 10$ $\therefore k = -30$

86. সমীকরণটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে, মূলদ্বয়ের মান কোনটি? [SB'19]
(a) −4, −8 (b) $\frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ (c) 4, 8 (d) $\frac{-4}{9}, \frac{-8}{9}$
সমাধান: (b); $\alpha + 2\alpha = \frac{4}{3}$ $\therefore 3\alpha = \frac{4}{3}$ $\therefore \alpha = \frac{4}{9}$ $\therefore 2\alpha = \frac{8}{9}$

87. দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+\sqrt{-3}}$ হলে সমীকরণটি হবে- [BB'19] [Ans: b]
(a) $4x^2 + 2x + 1 = 0$ (b) $4x^2 - 2x + 1 = 0$
(c) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ (d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

88. $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হলে, $x + \frac{1}{x}$ এর মান কত? [BB'19] [Ans: c]
(a) −1 (b) $-\sqrt{3}i$ (c) $\sqrt{3}i$ (d) 1

89. $3x^2 + x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ = কত? [BB'19]
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$
সমাধান: (a); $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$, $\alpha\beta = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2}$

90. p এর কোন মানের জন্য $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে? [BB'19]
(a) $p = \frac{9}{16}$ (b) $p < \frac{16}{9}$ (c) $p < \frac{9}{16}$ (d) $p > \frac{9}{16}$
সমাধান: (c); $9 - 16p > 0 \Rightarrow p < \frac{9}{16}$

91. $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ- [JB'19] [Ans: a]
(i) $c = 0$ হলে, একটি মূল শূন্য
(ii) $b = 0$ হলে, মূল দুটি সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে
(iii) c ও a একই চিহ্নবিশিষ্ট হলে মূল দুটি বাস্তব হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

92. $4x^3 + 2x^2 + 3x - 6$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? [JB'19]
(a) 1 (b) 3 (c) −11 (d) 0
সমাধান: (b); $x = 1 \Rightarrow 4.1^3 + 2.1^2 + 3.1 - 6 = 3$

93. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে অন্য মূলটি হবে- [JB'19]
(a) $-\alpha$ (b) $\frac{1}{\alpha^2}$ (c) $\frac{1}{\alpha}$ (d) α^2
সমাধান: (c); $\alpha.\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 5x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β.

94. সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক? [CB'19]
(a) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান (b) মূলদ্বয় অমূলদ
(c) মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান (d) মূলদ্বয় জটিল
সমাধান: (c); $x = 4,1$ । আবার, $b^2 - 4ac = 9$, যা পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

95. $\alpha > \beta$ হলে, $\alpha - \beta$ = কত? [CB'19]
(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5
সমাধান: (b); $4 - 1 = 3$

96. $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ সমীকরণের দুটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, তৃতীয় মূল কোনটি? [CB'19]
(a) −4 (b) −3 (c) 3 (d) 4
সমাধান: (c); $\alpha + \beta + \gamma = 3$ $\therefore \gamma = 3$

97. p এর কোন মানের জন্য $x^2 - 8x + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? [Din.B'19]
(a) 8 (b) 16 (c) 32 (d) 64
সমাধান: (b); $(-8)^2 - 4.p = 0 \Rightarrow p = \frac{8^2}{4} = 16$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$.

98. p + q এর মান কত? [Din.B'19]
(a) −2 (b) 0 (c) 2 (d) ±2
সমাধান: (c); $\frac{1}{p}.\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow pq = 2$ এবং
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow p + q = pq = 2$

99. q এর মান কত? [Din.B'19]
(a) $-1 \pm i$ (b) $1 \pm i$ (c) $\frac{-1\pm i}{2}$ (d) $\frac{1\pm i}{2}$
সমাধান: (b); $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$
$= 2^2 - 4.2 = -4$; $p - q = 2i$ আবার, $p + q = 2$
$\therefore 2p = 2 + 2i$; $p = 1 + i$ এবং $q = 1 - i$ $\therefore q = 1 \pm i$

100. কোন ফাংশনটি বহুপদী? [All.B'18]
(a) $2x^2 - 5\sqrt{x} + 1$ (b) $x^3 - \frac{3}{x^2} + 4x + 1$
(c) $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$ (d) $2x^2 - x + 1$
সমাধান: (d); বহুপদী রাশিতে x এর ঘাত ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

101. $4x - x^2 - 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 2 হলে অপর মূল কত? [DB'17]

(a) -4 (b) -2 (c) 0 (d) 2

সমাধান: (d); $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 0 \therefore x = 2$

102. k এর মান কত হলে $x^2 - 3x + 2 + k = 0$ সমীকরণের একটি উৎপাদক $(x - 3)$ হবে? [DB'17]

(a) -3 (b) -2 (c) 1 (d) 2

সমাধান: (b); $x = 3$ বসিয়ে; $3^2 - 3.3 + 2 + k = 0$

$\Rightarrow 9 - 9 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$

103. $mx^3 - nx + 3 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b ও c হলে $ab + bc + ca$ এর মান কোনটি? [RB'17]

(a) $-\frac{n}{m}$ (b) 0 (c) $\frac{n}{m}$ (d) $\frac{3}{m}$

সমাধান: (a); $ab + bc + ca = -\frac{n}{m}$.

104. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল $3 + i$ হলে p ও q এর মান কত? [RB'17]

(a) $-6, -10$ (b) $-6, 10$ (c) $6, -10$ (d) $6, 10$

সমাধান: (b); $3 + i, 3 - i$ যোগফল = 6

$\therefore$ গুণফল = 10 $\therefore p = -6, q = 10$

105. $x^2 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক কত? [Ctg.B'17]

(a) -4 (b) 0 (c) 1 (d) 4

সমাধান: (b); $(0)^2 - 4.1.0 = 0$

106. $2x^3 - 3x - 5 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\sum\alpha\beta$ এর মান কত? [Ctg.B'17]

(a) $\frac{-3}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{5}{2}$

সমাধান: (a); $\sum\alpha\beta = -\frac{3}{2}$

107. $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ সমীকরণের পৃথায়ক D হলে– [Ctg.B'17]

(i) মূলদ্বয় বাস্তব যখন $D \geq 0$

(ii) মূলদ্বয় সমান যখন $D = 0$

(iii) মূলদ্বয় মূলদ যখন $D \leq 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\sum\alpha = -\frac{45}{9} = -5$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c–

108. $\sum a^2$ এর মান নিচের কোনটি? [SB'17]

(a) 9/4 (b) 25/4 (c) 29/4 (d) 36/4

সমাধান: (c); $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

$\therefore a + b + c = -\frac{3}{2}$; $ab + bc + ca = -\frac{5}{2}$

Now, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{9}{4} + 5 = \frac{9+20}{4} = \frac{29}{4}$

109. x এর মানগুলি– [SB'17] [Ans: c]

(a) $1, -\frac{3}{2}, -2$ (b) $-1, -3/2, 2$

(c) $-1, 3/2, -2$ (d) $-1, -3/2, -2$

110. $9x^3 + 45x^2 + 60x - 27 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয়ের সমষ্টি কত? [BB'17] [Ans: c]

(a) 45 (b) 5 (c) -5 (d) -45

111. $6x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = ?$ [BB'17]

(a) $-\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{12}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{5}{3}$

সমাধান: (d); $\alpha + \beta = \frac{5}{6}$, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{3}$

112. k এর কোন মানের জন্য $x^2 - 6x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? [BB'17]

(a) -36 (b) 9 (c) -9 (d) 36

সমাধান: (b); $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4k = 0$

$\therefore k = 9$

113. $3x^2 + x + 2 = 0$ এর ক্ষেত্রে– [JB'17]

(i) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান (ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $-\frac{1}{3}$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $\frac{2}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); (i) নিশ্চায়ক $= (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -11$

$\therefore$ মূলদ্বয় অবাস্তব ও অসমান।

(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল $= -\frac{b}{a} = -\frac{1}{3}$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{2}{3}$

114. $1+\sqrt{2}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? [JB'17]
(a) $x^2-2x-1=0$ (b) $x^2+2x-1=0$
(c) $x^2-2x+1=0$ (d) $x^2+2x+1=0$
সমাধান: (a); একটি মূল $1+\sqrt{2}$ হলে অপর মূল $1-\sqrt{2}$
$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $=2$
$\therefore$ মূলদ্বয়ের গুণফল $=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=x^2-2x-1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2-3x-p=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

115. সমীকরণের একটি মূল -2 হলে p এর মান কত? [CB'17]
(a) -10 (b) -2 (c) 2 (d) 10
সমাধান: (d); $\alpha+\beta=3 \Rightarrow -2+\beta=3$
$\therefore \beta=5$; $\alpha\beta=-p \Rightarrow (-2)5=-p \therefore p=10$

116. মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে p এর মান- [CB'17]
(a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{-9}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{-3}{4}$
সমাধান: (b); $(-3)^2-4.1(-p)=0$
$\Rightarrow 9+4p=0 \therefore p=-\frac{9}{4}$

117. $13x^2-6x-7=0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha^{-1}+1$ ও $\beta^{-1}+1$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [Din.B'17]
(a) $7x^2-8x-12=0$ (b) $7x^2-20x=0$
(c) $7x^2+8x-12=0$ (d) $7x^2+8x=0$
সমাধান: (a); $\frac{1}{\alpha}+1=x \Rightarrow \alpha=\frac{1}{x-1}$
$\therefore 13\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-6\left(\frac{1}{x-1}\right)-7=0 \Rightarrow 7x^2-8x-12=0$
অথবা, **Use calculator**

118. $4x^3+12x^2-3x+52=0$ সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$ হলে, এর বাস্তব মূল কোনটি? [Din.B'17] [Ans: b]
(a) -5 (b) -4 (c) 4 (d) 5

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. $3x^2-7x+4=0$ এর মূলদ্বয় কত?
(a) $-1, \frac{4}{3}$ (b) $-1, -\frac{4}{3}$ (c) $1, \frac{4}{3}$ (d) $1, -\frac{4}{3}$
সমাধান: (c); $3x^2-7x+4=0$
$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-4.4.3}}{2.3}=\frac{7\pm1}{6}=\frac{8}{6}, \frac{6}{6}=\frac{4}{3}, 1$

02. $3x^2-5x-4=0$ এর মূলদ্বয়ের যোগফল কত? [Ans: b]
(a) $-\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $-\frac{4}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$7x^2-5x-3=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

03. মূলদ্বয়ের গুণফল নিচের কোনটি? [Ans: a]
(a) $-\frac{3}{7}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) $-\frac{5}{7}$ (d) $\frac{5}{7}$

04. $x^2+ax+b=0$ সমীকরণের একটি মূল $2-\sqrt{3}i$ হলে-
(i) অপর মূলটি হবে প্রদত্ত মূলের অনুবন্ধী
(ii) a এর মান 4 (iii) b এর মান 7
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $x=2-\sqrt{3}i \Rightarrow (x-2)^2=(-\sqrt{3}i)^2$
$\Rightarrow x^2-4x+4=-3 \Rightarrow x^2-4x+7=0$

05. $6x^2-mx+72=0$ সমীকরণের ধনাত্মক মূলদ্বয়ের অনুপাত 3: 4 হলে m এর মান কত?
(a) 42 (b) -42 (c) $\sqrt{42}$ (d) $-\sqrt{42}$
সমাধান: (a); $6x^2-mx+72=0; 3\alpha+4\alpha=\frac{m}{6}$
$\Rightarrow 7\alpha=\frac{m}{6} \Rightarrow 12\alpha^2=\frac{72}{6} \therefore \alpha=1$
$m=42\alpha \therefore m=42$

06. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের ত্রিঘাতের সমষ্টি কোনটি?
(a) $3bc-b^3$ (b) b^3-3bc
(c) $3c-b^3$ (d) b^3-3c
সমাধান: (a); $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-b)^3-3c(-b)=3bc-b^3$

07. $x^2+3+5x=0$ সমীকরণে মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}$ এর মান কত?
(a) $-\frac{10}{3}$ (b) $-\frac{18}{5}$ (c) $-\frac{20}{3}$ (d) $\frac{20}{3}$
সমাধান: (c); $\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-5+\frac{-5}{3}=\frac{-15-5}{3}=\frac{-20}{3}$

08. $(k^2+1)x^2+kx+3k+1$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বিপরীত হলে k এর মান-
(i) 0 (ii) 3 (iii) $-\frac{1}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $\alpha.\frac{1}{\alpha}=\frac{3k+1}{k^2+1} \Rightarrow k^2+1=3k+1$
$\Rightarrow k^2-3k=0 \therefore k(k-3)=0; k=0,3$

09. $2x^2-5x+4=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হবে-
(a) বাস্তব ও অসমান (b) বাস্তব ও সমান
(c) জটিল ও অসমান (d) জটিল ও সমান
সমাধান: (c); নিশ্চায়ক $D=b^2-4ac$
$=25-4.4.2=-7 \therefore$ মূলদ্বয় জটিল ও অসমান

10. k এর মান নিচের কোনটি হলে $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে?
(a) 3, 2 (b) 3, −2 (c) −3, 2 (d) −3, −2
সমাধান: (b); $4(k+3)^2 - 4(2k+3).(k+1) = 0$
$\Rightarrow k^2 + 6k + 9 - \{2k^2 + 2k + 3k + 3\} = 0$
$\Rightarrow k^2 + 6k + 9 - \{2k^2 + 5k + 3\} = 0$
$\Rightarrow -k^2 + k + 6 = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$
$\Rightarrow (k-3)(k+2) = 0 \therefore k = 3, -2$

11. k এর কোন মানের জন্য $(k-1)x^2 - kx + 1 + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে?
(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$
সমাধান: (d); $k^2 - 4(k+1)(k-1) = 0$
$\Rightarrow k^2 - 4(k^2-1) = 0 \Rightarrow k^2 - 4k^2 + 4 = 0$
$\Rightarrow 3k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

12. $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$) দ্বিঘাত সমীকরণের– [Ans: b]
(i) মূলদ্বয় $= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (ii) পৃথায়ক $= b^2 - 4ac$
(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{b}{a}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) ii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

13. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ও $x^2 + x - 12 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের-
(i) প্রতিটির মূলদ্বয় মূলদ (ii) সাধারণ মূল 3
(iii) প্রথমটির মূলদ্বয়ের সমষ্টি −5
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $D_1 = 25 - 24 = 1$
$D_2 = 1 + 48 = 49 \therefore$ মূলদ্বয় মূলদ।
এখন, $x^2 + x - (x^2 - 5x) = 12 - (-6)$
$\Rightarrow 6x = 18 \therefore x = 3 \therefore$ সাধারণ মূল= 3 এবং মূলদ্বয়ের সমষ্টি $\alpha_1 + \beta_1 = 5$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 6x + 3 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

14. $\alpha + 1$ ও $\beta + 1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^2 - 8x + 10 = 0$ (b) $x^2 - 8x - 10 = 0$
(c) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (d) $x^2 - 4x - 2 = 0$
সমাধান: (a); $\alpha + 1 = x \Rightarrow \alpha = x - 1$
$\Rightarrow (x-1)^2 - 6(x-1) + 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 6x + 6 + 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 8x + 10 = 0$

15. $1 + \sqrt{2}i$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 - 2x + 3 = 0$ (b) $x^2 + 2x + 3 = 0$
(c) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (d) $x^2 + 2x - 1 = 0$
সমাধান: (a); $x = 1 + \sqrt{2}i \Rightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{2}i)^2$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

16. $-\alpha, -\beta$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$
(b) $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$
(c) $x^2 - (\alpha+\beta)x - \alpha\beta = 0$
(d) $x^2 + (\alpha+\beta)x - \alpha\beta = 0$
সমাধান: (b): $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

17. দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $-4 - \sqrt{-3}$ হলে, সমীকরণটি হবে-
(a) $x^2 - 8x + 19 = 0$ (b) $x^2 + 8x + 19 = 0$
(c) $x^2 + 8x + 13 = 0$ (d) $x^2 + 8x - 3 = 0$
সমাধান: (b); $x = -4 - \sqrt{3}i \Rightarrow (x+4)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = -3 \Rightarrow x^2 + 8x + 19 = 0$

18. $x^4 + 3x^3 + 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ হলে, $\sum\alpha\beta$ এর মান কত? [Ans: d]
(a) 6 (b) 5 (c) −3 (d) 0

19. $x^2 + 2x + 2 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $-1 - \sqrt{-1}$ হলে অপর মূলটি কত? [Ans: b]
(a) $1 - \sqrt{-1}$ (b) $-1 + \sqrt{-1}$
(c) $-1 - \sqrt{-1}$ (d) $1 + \sqrt{-1}$

20. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল −3 হলে c এর মান কত? [Ans: c]
(a) −6 (b) 6 (c) −24 (d) 24

21. $2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ রাশিকে $(x+2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
(a) −7 (b) 17 (c) 37 (d) −15
সমাধান: (d); $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$
$\therefore f(-2) = 2 \times -8 + 3.4 + 5(-2) - 1$
$= -16 + 12 - 10 - 1 = -27 + 12 = -15$

22. নিচের কোনটি বহুপদী? [Ans: b]
(a) $x^3 + x^{-2} + 1$ (b) $x^3 + 3x^2 + 2$
(c) $1 + x + x^2 + \cdots$ (d) $x^3 + 2x^2 + x^{\frac{1}{2}} + 1$

23. $3x^3 - 9x^2 - 6x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β এবং γ হলে $\sum\alpha\beta$ কত?
(a) −3 (b) 3 (c) −2 (d) 2
সমাধান: (c); $\sum\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{(-6)}{3} = -2$

24. $x^2 - 7x + 6 = 0$ এবং $x^2 - (p+1)x + p = 0$ সমীকরণের সাধারণ মূল কত?
(a) −p (b) p (c) −1 (d) 1
সমাধান: (d); $x^2 - 7x + 6 - x^2 + (p+1)x - p = 0$
$\Rightarrow (p-6)x - (p-6) = 0 \therefore x = \frac{(p-6)}{(p-6)} = 1$

25. $4x - 4x^2 - 5$ রাশিটির বৃহত্তম মান কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) -4 (c) -5 (d) -6
সমাধান: (b); $f(x) = 4x - 4x^2 - 5$
$\Rightarrow f'(x) = 4 - 8x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 8x = 0$
$\Rightarrow 8x = 4 \therefore x = \frac{1}{2} \therefore f''(x) = -8$
$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{4} - 5 = 1 - 5 = -4$

26. $3x^2 - 6x - 2$ রাশির ক্ষুদ্রতম মান এবং ক্ষুদ্রতম মানের জন্য x এর মান যথাক্রমে-
(a) 1, 1 (b) 1, −1 (c) −5,1 (d) −5, −1
সমাধান: (c); $\therefore 3x^2 - 6x - 2 = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0$ [1st derivative]; $x = 1$

27. $x = -\sqrt{3} + 5$ হলে $x^2 - 10x + 20$ এর মান কত?
(a) −2 (b) 2 (c) −8 (d) 8
সমাধান: (a); $x = -\sqrt{3} + 5 \Rightarrow (x-5)^2 = 3$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 3 \Rightarrow x^2 - 10x + 22 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 20 = -2$

28. $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি?
(a) −1, 0 (b) $\frac{1}{3}$, 1 (c) 0, 1 (d) −1, 1
সমাধান: (a); $3.3^{2x} - 3.4.\frac{3^x}{3} + 1 = 0$
$\Rightarrow 3(3^x)^2 - 4.3^x + 1 = 0 \Rightarrow 3a^2 - 4a + 1 = 0$
$\Rightarrow 3a^2 - 3a - a + 1 = 0$
$\Rightarrow 3a(a-1) - 1(a-1) = 0$
$\Rightarrow (a-1)(3a-1) = 0 \therefore a = 1, \frac{1}{3} \therefore 3^x = 1$
$\therefore 3^x = 3^0 \therefore x = 0; 3^x = 3^{-1} \therefore x = -1; x = -1, 0$

29. k এর মান কত হলে $(3k+1)x^2 + (11+k)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে?
(a) $k > 1$ (b) $k < 85$
(c) $k > 85$ (d) $1 < k < 85$
সমাধান: (d); $(11+k)^2 - 4(3k+1)9 < 0$
$\Rightarrow 121 + 22k + k^2 - 36(3k+1) < 0$
$\Rightarrow 121 + 22k + k^2 - 108k - 36 < 0$
$\Rightarrow k^2 - 86k + 85 < 0 \Rightarrow k^2 - 85k - k + 85 < 0$
$\Rightarrow k(k-85) - 1(k-85) < 0$
$\Rightarrow (k-85)(k-1) < 0 \therefore 1 < k < 85$

30. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির মূল দুইটি সমান হবে যদি– [Ans: c]
(a) $b^2 > 4ac$ (b) $b^2 < 4ac$
(c) $b^2 = 4ac$ (d) $b = 0$

31. $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির 3 গুণ হলে k এর মান-
(a) 8 (b) −8 (c) $\sqrt{8}$ (d) ±8
সমাধান: (d); $3\alpha^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \therefore \alpha = \pm\frac{2}{3}; 4\alpha = \frac{k}{3}$
$\therefore 4 \times \left(\frac{\pm 2}{3}\right) \times 3 = k \Rightarrow k = \pm 8$

32. $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 2 কম মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হলো-
(a) $x^2 + x + 7 = 0$ (b) $x^2 - x + 7 = 0$
(c) $x^2 + x - 7 = 0$ (d) $x^2 - x - 7 = 0$
সমাধান: (d); $\alpha - 2 = x \therefore \alpha = x + 2; x^2 - 5x - 1 = 0$
$\Rightarrow (x+2)^2 - 5(x+2) - 1 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 1 = 0$
$\Rightarrow x^2 - x - 7 = 0$

33. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে-
(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 3 = 0$
(c) $x^2 - 11x + 30 = 0$ (d) $x^2 - 2x + 1 = 0$
সমাধান: (a); $6\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 1 = 0$
$\Rightarrow 6 - 5x + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

34. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান এবং $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে b এর মান কত?
(a) 4 (b) 8 (c) 9 (d) 12
সমাধান: (c); $x^2 + ax + 8 = 0$ এর মূলদ্বয়, $4, \alpha$
$\therefore 4\alpha = 8 \therefore \alpha = 2 \therefore a = -(4+2) = -6$ এখন,
$\therefore x^2 - 6x + b = 0$ এর সমান মূল β; $\therefore 2\beta = 6$
$\therefore \beta = 3 \therefore b = \beta^2 \therefore b = 9 \therefore a = -6;\ b = 9$

35. $x^2 - 11x + a = 0$ এবং $x^2 - 14x + 2a = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকলে a এর মান কোনগুলি? [Ans: a]
(a) 0, 24 (b) 0, −24 (c) 1, −1 (d) −1, 1

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

36. $x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে–
(a) $6x^2 - 3x + 1 = 0$ (b) $5x^2 + 3x - 1 = 0$
(c) $5x^2 - 3x + 1 = 0$ (d) $3x^2 - 5x + 1 = 0$
সমাধান: (c); $x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5 = 0$
$\Rightarrow 5x^2 - 3x + 1 = 0$

37. $3x^2 + 2x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $-\alpha, -\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে–
(a) $3x^2 - 2x - 6 = 0$ (b) $3x^2 - 2x + 6 = 0$
(c) $2x^2 - 3x - 6 = 0$ (d) $3x^2 - 3x - 6 = 0$
সমাধান: (b); $3x^2 + 2(-x) + 6 = 0$
$\Rightarrow 3x^2 - 2x + 6 = 0$

38. $2x^2 - 3x - 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $2\alpha, 2\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে–
(a) $x^2 + 3x - 2 = 0$ (b) $x^2 + 3x - 8 = 0$
(c) $x^2 - 3x - 8 = 0$ (d) $x^2 - 6x + 4 = 0$
সমাধান: (c); $2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{2}\right) - 4 = 0$
$\Rightarrow 2\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 8 = 0$

39. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ এর মান কত?

(a) $\frac{p}{r}$ (b) $\frac{-q}{r}$ (c) $\frac{-p}{r}$ (d) $\frac{q}{r}$

সমাধান: (d); $\alpha + \beta + \gamma = p$; $\alpha\beta\gamma = r$

$\Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = q$; $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{q}{r}$

40. $x^3 - ax^2 + b = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\sum \alpha^2$ এর মান কত?

(a) a (b) a^3 (c) a^2 (d) $a^2 - 2b$

সমাধান: (c); $x^3 - ax^2 + b = 0$

$\Rightarrow \sum \alpha^2 = (\sum \alpha)^2 - 2\sum \alpha\beta = a^2 - (2 \times 0) = a^2$

41. $x^2 + (2k+4)x + (8k+1) = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি সমান হলে k এর মান কত?

(a) $-3, -1$ (b) $3, 1$ (c) $0, 3$ (d) $3, -1$

সমাধান: (b); $(2k+4)^2 - 4.1(8k+1) = 0$

$\Rightarrow 4k^2 + 16k + 16 - 32k - 4 = 0$

$\Rightarrow 4k^2 - 16k + 12 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0$

$\Rightarrow (k-3)(k-1) = 0 \therefore k = 3, 1$

42. $x^2 + x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} =$ কত?

(a) -2 (b) -1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (c); $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 = 0$

$\Rightarrow 1 + x + 2x^2 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 0 \therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2}$

43. $x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, α^2 এবং β^2 এর মূলবিশিষ্ট সমীকরণ–

(a) $x^2 - x + 25 = 0$ (b) $x^2 + x - 25 = 0$

(c) $x^2 + x + 25 = 0$ (d) $x^2 + 11x + 25 = 0$

সমাধান: (c); $x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 3$

$\alpha\beta = 5 \therefore \alpha^2 + \beta^2 = 3^2 - 2.5 = -1$

$\therefore x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha\beta)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 25 = 0$

44. $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ–

(a) $x^2 - 19x + 84 = 0$ (b) $x^2 + 14x - 144 = 0$

(c) $x^2 - 14x + 144 = 0$ (d) $x^2 + 19x - 84 = 0$

সমাধান: (a); $\alpha + \beta = 7; \alpha\beta = 12$

$\therefore x^2 - (7+12)x + 7 \times 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 19x + 84 = 0$

45. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 1 হলে, অপর মূল দুইটি–

(a) $-2, -3$ (b) $-2, 3$ (c) $2, -3$ (d) $2, 3$

সমাধান: (d); $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)(x-2) = 0$

46. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় β, γ হলে, $(\gamma + \alpha) : (\gamma - \alpha) =$ কত?

(a) $6:5$ (b) $5:6$ (c) $11:1$ (d) $1:6$

সমাধান: (c); $2x^2 - 7x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4.2.5}}{4}$

$= \frac{7 \pm 3}{4} = \frac{10}{4}, 1 = \frac{3}{2} \therefore \alpha = \frac{5}{2}$; $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3, 1 \therefore \gamma = 3$

$\therefore (\alpha + \gamma) : (\gamma - \alpha) = \frac{11}{2} : \frac{1}{2} = 11 : 1$

47. $px^2 + qx + 1, qx^2 + px + 1$ রাশি দুটির একটি সাধারণ উৎপাদক থাকতে পারে যদি–

(a) $p + 1 = 0$ (b) $q + 1 = 0$

(c) $p + q - 1 = 0$ (d) $p + q + 1 = 0$

সমাধান: (d); $\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{p-q} = \frac{1}{p^2 - q^2}$ তাহলে, $\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{p-q}$

$\therefore \alpha = -1$ আবার, $\frac{\alpha}{p-q} = \frac{1}{p^2 - q^2} \Rightarrow \frac{-1}{p-q} = \frac{1}{(p+q)(p-q)}$

$\Rightarrow p + q = -1 \therefore p + q + 1 = 0$

48. p এর মান কত হলে $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে?

(a) $p < \frac{9}{15}$ (b) $p > \frac{7}{16}$ (c) $p < \frac{9}{16}$ (d) $p > \frac{9}{16}$

সমাধান: (c); পৃথায়ক $> 0 \Rightarrow 9 - 16p > 0 \Rightarrow p < \frac{9}{16}$

49. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের উভয়মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত– **[Ans: d]**

(a) $a_1b_2 = a_2b_1$

(b) $(a_1b_2 - a_2b_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

(c) $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$

(d) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

50. $9x^2 - 12x + 4 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β মূলদ্বয়ের অনুপাত $(\alpha : \beta)$ কত?

(a) $4:9$ (b) $3:2$ (c) $1:1$ (d) $4:3$

সমাধান: (c); পৃথায়ক $= (-12)^2 - 4.9.4$

$= 144 - 144 = 0 \therefore \alpha : \beta = 1 : 1$

অসীম কুমার সাহা স্যার

51. $ax^n + bx + c = 0$ সমীকরণের কতটি মূল থাকবে? [Ans: c]

(a) 0 (b) 1 (c) n (d) n + 1

52. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল i ও 1 হলে, অপর মূলটি কত?

(a) −1 (b) 0 (c) $-i$ (d) i

সমাধান: (c); $1.i.\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$

53. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল i^3 হলে অপর মূল কোনটি?

(a) 0 (b) −1 (c) −i (d) i

সমাধান: (d); একটি মূল $= i^3 = -i = 0 - i$

∴ অপর অনুবন্ধী মূল $= 0 + i = i$

54. $x^n - a^n$ বহুপদীকে যদি $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে নিঃশেষে বিভাজ্য হয় তবে ভাগফলের সর্বোচ্চ ঘাত? [Ans: b]

(a) 1 (b) n − 1 (c) n (d) n + 1

55. $x\left(x + \frac{3}{x}\right) = 0$ সমীকরণটি-

(i) দ্বিঘাত (ii) ত্রিঘাত (iii) বাস্তব মূল বিশিষ্ট

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: সঠিক উত্তর নেই।

56. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\sqrt{3}$ হলে– [Ans: b]

(i) অপর মূল $-\sqrt{3}$ (ii) মূলদ্বয় জটিল

(iii) মূলদ্বয় অমূলদ

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - 3x + 2 + k = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেখানে k ধ্রুবক।

57. k এর মান কত হলে $x - 3$ প্রদত্ত সমীকরণের উৎপাদক?

(a) −3 (b) −2 (c) 1 (d) 2

সমাধান: (b); $x - 3$ উৎপাদক হলে,

$f(3) = (3)^2 - 3.3 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2$

58. $k = -6$ হলে সমীকরণের একটি ধনাত্মক মূল কত হবে?

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 4

সমাধান: (d); $x^2 - 3x + 2 - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + x - 4 = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) + 1(x - 4) = 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \therefore x = 4, -1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - 6x + 7 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার দুটি মূল α, β.

59. সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত?

(a) 8 (b) 7 (c) 6 (d) 1

সমাধান: (a); নিশ্চায়ক $= (-6)^2 - 4.1.7$

$= 36 - 28 = 8$

60. সমীকরণটির মূলদ্বয় কেমন হবে?

(a) সমান (b) অবাস্তব (c) অমূলদ (d) মূলদ

সমাধান: (c); নিশ্চায়ক > ৪ এবং পূর্ণবর্গ নয়। তাই মূলদ্বয় বাস্তব ও অমূলদ

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x^2 - 10x + k = 0$ সমীকরণের দুটি মূল $\alpha, \frac{1}{\alpha}$.

61. k এর মান কত?

(a) −1 (b) 1 (c) 3 (d) 10

সমাধান: (c); $\alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{k}{3} \Rightarrow 1 = \frac{k}{3} \therefore k = 3$

62. α এর একটি মান কত?

(a) −10 (b) −3 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1

সমাধান: (c); সমীকরণটি: $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 9x - x + 3 = 0$

$\Rightarrow 3x(x - 3) - 1(x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(3x - 1) = 0 \therefore x = 3, \frac{1}{3}$

63. যেকোনো বাস্তব সংখ্যা a, b, c, d এর জন্য $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকরণে কোনটি স্বতঃসিদ্ধ? [Ans: d]

(a) তিনটি মূল অবশ্যই বাস্তব

(b) দুইটি মূল অবশ্যই বাস্তব

(c) তিনটি মূলই অবাস্তব

(d) একটি মূল অবশ্যই বাস্তব

64. $6x^3 - x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, $\sum(\alpha - \beta)^2$ এর মান কত?

(a) $\frac{-1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) 1 (d) −1

সমাধান: (c); $\sum(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2.0^2 - 6\left(-\frac{1}{6}\right) = 1$

65. $x^2 - 4x + 4$ দ্বারা $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ বিভাজ্য, $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো হবে?

(a) 2, 2, 3 (b) 2, 2, −3

(c) 2, −2, 3 (d) 2, −2, −3

সমাধান: (a); $x^2 - 4x + 4 = 0$ এর মূল

$X^2 - 2.x.2 + 2^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$

$\therefore x = 2, 2 \therefore$ অপর মূল α হলে, $2.2.\alpha \Rightarrow \alpha = 3$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

66. $x^2 - ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় m ও n হলে– [Ans: a]

(i) $m + n = a$ (ii) $mn = b$

(iii) m ও n এর মান $= \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

67. $x^2 - 4x + a = 0$ এর মূলদ্বয়- [Ans: d]

(i) সমান হবে যদি $a = 4$ হয়

(ii) জটিল হবে যদি $a > 4$ হয়

(iii) বাস্তব হবে যদি $a \le 4$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

68. সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta =$ কত? [Ans: a]

(a) 5 (b) −4 (c) 6 (d) −6

69. সমীকরণটির মূলদ্বয় a, b হলে, $a^2 + b^2 =$ কত? [Ans: b]

(a) 11 (b) 13 (c) 25 (d) 36

70. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরফলের পরমমানের সমান হলে, a, b ও c এর মান কত? [Ans: a]

(a) $a = 1, b = -6, c = 5$

(b) $a = 1, b = 6, c = -5$

(c) $a = 1, b = -6, c = -5$

(d) $a = 1, b = 6, c = 5$

71. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অন্যটি কত? [Ans: d]

(a) −5 (b) −4 (c) 4 (d) 1

72. p এর মান কত হলে $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে?

(a) $p < \frac{9}{15}$ (b) $p > \frac{7}{16}$ (c) $p < \frac{9}{16}$ (d) $p > \frac{9}{16}$

সমাধান: (c); মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, নিশ্চায়ক $> 0 \Rightarrow 9 - 16p > 0 \Rightarrow p < \frac{9}{16}$

73. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

(b) $x^3 + qx^2 + rx + p = 0$

(c) $rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$

(d) $rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

সমাধান: (d); মূল x হলে বিপরীত মূল $\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{1}{x^3} - \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} - r = 0 \Rightarrow 1 - px + qx^2 - rx^3 = 0$

$\Rightarrow rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

74. $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ এর মান কত?

(a) $\frac{15}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{2}{15}$

সমাধান: (a); $\alpha + \beta = \frac{3}{2}; \alpha\beta = \frac{1}{4} \therefore \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$

75. n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ $f(x) = 0$ এর মূল সংখ্যা- [Ans: c]

(a) $n + 1$ (b) $n - 1$ (c) n (d) $n + 2$

76. $x^2 + ax + 8 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল 4 এবং $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি পরস্পর সমান হলে b এর মান নির্ণয় কর।

(a) 9 (b) 8 (c) 7 (d) 6

সমাধান: (a): এক্ষেত্রে, $(4)^2 + 4a + 8 = 0 \Rightarrow a = -6$

$\therefore x^2 - 6x + b = 0$ মূলদ্বয় সমান হওয়ায়,

$(-6)^2 - 4b = 0 \Rightarrow 4b = 36 \therefore b = 9$

77. $27x^2 + 6x - (p + 2) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান কত?

(a) 6, −1 (b) 1, −6 (c) 1, 6 (d) 6, −2

সমাধান: (a); মূলদ্বয়: $\alpha, \alpha^2, \therefore \alpha + \alpha^2 = \frac{-6}{27} = -\frac{2}{9}$

$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0 \Rightarrow 9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0 \therefore \alpha = -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

$\therefore \alpha^3 = -\frac{p+2}{27}$; $\alpha = -\frac{1}{3}$ হলে, $-\frac{1}{27} = -\frac{p+2}{27}$

$\Rightarrow p = -1$ $\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে, $-\frac{8}{27} = -\frac{p+2}{27} \Rightarrow p = 6$

78. কোনটি $(x + 4)$ দ্বারা বিভাজ্য নয়?

(a) $x^2 + 5x + 4$

(b) $x^2 + 3x - 4$

(c) $x^2 - 6x + 8$

(d) $x^2 + 4x$

সমাধান: (c); $x^2 - 6x + 8$ এ $x = -4$ বসিয়ে,

$(-4)^2 - 6(-4) + 8 = 16 + 24 + 8 = 48$; যা 0 নয়

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. চলকের যে সকল মানের জন্য বহুপদীর মান শূন্য হয় তারা প্রত্যেকেই ঐ বহুপদী সমীকরণের কী? [Ans: a]
(a) মূল (b) ঘাত (c) সূচক (d) মাত্রা

02. $2x^2+3x-6=0$ এর মূলদ্বয় - [Ans: d]
(a) মূলদ ও সমান (b) জটিল ও অসমান
(c) মূলদ ও অসমান (d) অমূলদ ও অসমান

03. $3x^2+4x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে-
(i) $\alpha+\beta=\frac{-4}{3}$
(ii) $\alpha\beta=\frac{1}{3}$
(iii) $\alpha+1$ এবং $\beta+1$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ $3x^2-2x=0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $\alpha+1+\beta+1=\frac{-4}{3}+2=\frac{2}{3}$
$(A+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$
$=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+1=0$ $\therefore$ সমীকরণ, $3x^2-2x=0$

04. $x^2+4x+4=0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে এর মূলদ্বয়ের ঘন এর সমষ্টি কত? [Ans: c]
(a) 112 (b) 16 (c) -16 (d) -112

05. $x^2-5x+m=0$ এর একটি মূল -3 হলে m এর মান কত?
(a) -6 (b) -12 (c) -24 (d) -30
সমাধান: (c); $(-3)^2-5(-3)+m=0 \therefore m=-24$

06. $4x^2-20x+25=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়– [Ans: c]
(i) অমূলদ (ii) বাস্তব (iii) সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. $x^2-4x+16=0$ সমীকরণের— [Ans: a]
(i) মূলদ্বয় মূলদ
(ii) মূলদ্বয়ের যোগফল-4
(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল 16
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) iii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

08. $1-2\sqrt{-1}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে-
(a) $x^2-2x+5=0$ (b) $x^2+2x+5=0$
(c) $x^2+2x-5=0$ (d) $x^2-2x-5=0$
সমাধান: (a); মূলদ্বয় $1-2i$ এবং $1+2i$
$\therefore$ সমীকরণটি $=(x-1-2i)(x-1+2i)=0$
$\Rightarrow x^2-2x+5=0$

09. $2x^2-3x-P=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হলে, P এর মান কত? [Ans: a]
(a) -2 (b) 2 (c) 3 (d) -3

10. $k=0$ হলে $x^2+(2k+1)x-(k+1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কোনটি?
(a) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (c) $\frac{\pm1+\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{\pm1-\sqrt{5}}{2}$
সমাধান: (b); $x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

11. $x^2-4x+a=0$ এর মূলদ্বয়—
(i) সমান হবে যদি $a=4$ হয়
(ii) জটিল হবে যদি $a>4$ হয়
(iii) বাস্তব হবে যদি $a\le 4$ হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $D=16-4a$ বাস্তব হবে যদি $16-4a\ge 0$ অর্থাৎ $a\le 4$ জটিল হবে যদি $16-4a<0$ অর্থাৎ $a>4$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^3-5x^2-12=0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c.

12. $\sum ab$ এর মান কোনটি? [Ans: c]
(a) 5 (b) -5 (c) 0 (d) 6

13. abc এর মান কোনটি? [Ans: a]
(a) 4 (b) -4 (c) -12 (d) 12

14. যদি $f(x)=0$ এর তিনটি মূল $1,-1,2$ হয় তবে $f(2x)=0$ এর মূলগুলি—
(a) $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$ (b) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$
(c) $2,-2,4$ (d) $0,1,-2$
সমাধান: (a); $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)=0$;
$f(2x)=(2x-1)(2x+1)(2x-1)=0$
অর্থাৎ, $2(4x^2-1)(x-1)=0$ $\therefore x=\pm\frac{1}{2}; x=1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x^3-5x^2+6x-1=0$ বহুপদী সমীকরণের মূল তিনটি α, β এবং γ ।

15. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ এর মান নিচের কোনটি? [Ans: d]
(a) $\frac{5}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) -3 (d) 3

16. $\sum\alpha^2$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) 4 (d) -4
সমাধান: (a); $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\times 3=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}$

17. 1, 1 ও 1 মূল তিনটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
(b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
(c) $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$
(d) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$
সমাধান: (b); $(x-1)(x-1)(x-1) = 0$
$\therefore x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

18. $2x^2 + ax + 6 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের যোগফল 5 হলে a এর মান কত?
(a) -10 (b) -3 (c) 3 (d) 10
সমাধান: (a); $\frac{-a}{2} = 5 \therefore a = -10$

19. যে সমীকরণের মূলগুলি $x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি হতে 2 ছোট তা–
(a) $x^2 + x + 7 = 0$ (b) $x^2 - x + 7 = 0$
(c) $x^2 - x - 7 = 0$ (d) $x^2 + x - 7 = 0$
সমাধান: (c); $\alpha + \beta = 5$; $\alpha\beta = -1$; $(\alpha - 2) + (\beta - 2) = 5 - 4 = 1$
$(\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4$
$= -1 - 10 + 4 = -7$ $\therefore$ সমীকরণ $x^2 - x - 7 = 0$

20. একটি ত্রিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল 1 ও i সমীকরণটি-
(a) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ (b) $x^3 + 1 = 0$
(c) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ (d) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
সমাধান: (a); $x^3 - (1 + i - i)x^2 + (1.i - i.1 - i^2)x - 1.i.(-i) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

21. $x = \sqrt[3]{1}$ সমীকরণের মূল তিনটির গুণফল কত? [Ans: c]
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $1 + i$

22. $7 + 2i$ ও $7 - 2i$ মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 - 14x + 53 = 0$ (b) $x^2 - 14x - 53 = 0$
(c) $x^2 + 14x - 53 = 0$ (d) $x^2 + 14x + 53 = 0$
সমাধান: (a); $x^2 - (7 + 2i + 7 - 2i)x + \{(7 + 2i)(7 - 2i)\} = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 53 = 0$

23. $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির 3 গুণ হলে k এর মান কত?
(a) 8 (b) -8 (c) $\pm\sqrt{8}$ (d) ± 8
সমাধান: (d); $\alpha(3\alpha) = \frac{4}{3}$ $\therefore \alpha = \pm\frac{2}{3}$
again, $\alpha + 3\alpha = \frac{k}{3} \Rightarrow k = \pm 12\alpha \therefore k = \pm 8$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি সমীকরণে র মূলগুলো $\frac{1}{2}, \sqrt{5}$।

24. সমীকরণটি কত? [Ans: a]
(a) $(2x - 1)(x^2 - 5) = 0$
(b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \sqrt{5}) = 0$
(c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \sqrt{5}) = 0$
(d) $(2x + 1)(x^2 - 5) = 0$

25. উদ্দীপকের দ্বিতীয় মূলটি কী ধরণের সংখ্যা? [Ans: b]
(a) মূলদ সংখ্যা (b) অমূলদ সংখ্যা
(c) জটিল সংখ্যা (d) কাল্পনিক সংখ্যা

26. $4x^3 - 7x^2 + 2x - 8 = 0$ সমীকরণের মূল ত্রয়ের সমষ্টি কোনটি? [Ans: c]
(a) $-\frac{4}{7}$ (b) $\frac{-7}{4}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{4}{7}$

27. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত?
(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{9}$
সমাধান: (d); ধরি, মূলদ্বয় α, β ; $\alpha + \beta = \frac{2}{3}$; $\alpha\beta = \frac{1}{3}$
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -\frac{2}{9}$

28. যদি $\alpha + \beta = 3$ ও $\alpha^3 + \beta^3 = 7$ হয় তবে α ও β যে সমীকরণের মূল তা নিচের কোনটি হবে?
(a) $x^2 - 3x + 7 = 0$ (b) $x^2 - 3x - 7 = 0$
(c) $9x^2 - 27x + 20 = 0$ (d) $9x^2 - 27x - 20 = 0$
সমাধান: (c); $\alpha + \beta = 3$; $\alpha^3 + \beta^3 = 7$
$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 7$
$\Rightarrow 27 - 3 \times \alpha\beta \times 3 = 7 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{20}{9}$
$\therefore$ সমীকরণ $x^2 - 3x + \frac{20}{9} = 0$
$\Rightarrow 9x^2 - 27x + 20 = 0$

29. $x^3\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0$ সমীকরণটি–
(i) দ্বিঘাত (ii) ত্রিঘাত (iii) বাস্তব মূলবিশিষ্ট
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $x^3\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = x^2 + 2x + 1$
$= (x + 1)^2$

30. $2x^2 + 4x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α ও β হলে α^2 ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?
(a) $4x^2 - 12x + 1$ (b) $4x^2 + 12x + 1 = 0$
(c) $4x^2 + 12x - 1 = 0$ (d) $4x^2 - 12x - 1 = 0$
সমাধান: (a); $\alpha + \beta = -2$; $\alpha\beta = \frac{1}{2}$
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2.\alpha\beta = 4 - 1 = 3$
$\alpha^2\beta^2 = \frac{1}{4}$ $\therefore$ সমীকরণ, $4x^2 - 12x + 1 = 0$

31. $x^2 + ax + 2 = 0$ এর একটি মূল অন্যটির দ্বিগুণ হলে a এর মান কত?
(a) ± 2 (b) ± 3 (c) ± 4 (d) ± 5
সমাধান: (b); $2\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 1 \therefore 3\alpha = -a$
$\Rightarrow a = \pm 3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$

32. সমীকরণটির মূলদ্বয়ের সমষ্টি কত? [Ans: a]
(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 5 (d) $\frac{1}{5}$

33. সমীকরণটির ন্যূনতম মান কত?
(a) $-\frac{4}{11}$ (b) $\frac{4}{11}$ (c) $-\frac{11}{4}$ (d) $\frac{11}{4}$
সমাধান: (d); $x^2 - 3x + 5$
$= x^2 - 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 5 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$
$x - \frac{3}{2} = 0$ হলে রাশিটির মান ন্যূনতম হবে।
$\therefore$ ন্যূনতম মান $\frac{11}{4}$ ।

34. $2x^2 + 3x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় m, n হলে $|m - n|$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{4}$
সমাধান: (a); $m + n = -\frac{3}{2}$; $mn = \frac{1}{2}$; $(m - n)^2$
$= (m + n)^2 - 4mn = \frac{9}{4} - 4 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$
$\therefore |m - n| = \frac{1}{2}$

35. $x^3 - px^2 - qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলির বিপরীত মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^3 + px^2 + px + r = 0$
(b) $x^3 + qx^2 + rx + p = 0$
(c) $rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$
(d) $rx^3 - px^2 + px - 1 = 0$
সমাধান: (c); $\alpha + \beta + \gamma = p$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -q$
$\alpha\beta\gamma = r$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$
$= \frac{-q}{r}$; $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{p}{q}$; $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{r}$
$\therefore$ সমীকরণ, $x^3 + \frac{q}{r}x^2 + \frac{p}{q}x - \frac{1}{r} = 0$
$\Rightarrow rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$

36. $2x^2 + 2x - k$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে, k এর সঠিক মান নিচের কোনটি?
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{1}{2}$
সমাধান: (d); $2^2 + 8k = 0 \therefore k = -\frac{1}{2}$

37. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $2 + \sqrt{-3}$ হলে- [Ans: b]
(i) অপর মূলটি $2 + i\sqrt{3}$ (ii) অপর মূলটি $2 - \sqrt{-3}$
(iii) দ্বিঘাত সমীকরণটি হবে $x^2 - 4x + 7 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

38. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 - i$ হলে a এবং b এর মান নিম্নের কোন দুইটি? [$ab \in \mathbb{R}$]
(a) $a = 2, b = 1$ (b) $a = -2, b = 2$
(c) $a = 2, b = 2$ (d) $a = 2, b = -2$
সমাধান: (b); Option test. $a = -2$ ও $b = 2$ বসালে মূলদ্বয় $1 \pm i$ হয়।

39. $x^3 + x^2 + 4x + 7 = 0$ একটি— [Ans: a]
(i) এক চলকের বহুপদী সমীকরণ
(ii) ত্রিঘাতবিশিষ্ট বহুপদী সমীকরণ
(iii) সমমাত্রিক বহুপদী সমীকরণ
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 5x + k = 0$

40. $x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়— [Ans: c]
(i) সমান (ii) এর গুণফল -1
(iii) এর একটি অপরটির গুণাত্মক বিপরীত
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

41. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল i হলে অপর মূলদ্বয়ের গুণফল কোনটি?
(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1
সমাধান: (a); একটি মূল i হলে অপর মূল হবে $-i$
$(x + i)(x - i) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$
$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) - 1(x^2 + 1) = 0$
$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0 \therefore x = 1 ; x = \pm i$
$\therefore$ অপর মূলদ্বয়ের গুণফল $-i$ ।

42. $-2x^2 - x + 3 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক কত?
(a) -25 (b) -23 (c) 23 (d) 25
সমাধান: (d); $2x^2 + x - 3 = 0$
পৃথায়ক $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-3) \times 2 = 25$

43. $x^2 - 2x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p, q হলে $p^2 + q^2 =$ কত?
(a) -2 (b) 1 (c) 2 (d) 8
সমাধান: (a); $p + q = 2$; pq
$= 3$; $p^2 + q^2 = 2^2 - 2.3 = -2$

44. $-\alpha$ ও β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি? [Ans: b]
(a) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
(b) $x^2-(\beta-\alpha)x-\alpha\beta=0$
(c) $x^2-(\alpha-\beta)x-\alpha\beta=0$
(d) $x^2-(\beta-\alpha)x+\alpha\beta=0$

45. a এবং b মূলদ হলে $(a^2-b^2)x^2+2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$ সমীকরণের মূলগুলো—
(a) কাল্পনিক (b) মূলদ (c) অমূলদ (d) সমান
সমাধান: (b); $4(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)(a^2-b^2)$
$=4a^4+4b^4+8a^2b^2-4a^4+8a^2b^2-4b^4=16a^2b^2$
$a^2.b^2$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক। $16a^2b^2$ রাশিটি পূর্ণবর্গ।
∴ মূলগুলো মূলদ।

46. $x^2+kx+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হলে k এর মান কোনটি?
(a) $k>-2$ (b) $k>2$
(c) $k<2$ (d) $-2<k<2$
সমাধান: (d); $k^2-4<0; k^2<4 \Rightarrow -2<k<2$

47. $x^2=0$ সমীকরণের পৃথায়ক কত? [Ans: b]
(a) -4 (b) 0 (c) 1 (d) 4

48. $f(x)=(x-a_1)f_1(x)$ হলে, $f_1(x)$ বহুপদীর ঘাত নিচের কোনটি? [f(x) -এর ঘাত n] [Ans: c]
(a) n (b) $n+1$ (c) $n-1$ (d) $n-2$

49. $9x^2-6px+q^2$ এর সর্বনিম্ন মান কোনটি?
(a) p^2-q^2 (b) q^2-p^2
(c) p^2+q^2 (d) p^2+2q^2
সমাধান: (b); $9x^2-6px+q^2=(3x)^2-2.3x.p+p^2+q^2-p^2=(3x+p)^2+q^2-p^2$
$3x+p=0$ হলে সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।
∴ সর্বনিম্ন মান $=q^2-p^2$ ।

50. দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর দুইটি মূল অশূন্য হওয়ার শর্ত- [Ans: d]
(a) $c=0$ (b) $a=0$ (c) $b=c=0$ (d) $c\neq 0$

51. $x^2+a^2x+a^4=0$ সমীকরণে a বাস্তব হলে মূলগুলি কিরূপ হবে?
(a) বাস্তব (b) জটিল (c) কাল্পনিক (d) জটিল, অসমান
সমাধান: (d); $a^4-4.a^4=-3a^4$
∴ মূল জটিল ও অসমান।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2-6x+7=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার মুল α, β.

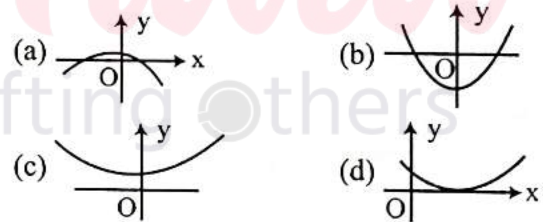
52. $x^2-4x+4=0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [Ans: d]
(a) $2,-2$ (b) $-2,-2$ (c) 2 (d) 2,2

53. $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়- [Ans: b]
(i) মূলদ্বয় $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2a}$ (ii) পৃথায়ক $=b^2-4ac$
(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল $=\frac{-b}{a}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) ii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

54. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি- [Ans: d]
(i) দ্বিঘাত হবে, যদি $a\neq 0$ হয়
(ii) দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চায়ক $\sqrt{c^2-4ab}$
(iii) $c=0$ হলে একটি মূল 0 হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i (d) i, iii

55. f(x) একটি বহুপদী সমীকরণ- [Ans: d]
(i) $(x-h)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ f(h) হয়
(ii) $x-h$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে এর একটি উৎপাদক $(x-h)$
(iii) জটিল মূলদ্বয় অনুবন্ধী
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

56. নিচের কোন লেখচিত্রের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান? [Ans: d]



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2-5x+6=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

57. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের ত্রিঘাতের সমষ্টি কোনটি? [Ans: a]
(a) $3bc-b^3$ (b) b^3-3bc
(c) $3c-b^3$ (d) b^3-3c
সমাধান: (a); মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha+\beta=-b$; $\alpha\beta=c$
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-b^3+3bc$
∴ $\alpha^3+\beta^3=3bc-b^3$

58. $x^2 + ax + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে কোন সম্পর্কটি সত্য?

(a) $a^2 + 4b + 1 = 0$ (b) $a^2 + 4b = 1$
(c) $a^2 - 4b + 1 = 0$ (d) $a^2 - 4b = 1$

সমাধান: **(d)**; মূলদ্বয় α ও $\alpha + 1$ হলে,

$\alpha + \alpha + 1 = -a \therefore \alpha = \frac{1+a}{-2}$

$\alpha(\alpha + 1) = b \Rightarrow \left(\frac{1+a}{-2}\right)^2 + \frac{1+\alpha}{-2} = b \Rightarrow \frac{1+a^2+2a}{4} - \frac{1+a}{2} = b$

$\Rightarrow 1 + a^2 + 2a - 2 - 2a = 4b \therefore a^2 - 4b = 1$

59. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ এর মান কত? **[Ans: b]**

(a) $a^2 + 2b$ (b) $a^2 - 2b$
(c) $a^2 + 2bc$ (d) $a^2 - 2bc$

সমাধান: **(b)**; $\alpha + \beta + \gamma = -a$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$; $\alpha\beta\gamma = -c$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b$

60. $x^4 + 3x^3 + 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ হলে, $\sum\alpha\beta$ এর মান কত?

(a) 6 (b) 5 (c) −3 (d) 0

সমাধান: **(d)**; $\sum\alpha\beta = \frac{x^2 \text{ এর সহগ}}{x^4 \text{ এর সহগ}} = 0$

61. $2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ রাশিকে $(x + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

(a) −7 (b) 17 (c) 37 (d) −15

সমাধান: **(d)**; $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$

$\therefore f(-2) = -15$

62. $(x + \alpha)(x - \beta) + (x - \beta)(x + \gamma) + (x + \gamma)(x + \alpha) = 0$ সমীকরণের মূলগুলির যোগফল শূন্য হবে যদি -

(a) $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (b) $\alpha = \beta + \gamma$
(c) $\beta = \alpha + \gamma$ (d) $\gamma = \alpha + \beta$

সমাধান: **(c)**; $(x + \alpha)(x - \beta) + (x - \beta)(x + \gamma) + (x + \gamma)(x + \alpha) = 0$

$\Rightarrow x^2 + x\alpha - x\beta - \alpha\beta + x^2 + x\gamma - \beta x - \beta\gamma + x^2 + x\alpha + x\gamma + \alpha\gamma = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + x(\alpha - \beta + \gamma - \beta + \alpha + \gamma) - \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$

মূলগুলির যোগফল $= \alpha - \beta + \gamma - \beta + \alpha + \gamma = 0$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\gamma = 2\beta \therefore \beta = \alpha + \gamma$

63. k এর মান কত হলে $(3k + 1)x^2 + (11 + k)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে?

(a) $k > 1$ (b) $k < 85$
(c) $k > 85$ (d) $1 < k < 85$

সমাধান: **(d)**; $(11 + k)^2 - 4(9)(3k + 1) < 0$

$\Rightarrow 121 + 22k + k^2 - 108k - 36 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 86k + 85 < 0 \Rightarrow (k - 85)(k - 1) < 0$

$\therefore 1 < k < 85$

64. $\alpha - \beta = 8, \alpha^3 - \beta^3 = 152$ হলে, α ও β মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? **[Ans: b]**

(a) $x^2 - 8x - 2 = 0$ (b) $x^2 - 2x - 15 = 0$
(c) $x^2 + 15x + 12 = 0$ (d) $x^2 + 12x + 8 = 0$

সমাধান: **(b)**; $\alpha - \beta = 8 \cdots\cdots\cdots$ (i)

$\alpha^3 - \beta^3 = 152 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

(ii) ÷ (i) করে পাই, $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)} = 19$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = 19 \cdots\cdots\cdots$ (iii)

$(\alpha - \beta)^2 = 8^2 \therefore \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 64 \cdots\cdots\cdots$ (iv)

(iii) − (iv) করে পাই, $\alpha\beta = -15$

$\alpha + \beta = \pm\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta} \therefore \alpha + \beta = \pm 2$

$\therefore$ সমীকরণটি- $x^2 - 2x - 15 = 0$

অথবা, $x^2 + 2x - 15 = 0$

65. যদি −1, 0 এবং 2 সমীকরণ $f(x) = 0$ এর মূল হয়, তবে $f(3x) = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল হবে- **[Ans: d]**

(a) −1,0,2 (b) 0,1,2 (c) −3,0,6 (d) $0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

সমাধান: **(d)**; $f(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2)x = 0$

$\therefore f(3x) = (3x + 1)(3x - 2)(3x) = 0$

$f(3x) = 0$ হলে $x = 0, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}$

66. $x^2 + 11x + a = 0$ এবং $x^2 + 14x + 2a = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকলে a এর মান কোনগুলি? **[Ans: a]**

(a) 0, 24 (b) 0, −24 (c) 1, −1 (d) −1, 1

সমাধান: **(a)**; সাধারণ মূল α হলে, $\alpha^2 + 11\alpha + a = 0$, $\alpha^2 + 14\alpha + 2a = 0$

$\frac{\alpha^2}{22a-14a} = \frac{\alpha}{a-2a} = \frac{1}{14-1} \therefore \frac{\alpha^2}{\alpha} = \frac{8a}{-a}$

$\therefore \alpha = -8$ আবার, $\frac{\alpha}{-a} = \frac{1}{3}$

আবার, $a = 0$ হলেও উভয় সমীকরণের সাধারণ মূল 0 হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. উদ্দীপকে: $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + b}$ এবং $\mathbf{g(x) = 3x^3 - 26x^2 + 52x - 24}$ [DB'22]

(ক) $\mathbf{x^2 + 7x + k = 0}$ সমীকরণের একটি মূল $\mathbf{-8}$ হলে $\mathbf{k}$ এর মান ও অপর মূলটি নির্ণয় কর। 2

(খ) যদি $\mathbf{f(x) = 0}$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $\mathbf{p:q}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ 4

(গ) $\mathbf{g(x) = 0}$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনে হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^2 + 7x + k = 0$ এবং একটি মূল -8 সুতরাং, $(-8)^2 + 7 \times (-8) + K = 0 \Rightarrow K = -8$
সমীকরণটি হলো, $x^2 + 7x - 8 = 0$; এটি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,
$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ [α, β হলো সমীকরণের দুটি মূল] $\Rightarrow -8 \times \beta = -8 \Rightarrow \beta = 1 \therefore$ অপর মূলটি হলো 1.

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x) = ax^2 + bx + b = 0$ ……… (i)
ধরি, সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় $p\alpha$ ও $q\alpha \therefore p\alpha + q\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow p + q = -\frac{b}{a\alpha}$ ……… (ii)
এবং $pq\alpha^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow pq = \frac{b}{a\alpha^2}$ ……… (iii)
এখন, $L.H.S = \sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{p+q}{\sqrt{pq}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{-\frac{b}{a\alpha}}{\sqrt{\frac{b}{a\alpha^2}}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 = R.H.S$ **[Showed]**

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $g(x) = 3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ ……… (i)
ধরি, মূলগুলো হলো $\alpha r, \alpha, \frac{\alpha}{r}$; শর্তমতে, $\alpha r + \alpha + \frac{\alpha}{r} = \frac{26}{3} \Rightarrow \alpha\left(r + 1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{26}{3}$ ……… (ii)
এবং, $\alpha r \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha}{r} = \frac{24}{3} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow \alpha = 2$
সমীকরণ (ii) থেকে-$2\left(r + 1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{26}{3} \Rightarrow \frac{r^2+r+1}{r} = \frac{13}{3} \Rightarrow 3r^2 + 3r + 3 = 13r \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$
$\Rightarrow r = 3, \frac{1}{3} \therefore r = 3$ হলে, $\alpha r = 6,\ \alpha = 2, \frac{\alpha}{r} = \frac{2}{3}$ এবং, $r = \frac{1}{3}$ হলে, $\alpha r = \frac{2}{3},\ \alpha = 2, \frac{\alpha}{r} = 6 \therefore$ মূলগুলো $= 2, 6, \frac{2}{3}$

02. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{mx^2 + nx + p = 0}$……..(1) [Ctg.B'22]
$\mathbf{px^2 - 4nx + 16m = 0}$ …..(2)
দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{x^3 + dx + h = 0}$.

(ক) $\mathbf{(a+1)x^2 + x + 1 = 0}$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে a এর মান বাহির কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর (1) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে (2) নং সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হইলে $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $(a+1)x^2 + x + 1 = 0$ ……… (i); শর্তমতে, সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব ও অসমান।
$\therefore$ নিশ্চায়ক > 0 হবে। $\Rightarrow 1^2 - 4(a+1) \cdot 1 > 0 \Rightarrow 1 - 4a - 4 > 0 \Rightarrow -4a - 3 > 0 \Rightarrow -4a > 3 \Rightarrow a < -\frac{3}{4}$

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $x^3 + dx + h = 0$ ……… (i) যার মূলত্রয় α, β, γ
$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$ ……… (ii); $\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = d$ ……… (iii); $\therefore \alpha\beta\gamma = -h$ ……… (iv)
এখন, $\sum\frac{1}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} = \frac{\beta^3\gamma^3 + \alpha^3\gamma^3 + \alpha^3\beta^3}{\alpha^3\beta^3\gamma^3} = \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 - 3[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma-\alpha^2\beta^2\gamma^2)]}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$
$= \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3 - 3[(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) - \alpha^2\beta^2\gamma^2]}{(\alpha\beta\gamma)^3} = \frac{d^3 - 3[d\cdot(-h)\cdot 0 - (-h)^2]}{(-h)^3} = \frac{d^3 - 3h^2}{-h^3} = \frac{3h^2 - d^3}{h^3}$

03. $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g(x) = x + 1$ [RB'22]
$\varphi(x) = lx^2 + mx + n$. $\Psi(x) = nx^2 + mx + l$

(ক) দেখাও যে, $2x^2 + 6x - 8 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। 2

(খ) $\varphi(x) = 0$ এবং $\Psi(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকলে m কে l ও n এর মাধমে প্রকাশ কর। 4

(গ) $f(x) \cdot g(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় p, q, r হলে $\sum p^3q$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 + 6x - 8 = 0$ ∴নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 36 + 64 = 100$
অর্থাৎ $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ, সুতরাং মূলদ্বয় মূলদ হবে।

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $\phi(x) = lx^2 + mx + n = 0$ ……… (i) এবং $\psi(x) = nx^2 + mx + l = 0$ ……… (ii)
সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল α ∴ $l\alpha^2 + m\alpha + n = 0$ ……… (iii) এবং $n\alpha^2 + m\alpha + l = 0$ ……… (iv)
(iii) ও (iv) থেকে $\Rightarrow \frac{\alpha^2}{ml - mn} = \frac{\alpha}{n^2 - l^2} = \frac{1}{ml - mn}$ ……… (v)
সমীকরণ (v) হতে, $\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$ এবং $\alpha = \frac{n^2 - l^2}{ml - mn}$
$\alpha = 1$ হলে, $n^2 - l^2 = m(l - n) \Rightarrow m = -(n + l)$; $\alpha = -1$ হলে, $n^2 - l^2 = m(n - l) \Rightarrow m = n + l$

গ. প্রদত্ত রাশি, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ এবং $g(x) = x + 1$
শর্তমতে, $f(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ ……… (i)
মূলত্রয়, p, q, r হলে, $p + q + r = 3$ ……… (ii); $pq + qr + pr = 1$ ……… (iii); $pqr = -5$ ……… (iv)
এখন, $\sum p^3q = p^3q + p^3r + q^3p + q^3r + r^3p + r^3q$
$= p^3q + pq^3 + pqr^2 + q^3r + qr^3 + p^2qr + r^3p + rp^3 + pq^2r - pqr^2 - p^2qr - pq^2r$
$= pq(p^2 + q^2 + r^2) + qr(p^2 + q^2 + r^2) + rp(p^2 + q^2 + r^2) - pqr(p + q + r)$
$= (p^2 + q^2 + r^2)(pq + qr + rp) - pqr(p + q + r)$
$= [(p + q + r)^2 - 2(pq + qr + rp)](pq + qr + rp) - pqr(p + q + r)$
$= [(3)^2 - 2 \cdot 1]1 \cdot -(-5) \times 3 = (9 - 2) + 15 = 22$

04. $f_1(x) = 4x^2 - 7x + 3$ [RB'22]
$f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

(খ) $f_2(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha = 9, \beta = 2$ এবং $\gamma = -\frac{1}{3}(a + 2)$. 4

(গ) $f_1(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p, q হলে $\frac{1}{p^3}$ ও $\frac{1}{q^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$; যেখানে, $\alpha = 9, \beta = 2, \gamma = -\frac{1}{3}(a + 2)$
∴ সমীকরণটি হলো: $9x^2 + 2x - \frac{1}{3}(a + 2) = 0$ ……… (i)
ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়, p ও p^2 ∴ $p^2 + p = -\frac{2}{9} \Rightarrow p^2 + p + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$
এখন, $p = -\frac{1}{3}$ হলে, $-\frac{1}{27} = -\frac{1}{27}(a + 2) \Rightarrow a = -2$ | $p = -\frac{2}{3}$ হলে, $-\frac{8}{27} = -\frac{1}{27}(a + 2) \Rightarrow a + 2 = 8 \Rightarrow a = 6$

গ. $f_1(x) = 4x^2 - 7x + 3 = 0$ ……… (i); যার মূলদ্বয় p ও q
∴ $p + q = \frac{7}{4}$ ……… (ii) এবং $pq = \frac{3}{4}$ ……… (iii) ∴ $p - q = \sqrt{(p + q)^2 - 4pq} = \sqrt{\frac{49}{16} - 3} = \frac{1}{4}$ ……… (iv)
এখন, (ii) + (iv) $\Rightarrow 2p = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow p = 1$ এবং (ii) − (iv) $\Rightarrow 2q = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow q = \frac{3}{4}$
∴ $\frac{1}{p^3}$ ও $\frac{1}{q^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে, $x^2 - \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right)x + \frac{1}{p^3q^3} = 0$
$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}\right)x + \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{91}{27}x + \frac{64}{27} = 0 \Rightarrow 27x^2 - 91x + 64 = 0$ **(Ans.)**

05. $P(x) = ax^2 + bx + c$ [SB'22]

(ক) $x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $ax^2 - 2bx + 4c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 2π হলে প্রমাণ কর যে, $b^2 - 4ac = 4a^2\pi^2$। 4

সমাধান

ক প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - 4x + 4 = 0$; $\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

অর্থাৎ, $b^2 - 4ac = 0$; সুতরাং, মূলদ্বয় বাস্তব, সমান ও মূলদ হবে।

খ প্রদত্ত সমীকরণ, $p(x) = ax^2 + bx + c = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় α ও β $\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots (ii)$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a} \ldots\ldots\ldots (iii)$

আবার, $ax^2 - 2bx + 4c = 0 \ldots\ldots\ldots (v)$

ধরি, সমীকরণ (iv) এর মূলদ্বয় α_1 ও β_1 $\therefore \alpha_1 + \beta_1 = \frac{2b}{a} \ldots\ldots\ldots (iv)$ এবং $\alpha_1\beta_1 = \frac{4c}{a} \ldots\ldots\ldots (vi)$

$\therefore \alpha_1 - \beta_1 = \sqrt{(\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1} = \sqrt{\frac{4b^2}{a^2} - 4 \cdot \frac{4c}{a}} = 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = 2\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4 \cdot \alpha\beta}$

$= 2(\alpha - \beta) \ldots\ldots\ldots (vii)$

আবার, $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{2b}{a} = -2(\alpha + \beta) \ldots\ldots\ldots (viii)$

$(vii) + (viii) \Rightarrow 2\alpha_1 = -2\alpha - 2\beta + 2\alpha - 2\beta \Rightarrow 2\alpha_1 = -4\beta \Rightarrow \alpha_1 = -2\beta$

$(viii) - (vii) \Rightarrow 2\beta_1 = -2\alpha - 2\beta - 2\alpha + 2\beta \Rightarrow 2\beta_1 = -4\alpha \Rightarrow \beta_1 = -2\alpha$

গ $p(x) = ax^2 + bx + c = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$ ধরি, (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়, α ও $\alpha + 2\pi$

শর্তমতে, $\alpha + \alpha + 2\pi = -\frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots (ii)$ এবং $\alpha^2 + 2\pi\alpha = \frac{c}{a} \ldots\ldots\ldots (iii)$

$(ii)^2 - 4 \times (iii) \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = (2\alpha + 2\pi)^2 - 4(\alpha^2 + 2\pi\alpha)$

$\Rightarrow \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = 4\alpha^2 + 8\pi\alpha + 4\pi^2 - 4\alpha^2 - 8\pi\alpha \Rightarrow b^2 - 4ac = 4\pi^2\alpha^2$ **[Proved]**

06. $z = x + iy$ একটি জটিল রাশি এবং $g(x) = x^2 + 2x + q$ একটি ফাংশন। [SB'22]

(ক) $(2 - 3i)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $q^2 - 5q + 8 = 0$। 4

সমাধান

ক সমীকরেণের প্রদত্ত একটি মূল $(2 - 3i)$; $\therefore$ অপর অনুবন্ধী মূল হবে $(2 + 3i)$

$\therefore (2 + 3i)$ ও $(2 - 3i)$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি হবে-

$x^2 - (2 + 3i + 2 - 3i)x + (2 + 3i)(2 - 3i) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 13 = 0$

গ $g(x) = x^2 + 2x + q = 0; \ldots\ldots\ldots (i)$

ধরি, মূলদ্বয়, α ও α^2 $\therefore \alpha + \alpha^2 = -2 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$ এবং $\alpha^3 = q \ldots\ldots\ldots (iii)$

$L.H.S = q^2 - 5q + 8 = (\alpha^3)^2 - 5\alpha^3 + 8 = \alpha^6 - 5\alpha^3 + 8$

$= \alpha^6 + \alpha^5 + 2\alpha^4 - \alpha^5 - \alpha^4 - 2\alpha^3 - \alpha^4 - \alpha^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\alpha + 4\alpha^2 + 4\alpha + 8$

$= \alpha^4(\alpha^2 + \alpha + 2) - \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 2) - \alpha^2(\alpha^2 + \alpha + 2) - 2\alpha(\alpha^2 + \alpha + 2) + 4(\alpha^2 + \alpha + 2)$

$= 0 = R.H.S$ **[Proved]**

07. উদ্দীপক-১: $x^2 - bx - c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান। [BB'22]
উদ্দীপক-২: $ax^2 + 2bx + c = 0$ এর একটি মূল
$cx^2 + 2bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের তিনগুণ।
(ক) $2x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্য দেখাও যে, $b^3 + c(3b + 1) - c^2 = 0$ 4
(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $c = 3a$ অথবা $12b^2 = (c + 3a)^2$ 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $x^2 - bx - c = 0$ ……… (i); সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও α^2 $\therefore \alpha + \alpha^2 = b$ ……… (ii) এবং $\alpha^3 = -c$ ……… (iii)
$L.H.S = b^3 + c(3b + 1) - c^2 = (\alpha + \alpha^2)^3 + (-\alpha^3)(3\alpha^2 + 3\alpha + 1) - (-\alpha^3)^2$
$= \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot \alpha^2 + 3\alpha \cdot \alpha^4 + \alpha^6 - 3\alpha^5 - 3\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^6; = \alpha^3 + 3\alpha^4 + 3\alpha^5 - 3\alpha^5 - 3\alpha^4 - \alpha^3$
$= 0 = R.H.S$ **[Showed]**

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^2 + 2bx + c = 0$ ……… (i); $cx^2 + 2bx + a = 0$ ……… (ii)
ধরি, সমীকরণ (i) এর মূলদ্বয় 3α ও β এবং সমীকরণ (ii) এর মূলদ্বয় α ও γ
শর্তমতে, $3\alpha + \beta = -\frac{2b}{a}$ ……… (iii); $3\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ……… (iv) এবং $\alpha + \gamma = -\frac{2b}{c}$ ……… (v); $\alpha\gamma = \frac{a}{c}$ ……… (vi)
সমীকরণ (i) ও (ii) $x = 3\alpha$ ও $x = \alpha$ বসিয়ে, $9a\alpha^2 + 6b\alpha + c = 0$; $c\alpha^2 + 2b\alpha + a = 0$
$\therefore \frac{\alpha^2}{6ba-2bc} = \frac{\alpha}{c^2-9a^2} = \frac{1}{18ab-6bc}$ এখন, $\alpha^2 = \frac{6ab-2bc}{18ab-6bc} = \frac{2(3ab-bc)}{6(3ab-bc)} = \frac{1}{3} \therefore \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\alpha = \frac{c^2-9a^2}{18ab-6bc} = \frac{(c+3a)(c-3a)}{6b(3a-c)} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{(c+3a)^2(c-3a)^2}{36b^2(3a-c)^2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{(c+3a)^2(c-3a)^2}{36b^2(3a-c)^2}$
$\Rightarrow 12b^2(3a - c)^2 = (c + 3a)^2(c - 3a)^2 \Rightarrow (c - 3a)^2\,[12b^2 - (c + 3a)^2] = 0$
হয়, $(c - 3a)^2 = 0 \Rightarrow c = 3a$ অথবা, $12b^2 - (c + 3a)^2 = 0 \Rightarrow 12b^2 = (c + 3a)^2$

08. উদ্দীপক-১: $ax^3 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ। [BB'22]
উদ্দীপক-২: $(y + ix)^{\frac{1}{3}} = a + ib$ একটি সমীকরণ।
(ক) $3x^2 + 2x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান বের কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}$ ও $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^2 + 2x + 2 = 0$; যার মূলদ্বয় α ও β $\therefore \alpha + \beta = -\frac{2}{3}$ ……… (i) এবং $\alpha\beta = \frac{2}{3}$ ……… (ii)
$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -1$

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $ax^3 + bx + c = 0$; যার মূলত্রয় α, β, γ
$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0$ ……… (i) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{b}{a}$ ……… (ii); $\alpha\beta\gamma = -\frac{c}{a}$ ……… (3)
এখন, $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}, \frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}, \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ এর ক্ষেত্রে, $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)+\beta^2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+\gamma^2(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$
$= \frac{\alpha^2.-\gamma.-\beta+\beta^2.-\gamma.-\alpha+\gamma^2.-\alpha.-\beta}{-\gamma.-\alpha.-\beta} = \frac{\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2}{-\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{-\alpha\beta\gamma} = 0$
আবার, $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}.\frac{\beta^2}{\alpha+\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}.\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}.\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2\beta^2}{-\beta.-\alpha} + \frac{\beta^2}{-\beta}.\frac{\gamma^2}{-\gamma} + \frac{\alpha^2}{-\alpha}.\frac{\gamma^2}{-\gamma} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = {}^{b}/_{a}$
আবার, $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}.\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}.\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{-\alpha.-\beta.-\gamma} = \alpha\beta\gamma = \frac{c}{a}$
$\therefore$ সমীকরণটি হবে $x^3 - \left(\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)} + \frac{\beta^2\gamma^2}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\right)x - \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} = 0$
$\Rightarrow x^3 - 0.x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow ax^3 + bx - c = 0$

09. $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ এবং $\mathbf{g(x) = x^2 - px + q}$. [JB'22]

(ক) $3x^2 - mx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলটির তিনগুণ হলে, m এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত r হলে, দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$. 4

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^2 - mx + 4 = 0$ যার মূলদ্বয়, α ও 3α $\therefore \alpha + 3\alpha = \frac{m}{3} \Rightarrow 4x = \frac{m}{3}$ ……… (i)

এবং $3\alpha^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{2}{3}$ ∴ সমীকরণ (i) থেকে, $\alpha = \frac{2}{3}$ হলে, $4x \cdot \frac{2}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 8$

$\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে, $4x \cdot -\frac{2}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = -8$ **(Ans.)**

খ. $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$; ধরি, সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও αr.

$\alpha + \alpha r = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha(r+1) = -\frac{b}{a}$ ……… (i) এবং $\alpha^2 r = \frac{c}{a}$ ……… (ii)

$(i)^2 \div (ii) \Rightarrow \frac{\alpha^2(r+1)^2}{\alpha^2 r} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ **(Showed)**

গ. $g(x) = x^2 - px + q = 0$; যার মূলদ্বয় α, β ; $\alpha + \beta = p$ ……… (i) এবং $\alpha\beta = q$ ……… (ii)

এখন, $\frac{q}{p-\alpha}$ ও $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $\therefore \frac{q}{p-\alpha} + \frac{q}{p-\beta} = \frac{q}{\beta} + \frac{q}{\alpha}$ $[\because p = \alpha + \beta]$ $= \frac{q(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{pq}{q} = p$

আবার, $\frac{q}{p-\alpha} \cdot \frac{q}{p-\beta} = \frac{q^2}{\beta.\alpha} = q$ ∴ সমীকরণটি হবে $x^2 - px + q = 0$ **(Ans.)**

10. $\mathbf{f(x) = px^2 + 2qx + r, g(x) = x^2 + (p+r)x + (p^2 + r^2 + 2q^2)}$ এবং $\mathbf{M(y) = 8y^3 - 42y^2 + 63y - 27}$. [JB'22]

(ক) $x^2 - 6x + 25 = 0$ সমীকরণের x এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হলে, দেখাও যে, $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক হবে। 4

(গ) $M(x) = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে সমীকরণটির সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $x^2 - 6x + 25 = 0$, ধরি, মূলদ্বয় α ও β $\therefore \alpha + \beta = 6$ এবং $\alpha\beta = 25$.

$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{36 - 100} = 8i$ $\therefore 2\alpha = 6 + 8i$ $\therefore \alpha = 3 + 2i$

আবার, $2\beta = 6 - 8i \Rightarrow \beta = 3 - 2i$ $\therefore x = 3 \pm 2i$

খ. $f(x) = px^2 + 2qx + r = 0$, শর্তমতে, $(2q)^2 - 4.p.r > 0 \Rightarrow 4q^2 - 4pr > 0 \Rightarrow q^2 - pr > 0 \Rightarrow q^2 > pr$ ……… (i)

আবার, $g(x) = x^2 + (p+r)x + (p^2 + r^2 + 2q^2) = 0$ ……… (ii)

সমীকরণ (ii) এর নিশ্চায়ক $= (p+r)^2 - 4.(p^2 + r^2 + 2q^2)$

$= p^2 + 2pr + r^2 - 4p^2 - 4r^2 - 8q^2 = -3p^2 + 2pr - 3r^2 - 8q^2$

$= -3p^2 - 3r^2 - 8q^2 + 2pr = -(3p^2 + 3r^2 + 8q^2 - 2pr)$ $\therefore pr < q^2$ [সমীকরণ (i) হতে]

তাই, আমরা বলতে পারি, সমীকরণ (ii) এর নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হবে।

অর্থাৎ, $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক হবে। **(Showed)**

গ. $M(x) = 8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ ……… (i)

ধরি, মূলগুলো হলো $a, ar, \frac{a}{r}$ $\therefore a + ar + \frac{a}{r} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4} \Rightarrow a\left(1 + r + \frac{1}{r}\right) = \frac{21}{4}$ ……… (ii) এবং $a^3 = \frac{27}{8}$ বা, $a = \frac{3}{2}$

(ii) থেকে $\Rightarrow \frac{3}{2}\left(r + \frac{1}{r} + 1\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2r^2 + 2r + 2 = 7r$

$\Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow 2r^2 - 4r - r + 2 = 0 \Rightarrow (r-2)(2r-1) = 0$ $\therefore r = 2, \frac{1}{2}$

এখন, $r = 2$ হলে, $\frac{a}{r} = \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; $ar = 3$ এবং $a = \frac{3}{2}$

আবার, $r = \frac{1}{2}$ হলে, $\frac{a}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ এবং $ar = \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ∴ মূলগুলি $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$

11. $10x^2 - 8x + 1 = 0$ এবং $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ দুইটি বহুপদী সমীকরণ। [CB'22]

(ক) $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় হবে উদ্দীপকে উল্লিখিত দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল ও অন্তরফলের যোগবোধক মান। 4

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে $\sum \alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $3x^2 + 2x + 1 = 0$; সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= 2^2 - 4.3.1 = 4 - 12 = -8$

যেহেতু, নিশ্চায়ক < 0; তাই, মূলদ্বয় অবাস্তব ও অসমান হবে।

খ. প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ $10x^2 - 8x + 1 = 0$

যার মূলদ্বয়, α ও β $\therefore \alpha + \beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots (i); \alpha\beta = \frac{1}{10} \dots\dots\dots (ii) \therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$= \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{4}{10}} = \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5} \dots\dots\dots (iii)$ $\therefore$ নতুন সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{4}{5}$ ও $\frac{\sqrt{6}}{5}$

$\therefore$ সমীকরণটি $x^2 - \left(\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}\right)x + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{6}}{5} = 0 \Rightarrow 25x^2 - (20 + 5\sqrt{6})x + 4\sqrt{6} = 0$

গ. $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \dots\dots\dots (i)$ যার মূলত্রয় α, β, γ

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (ii); \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \dots\dots\dots (iii); \alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (iv)$

এখন, $\Sigma\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \gamma^2\alpha + \alpha^2\gamma$

$= \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + \alpha^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha\beta\gamma - 3\alpha\beta\gamma$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\gamma(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \gamma\beta + \alpha\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = \frac{3}{2} \times 2 - 3 \times \frac{1}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

12. উদ্দীপক-১: $x^2 - 2x + b = 0$ এবং $x^2 - bx + 2 = 0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ। [CB'22]

উদ্দীপক-২: $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$.

(ক) a এর মান কত হলে $(a-1)x^2 + (a+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত সমীকরণ দুইটির মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $b^2 + 4b - 12 = 0$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $(a-1)x^2 + (a+2)x + 4 = 0$, প্রদত্ত সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে যদি, $(a+2)^2 - 4.(a-1).4 = 0$ হয়

$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 - 16a + 16 = 0 \Rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow (a-10)(a-2) = 0 \therefore a = 10, 2$

খ. $x^2 - 2x + b = 0 \dots\dots\dots (1)$ এবং $x^2 - bx + 2 = 0 \dots\dots\dots (2)$

ধরি, (1) নং সমীকরণ এর মূলদ্বয়, $\alpha, \beta \therefore \alpha + \beta = 2, \alpha\beta = b$ এবং $\alpha - \beta = c$ [ধ্রুবরাশি]

(ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α', β' ; $\alpha' + \beta' = b$; $\alpha'\beta' = 2$ এবং $\alpha' - \beta' = c$

আবার, (1) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4 - 4b} = 2\sqrt{1-b} \dots\dots\dots (3)$

(ii) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে, $\alpha' - \beta' = \sqrt{(\alpha' + \beta')^2 - 4\alpha'\beta'} = \sqrt{b^2 - 4.2} = \sqrt{b^2 - 8} \dots\dots\dots (4)$

(iii) ও (iv) হতে, $\alpha - \beta = \alpha' - \beta' = c = 2\sqrt{1-b} = \sqrt{b^2 - 8}$

$\Rightarrow 4(1-b) = b^2 - 8 \Rightarrow 4 - 4b = b^2 - 8 \Rightarrow b^2 + 4b - 12 = 0$ **(Proved)**

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = 0 \dots\dots\dots (i)$

এবং একটি মূল $1 + i$ সুতরাং অন্য একটি মূল হবে $1 - i$, ধরি, অন্য দুটি মূল α ও β $\therefore \alpha + \beta + 1 + i + 1 - i = 7$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 5 \dots\dots\dots (ii)$ এবং $\alpha.\beta.(1+i)(1-i) = 12$

$\therefore \alpha.\beta.2 = 12 \Rightarrow \alpha\beta = 6 \therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{5^2 - 4.6} = 1 \dots\dots\dots (iii)$

(ii) ও (iii) হতে, $2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$ এবং $2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2$ $\therefore$ মূলগুলো হলো, $3, 2, 1 + i, 1 - i$

13. দৃশ্যকল্প-১: $(p+1)x^2+2(p+3)x+2p+3=0$ একটি রাশি। **[Din.B'22]**
দৃশ্যকল্প-২: $ax^2+3x+c=0$ এবং $cx^2+3x+a=0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
(ক) $2x^3-9x^2+9x+2\equiv(x-2)(ax^2+bx+c)$ হলে a,b,c এর মান নির্ণয় কর যেখানে a,b এবং c ধ্রুবক। 2
(খ) p এর মান কত হলে ১ম দৃশ্যকল্পে উল্লিখিত রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? 4
(গ) যদি দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তাহলে প্রমাণ কর যে, $c+a=\pm3$. 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^3-9x^2+9x+2\equiv(x-2)(ax^2+bx+c)$
$\Rightarrow 2x^3-9x^2+9x+2\equiv ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$
$\Rightarrow 2x^3-9x^2+9x+2\equiv ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$
সমীকরণ (i) এর x^3, x^2, x ও ধ্রুব পদের সহগ সমীকৃত করে পাই, x^3 এর সমীকৃত করে পাই, $a=2$
x^2 এর সহগ সমীকৃত করে, $b-2a=-9\Rightarrow b-4=-9\Rightarrow b=-5$
ধ্রুব রাশি সহগ সমীকৃত করে পাই, $-2c=2\Rightarrow c=-1$

খ. $(p+1)x^2+2(p+3)x+2p+3=0$ সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,
$a=p+1\,;b=2\,(p+3);c=2p+3$, রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যদি নিশ্চায়ক $b^2-4ac=0$ হয়।
$\therefore b^2-4ac=0\Rightarrow4(p+3)^2-4.(p+1).(2p+3)=0\Rightarrow4(p^2+6p+9)-4(2p^2+3p+2p+3)=0$
$\Rightarrow4p^2+24p+36-8p^2-12p-8p-12=0\Rightarrow-4p^2+4p+24=0\Rightarrow p^2-p-6=0$
$\Rightarrow(p-3)(p+2)=0\therefore p=3,-2$

গ. $ax^2+3x+c=0\,\ldots\ldots\ldots(i);\ cx^2+3x+a=0\,\ldots\ldots\ldots(ii)$
ধরি, সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণমূল $\alpha\therefore a\alpha^2+3\alpha+c=0\,;\,c\alpha^2+3\alpha+a=0$
এখন, $\frac{\alpha^2}{3a-3c}=\frac{\alpha}{c^2-a^2}=\frac{1}{3a-3c}$ এবার, $\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm1$
আবার, $\alpha=\frac{(c+a)(c-a)}{3(a-c)}\Rightarrow\alpha^2=\frac{(c+a)^2}{9}\Rightarrow9\alpha^2=(c+a)^2$
$\Rightarrow(c+a)^2=9.1\ [\therefore\alpha^2=1]\Rightarrow c+a=\pm3$ **(Proved)**

14. $x^2-2ax+a^2-b^2=0\,\ldots\ldots(i)$ **[Din.B'22]**
$x^4-9x^3+27x^2-33x+14=0\,\ldots\ldots(ii)$
(ক) a,b মূলদ হলে, দেখাও যে, (i) সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদা মূলদ হবে। 2
(খ) (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha+\beta$ ও $|\alpha-\beta|$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) (ii) নং সমীকরণের একটি মূল $3-\sqrt{2}$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. 03 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ যার মূলদ্বয় α ও $\beta\therefore\alpha+\beta=2a\,\ldots\ldots\ldots(i)$ এবং $\alpha\beta=a^2-b^2\,\ldots\ldots\ldots(ii)$
$\therefore|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4a^2-4\,(a^2-b^2)}=\sqrt{4a^2-4a^2+4b^2}=2b\,\ldots\ldots\ldots(iii)$
সুতরাং $2a$ ও $2b$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হবে, $x^2-(2a+2b)x+2a.2b=0\Rightarrow x^2-2(a+b)x+4ab=0$

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2-9x^3+27x^2-33x+14=0\,\ldots\ldots\ldots(i)$
যার একটি মূল $3-\sqrt{2}$ অন্য অনুবন্ধী মূলটি হবে $3+\sqrt{2}$, ধরি, অন্য দুটি মূল α,β.
সুতরাং, $\alpha+\beta+3+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=9\Rightarrow\alpha+\beta+6=9\therefore\alpha+\beta=3\,\ldots\ldots\ldots(ii)$
আবার, $\alpha.\beta.(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=14\Rightarrow\alpha.\beta.7=14\Rightarrow\alpha\beta=2\,\ldots\ldots\ldots(iii)$
$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-4.2}=1\,\ldots\ldots\ldots(iv)$
(ii) ও (iv) থেকে, $2\alpha=4\Rightarrow\alpha=2$ এবং $2\beta=2\Rightarrow\beta=1\therefore$ মূলগুলো হলো $=2,1,3+\sqrt{2},3-\sqrt{2}$

15. $8x^2 + 2x - (b+4) = 0$ এবং $y^2 + y + 1 = 0$ দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ। [MB'22]

(ক) $2 - \sqrt{-3}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ১ম সমীকরণের একটি মূল যদি অপরটির বর্গের সমান হয় তবে b এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) ২য় সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে দেখাও যে, $\alpha^2 = \beta$ এবং $\beta^2 = \alpha$. 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত মূল $= 2 - \sqrt{-3} = 2 - \sqrt{3}\,i$ ∴ অপর অনুবন্ধী মূল $= 2 + \sqrt{3}i$

∴ উপর্যুক্ত মূলদ্বয় সংবলিত দ্বিঘাত সমীকরণটি হবে

$\Rightarrow x^2 - (2 + \sqrt{3}i + 2 - \sqrt{3}i)x + (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $8x^2 + 2x - (b+4) = 0$, ধরি, মূলদ্বয় α, α^2

শর্তমতে, $\alpha + \alpha^2 = -\frac{2}{8} \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (2\alpha+1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

আবার, $\alpha^3 = -\frac{b+4}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} = -\frac{b+4}{8} \Rightarrow b + 4 = 1 \Rightarrow b = -3$

গ. $y^2 + y + 1 = 0$; যার মূলদ্বয় α, β ∴ $\alpha + \beta = -1$ এবং $\alpha\beta = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

∴ $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{1-4} = \sqrt{3}i \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) থেকে $2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$ ∴ $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

আবার, $2\beta = -1 - \sqrt{3}i \Rightarrow \beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ এখন, $\alpha^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \beta$

আবার, $\beta^2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \alpha$ **(Showed)**

16. দৃশকল্প-১: $p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. [MB'22]

দৃশকল্প-২: $ax^2 + bx + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$cx^2 - 2bx + 4a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(খ) $p(x)$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে দেখাও যে, $a = b = c$. 4

(গ) (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় β ও γ হলে প্রমাণ কর যে, $2a + c = 0$ অথবা $(2a-c)^2 + 2b^2 = 0$. 4

সমাধান

খ. $p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$

$= x^2 - ax - bx + ab + x^2 - bx - cx + bc + x^2 - cx - ax + ac = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca$

$p(x)$ পূর্ণবর্গ হবে যদি $p(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হয়।

∴ নিশ্চায়ক $= 4(a+b+c)^2 - 4.3.(ab+bc+ca) = 4(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) - 12(ab+bc+ca)$

$= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab + 8bc + 8ca - 12ab - 12bc - 12ca = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 4.\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

$= 2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$; $p(x)$ পূর্ণবর্গ হবে যদি নিশ্চায়ক $= 0$ হয়

∴ $2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0 \Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

একাধিক বর্গ রাশির যোগফল শূণ্য হবে যদি প্রত্যেকে আলাদা আলাদাভাবে শূণ্য হয়

∴ $(a-b)^2 = 0$ বা, $a = b$; $(b-c)^2 = 0 \Rightarrow b = c$ এবং $(c-a)^2 = 0 \Rightarrow c = a$ ∴ $a = b = c$

গ. $ax^2 + bx + c = 0$ যার মূলদ্বয় α ও β এবং $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ যার মূলদ্বয় β ও γ ∴ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$; $\beta + \gamma = \frac{2b}{c}$; $\beta\gamma = \frac{4a}{c}$

উভয় সমীকরণের সাধারণ মূল β ∴ $c\beta^2 - 2b\beta + 4a = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$; $a\beta^2 + b\beta + c = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

∴ $\frac{\beta^2}{-2bc-4ab} = \frac{\beta}{4a^2-c^2} = \frac{1}{bc+2ab}$, এখন, $\beta^2 = -\frac{2(2ab+bc)}{2ab+bc} = -2$

আবার, $\beta = \frac{(2a+c)(2a-c)}{b(2a+c)}$ বা, $\beta^2 = \frac{(2a+c)^2(2a-\ )^2}{b^2(2a+c)^2}$ বা, $-2b^2(2a+c)^2 - (2a+c)^2(2a-c)^2 = 0$

বা, $(2a+c)^2[2b^2 + (2a-c)^2] = 0$; হয়, $(2a+c)^2 = 0$ বা, $2a + c = 0$ অথবা, $2b^2 + (2a-c)^2 = 0$ **(Proved)**

17. দৃশ্যকল্প-২: $(m^2+n^2)x^2+2(mp+nq)x+p^2+q^2=0$ [Ctg.B'22]

(গ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে তারা সমান হবে এবং সমান মূলগুলো নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. $(m^2+n^2)x^2+2(mp+nq)x+p^2+q^2=0 \therefore a=m^2+n^2; b=2(mp+nq); c=p^2+q^2$
$\therefore D=b^2-4ac=4(mp+nq)^2-4(m^2+n^2)(p^2+q^2)$
$=4(m^2p^2+2mnpq+n^2q^2-m^2p^2-n^2p^2-m^2q^2-n^2q^2)$
$=4(-m^2q^2+2mqnp-n^2p^2)=-4(m^2q^2-2mq\cdot np+n^2p^2)=-4(mq-np)^2\leq 0$
কিন্তু সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব। তাই, $D\not<0 \therefore D=0$
অর্থাৎ, মূলদ্বয় বাস্তব হলে সমান হবে। সমান মূল $=-\frac{b}{2a}=-\frac{2(mp+nq)}{2(m^2+n^2)}=-\frac{mp}{m^2+n^2}$

18. $f(x)=x^2+2px+q$ [DB'21]
$g(x)=x^2+mx+\ell$

(ক) m এর মান কত হলে $(m^2-3)x^2+3mx+3m+1=0$ সমীকরণের মূল দুটি পরস্পর গৌণিক বিপরীতক হবে? 2

(খ) $f(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে $q(x+1)^2=4p^2x$ সমীকরণের মূল দুটি α এবং β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) $f(x)=0$ সমীকরণে $p=\frac{\ell}{2}$ এবং $q=m$. আবার, $f(x)=0$ ও $g(x)=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল বিদ্যমান হলে দেখাও যে, $2x^2+(\ell+m-2)x=(\ell+m-2)^2$ সমীকরণের মূলদ্বয় 3 এবং $\frac{-3}{2}$. 4

সমাধান

ক. $(m^2-3)x^2+3mx+(3m+1)=0$ এর মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha}$ হলে, $\alpha.\frac{1}{\alpha}=\frac{3m+1}{m^2-3}\Rightarrow m^2-3=3m+1$
$m^2-3m-4=0; (m-4)(m+1)=0 \therefore m=4,-1$ **(Ans.)**

খ. $x^2+2px+q=0 \therefore \alpha+\beta=-2p$ ……… (i); $\alpha\beta=q$ ……………… (ii)
এখন, $q(x+1)^2=4p^2x\Rightarrow \alpha\beta(x+1)^2=(-2p)^2x$
$\Rightarrow \alpha\beta(x+1)^2=(\alpha+\beta)^2x\Rightarrow \alpha\beta(x^2+2x+1)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)x$
$\Rightarrow \alpha\beta x^2+2\alpha\beta x+\alpha\beta=\alpha^2x+2\alpha\beta x+\beta^2x\Rightarrow \alpha\beta x^2-\alpha^2x-\beta^2x+\alpha\beta=0$
$\Rightarrow \alpha x(\beta x-\alpha)-\beta(\beta x-\alpha)=0\Rightarrow(\alpha x-\beta)(\beta x-\alpha)=0$
হয়, $\alpha x=\beta=0 \therefore x=\frac{\beta}{\alpha}$ অথবা, $\beta x=\alpha\Rightarrow x=\frac{\alpha}{\beta} \therefore$ মূলদ্বয় $\frac{\beta}{\alpha}$ ও $\frac{\alpha}{\beta}$

গ. $f(x)=0\Rightarrow x^2+2px+q=0\Rightarrow x^2+2\times\frac{\ell}{2}x+m=0\Rightarrow x^2+\ell x+m=0$ ……… (i)
$g(x)=0\Rightarrow x^2+mx+\ell=0$ ………. (ii)
এখন, সাধারণ মূল α হলে,
$\alpha^2+\ell\alpha+m=0$ ……… (iii)
$\alpha^2+m\alpha+\ell=0$ ……… (iv)
(−) করে, $(\ell-m)\alpha+(m-\ell)=0\Rightarrow\alpha=1$
(iii) এ বসাই, $1+\ell+m=0 \therefore \ell+m=-1$
এখন, $2x^2+(\ell+m-2)x=(\ell+m-2)^2$
$\Rightarrow 2x^2-3x=9\Rightarrow 2x^2-3x-9=0\Rightarrow 2x^2-6x+3x-9=0$
$\Rightarrow 2x(x-3)+3(x-3)=0\Rightarrow(x-3)(2x+3)=0$
হয়, $x-3=0; x=3$ অথবা, $2x+3=0 \therefore x=-\frac{3}{2} \therefore$ মূলদ্বয় 3 ও $-\frac{3}{2}$ (দেখানো হলো)

19. $\varphi(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ [DB'21]
$\Psi(x)=x^2-mx+\ell$

(ক) a এর মান কত হলে $(a-1)x^2-(a+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে? 2

(খ) $\phi(x)=0$ সমীকরণে $a=4, b=-2, c=0$ এবং $d=3$ হলে এবং মূলগুলো α,β,γ হলে $\sum\alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $\varphi(x)=0$ সমীকরণে $a=0, b=1, c=-\ell$ এবং $d=m$ হলে; $\varphi(x)=0$ এবং $\Psi(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুবক রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $\ell+m+4=0$. 4

সমাধান

ক. 12 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 11 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $Q(x) = 0.x^3 + 1.x^2 + (-\ell)x + m = 0 \Rightarrow x^2 - \ell x + m = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = \ell$; $\alpha\beta = m$

$\Psi(x) = 0 \Rightarrow x^2 - mx + \ell = 0$ এর মূলদ্বয় α_1, β_1 হলে, $\alpha_1 + \beta_1 = m$; $\alpha_1\beta_1 = \ell$

প্রশ্নমতে, $\alpha - \beta = \alpha_1 - \beta_2 = k \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 4\alpha_1\beta_1 \Rightarrow \ell^2 - 4m = m^2 - 4\ell \Rightarrow \ell^2 - m^2 + 4\ell - 4m = 0$

$\Rightarrow (\ell + m)(\ell - m) + 4(\ell - m) = 0 \Rightarrow (\ell - m)(\ell + m + 4) = 0$

$\ell \neq m$ কারণ $\ell = m$ হলে সমীকরণদ্বয় একই হয়ে যায়। $\therefore \ell + m + 4 = 0$ **(Proved)**

20. $\mathbf{x^2 + cx + b = 0}$ **সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.** **[RB'21]**

(ক) **a এর মান কত হলে $x^2 - 4ax + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে?** 2

(খ) **$b(x^2 + 1) - (c^2 - 2b)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।** 4

(গ) **$\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. মূলদ্বয় জটিল হলে $D < 0 \Rightarrow 16a^2 - 16 < 0 \Rightarrow 16(a^2 - 1) < 0 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow |a|^2 < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$ **(Ans.)**

খ. $x^2 + cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta = -c \cdots\cdots\cdots (i)$; $\alpha\beta = b \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i)^2 \div (ii) \Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{c^2}{b} \cdots\cdots\cdots (iii)$

$b(x^2 + 1) - (c^2 - 2b)x = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - \left(\frac{c^2}{b} - 2\right)x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 1 - \left\{\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} - 2\right\}x = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - \left\{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right\}x = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left\{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right\}x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \therefore x = \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $b(x^2 + 1) - (c^2 - 2b)x = 0 \Rightarrow \alpha\beta(x^2 + 1) - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x$

$\alpha\beta x^2 + \alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2)x \Rightarrow (\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0 \Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $\alpha + \beta = -c \cdots\cdots\cdots (i)$; $\alpha\beta = b \cdots\cdots\cdots (ii)$

নির্ণেয় সমীকরণ- $x^2 - \left\{\alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha}\right\}x + \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left\{\alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right\}x + \left(\alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \left\{-c - \frac{c}{b}\right\}x + \left\{b + 2 + \frac{1}{b}\right\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{bc+c}{b}\right)x + \left(\frac{b^2+2b+1}{b}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{bc+c}{b}\right)x + \frac{(b+1)^2}{b} = 0 \Rightarrow bx^2 + (bc + c)x + (b + 1)^2 = 0$ **(Ans.)**

21. উদ্দীপক-১: $\mathbf{x^3 - 2x^2 + 1 = 0}$ **সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c.** **[DB'21]**

উদ্দীপক-২: $\mathbf{px^2 + qx + r = 0}$ **সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান।**

(ক) **$x^2 - x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে, k এর মান নির্ণয় কর।**

(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে **$\sum a^2 b$** এর মান নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, **$r(p - q)^3 = p(r - q)^3$.**

সমাধান

ক. মূলদ্বয় বাস্তব হলে $D \geq 0 \Rightarrow 1 - 4k \geq 0 \Rightarrow 4k - 1 \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ. $\sum a^2b = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$

$= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ca(a+b+c) - 3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$

$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণে, $ab + bc + ca = 0; abc = -1$

$\therefore \sum a^2b = (a+b+c) \times 0 - 3(-1) = 3$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\sum a^2b = \sum a \sum ab - 3aby = 2 \times 0 - 3(-1) = 3$ **(Ans.)**

$\sum a = a + b + c = 2 \sum ab = 0\,; abc = -1$

গ. শর্তমতে, মূলদ্বয় α^2, α হলে $\alpha^2 + \alpha = -\frac{q}{p} \cdots\cdots\cdots (i)\,; \alpha^3 = \frac{r}{p} \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i) + 1 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{p-q}{p} \cdots\cdots\cdots (iii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = \frac{r-q}{p} \Rightarrow \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) = \frac{r-q}{p} \Rightarrow \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 1)^3 = \frac{(r-q)^3}{p^3}$

$\Rightarrow \frac{r}{p} \cdot \frac{(p-q)^3}{p^3} = \frac{(r-q)^3}{p^3}$ [ii ও (iii) থেকে] $\Rightarrow r(p-q)^3 = p(r-q)^3$ **(Showed)**

22. দৃশ্যকল্প-১: $2x^2 - 3x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β. **[Ctg.B'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + x - k = 0$ এবং $x^2 - 7x + (k+4) = 0$ দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ক) $3x^2 + 2x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে সমীকরণ দুটির একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = \frac{3}{2}; \alpha\beta = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নতুন সমীকরণে, মূলদ্বয়ের যোগফল $= (\alpha + \beta) + \alpha\beta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= (\alpha + \beta)(\alpha\beta) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ $\therefore$ নতুন সমীকরণ: $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \therefore 4x^2 - 8x + 3 = 0$ **(Ans.)**

গ. ধরি, সাধারণ মূল α হলে, $\alpha^2 + \alpha - k = 0 \ldots\ldots\ldots(i); \alpha^2 - 7\alpha + (k+4) = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$\frac{\alpha^2}{(k+4)-7k} = \frac{\alpha}{-k-(k+4)} = \frac{1}{-7-1} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4-6k} = \frac{\alpha}{-2k-4} = \frac{1}{-8} \therefore (4-6k)(-8) = (-2k-4)^2$

$\Rightarrow 8(6k-4) = (2k+4)^2 \Rightarrow 48k - 32 = 4k^2 + 16k + 16 \Rightarrow 4k^2 - 32k + 48 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 8k + 12 = 0 \Rightarrow (k-2)(k-6) = 0 \therefore k = 2, 6$ **(Ans.)**

23. দৃশ্যকল্প-১: $8x^3 - 52x^2 + 78x - 27 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। **[Ctg.B'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

(ক) $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β ও γ হলে $\sum \frac{1}{\alpha^2}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর ত্রিঘাত সমীকরণটির মূলত্রয় গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর দুইটি মূলের অনুপাত 3:2 হলে সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ এর মূলত্রয় α, β ও γ হলে, $\alpha + \beta + \gamma = a \cdots\cdots$ (i); $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \cdots\cdots$ (ii)

$\alpha\beta\gamma = c \cdots\cdots$ (iii) ; এখন, $\sum\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \frac{(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$= \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta.\beta\gamma+\beta\gamma.\gamma\alpha+\gamma\alpha.\alpha\beta)}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\ (\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{b^2-2ca}{c^2}$ **(Ans.)**

খ. $8x^2 - 52x^2 + 78x - 27 = 0$ এর মূলত্রয় $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ হলে, $\frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = \frac{52}{8} \Rightarrow \alpha\left(1 + r + \frac{1}{r}\right) = \frac{13}{2} \ldots\ldots$ (i)

$\frac{\alpha^2}{r} + \alpha^2 r + \alpha^2 = \frac{78}{8} \Rightarrow \alpha^2\left(1 + r + \frac{1}{r}\right) = \frac{39}{4} \ldots\ldots$ (ii); $\frac{\alpha}{r}.\alpha.\alpha r = \frac{27}{8} \Rightarrow \alpha^3 = \frac{27}{8}\ \therefore \alpha = \frac{3}{2}$

(i) হতে, $\frac{3}{2} \times \left(1 + r + \frac{1}{r}\right) = \frac{13}{2} \Rightarrow r + \frac{1}{r} = \frac{13}{3} - 1 \Rightarrow \frac{r^2+1}{r} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \Rightarrow 3r^2 - 9r - r + 3 = 0$

$\Rightarrow 3r(r-3) - 1(r-3) = 0 \Rightarrow (r-3)(3r-1) = 0$

হয়, $r = 3$ | অথবা, $r = \frac{1}{3}$

$\therefore$ মূলত্রয় $\frac{\frac{3}{2}}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \times 3 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$ **(Ans.)**

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণ, $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ এর মূলত্রয় $3\alpha, 2\alpha$ ও β

$\therefore 3\alpha + 2\alpha + \beta = 9$

$\Rightarrow 5\alpha + \beta = 9$

$\therefore \beta = 9 - \alpha \ldots\ldots$ (i)

$6\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\alpha\beta = 14 \ldots\ldots$ (ii)

$\Rightarrow 6\alpha^2 + 5\alpha\beta = 14 \Rightarrow 6\alpha^2 + 5\alpha(9 - 5\alpha) = 14$

$\Rightarrow 6\alpha^2 + 45\alpha - 25\alpha^2 = 14 \Rightarrow 19\alpha^2 - 45\alpha + 14 = 0 \therefore \alpha = 2, \frac{7}{19}$

$\alpha = 2$ হলে, $\beta = -1$; $\alpha = \frac{7}{19}$ হলে, $\beta = \frac{136}{19}$; $(3\alpha)(2\alpha)\beta = -24 \Rightarrow \alpha^2\beta = -4 \ldots\ldots$ (iii)

$\alpha = 2$ ও $\beta = -1$ (iii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। কিন্তু $\alpha = \frac{7}{19}$ ও $\beta = \frac{136}{19}$ (iii) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore \alpha = 2$ ও $\beta = -1 \therefore$ মূলত্রয়: $6, 4, -1$ **(Ans.)**

24. $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c.}$ **[SB'21]**

উদ্দীপকের আলোকে নিচের (খ) ও (গ) প্রশ্নের উত্তর দাও:

(ক) দেখাও যে, $\mathbf{b = p}$ না হলে, $\mathbf{2x^2 - 2(b + p)x + b^2 + p^2 = 0}$ সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না। 2

(খ) $\mathbf{b = c}$ এবং $\mathbf{f(x) = 0}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $\mathbf{p : q}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0.$ 4

(গ) $\mathbf{f(x) = 0}$ সমীকরণের মূল দুটি $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ হলে $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\beta}}$ ও $\boldsymbol{\beta + \frac{1}{\alpha}}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $2x^2 - 2(b + p)x + b^2 + p^2 = 0 \Rightarrow D = 4(b + p)^2 - 8(b^2 + p^2)$

$\Rightarrow D = 4(b^2 + 2bp + p^2) - 8(b^2 + p^2) \Rightarrow D = -4(b - p)^2$

$\therefore D \leq 0$, তাই মূল বাস্তব হলে $D = 0 \Rightarrow b - p = 0 \Rightarrow b = p$

$\therefore b = P$ না হলে $2x^2 - 2(b + p)x + b^2 + p^2 = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব হতে পারে না।

খ. **01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।**

গ. $ax^2 + bx + c = 0$ হলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ldots\ldots$ (i); $\alpha\beta = \frac{c}{a} \ldots\ldots$ (ii)

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ- $x^2 - \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x + \left(\alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right)x + \left(\frac{c}{a} + 2 + \frac{a}{c}\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{bc+a}{ac}\right)x + \frac{(c+a)^2}{ac} = 0 \Rightarrow acx^2 + (bc + ab)x + (c + a)^2 = 0$

25. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। [SB'21]

(ক) p এর মান কত হলে $px^2 + 4x + 3$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? 2

(খ) যদি $a = 3, b = -2, c = 0, d = 1$ হয় এবং সমীকরণটির মূলত্রয় α, β, γ হয় তবে $\sum \alpha^2\beta$ বের কর। 4

(গ) যদি $a = 1, b = -9, c = 23, d = -15$ হয় এবং সমীকরণটির একটি মূল 3 হয়, তবে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. শর্তমতে, $16 - 12p = 0 \Rightarrow p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

খ. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$; $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$; $\sum \alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + +\beta^2\gamma + \gamma^2\beta + \gamma^2\alpha + \alpha^2\gamma$

$= \alpha\beta(\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma\alpha(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\ (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma) \times 0 - 3.\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$ **(Ans.)**

গ. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ এর একটি মূল 3 হলে $(x - 3)$ রাশিটির একটি উৎপাদক।

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 18x + 5x - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2(x-3) - 6x(x-3) + 5(x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x^2 - 6x + 5) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-5)(x-1) = 0 \therefore x = 1,3,5 \therefore$ অপর মূলগুলি 1, 5 **(Ans.)**

26. $f(x) = x^2 - 5x + 4$; $g(x) = px^2 + qx + r, p \neq 0.$ [BB'21]

(ক) উৎপাদকের সাহায্যে $x^2 + i2\sqrt{2}x + 16 = 0$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে $a^2 + b^2$ ও $a^3 + b^3$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করে পৃথায়ক ব্যাখ্যা কর। 4

সমাধান

ক. $x^2 + i2\sqrt{2}x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2.x.\sqrt{2}i + (\sqrt{2}i)^2 = -16 - 2 \Rightarrow (x + \sqrt{2}i)^2 = (3\sqrt{2}i)^2$

$\Rightarrow (x + \sqrt{2}i)^2 - (3\sqrt{2}i)^2 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{2}i + 3\sqrt{2}i)\ (x + \sqrt{2}i - 3\sqrt{2}i) = 0$

$\Rightarrow (x + 4\sqrt{2}i)\ (x - 2\sqrt{2}i) = 0 \therefore x = -4\sqrt{2}i$ অথবা $x = 2\sqrt{2}i$

খ. $f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0$; এর মূলদ্বয় $a, b \Rightarrow x^2 - 4x - x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \therefore a = 4$ ও $b = 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 16 + 1 = 17$; $a^3 + b^3 = 64 + 1 = 65$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - \{(a^2 + b^2) + (a^3 + b^3)\}x + (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (17 + 65)x + 17 \times 65 = 0 \Rightarrow x^2 - 82x + 1105 = 0$

গ. $g(x) = px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow p^2x^2 + pqx + pr = 0 \Rightarrow (px)^2 + 2(px)\left(\frac{q}{2}\right) + \frac{q^2}{4} = \frac{q^2}{4} - pr$

$\Rightarrow \left(px + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2 - 4pr}{4} \Rightarrow px + \frac{q}{2} = \pm\frac{\sqrt{q^2 - 4pr}}{2} \Rightarrow x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$

এখানে, পৃথায়ক $= q^2 - 4pr$

$q^2 - 4pr > 0$ ও বর্গ হলে মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান

$q^2 - 4pr > 0$ ও পূর্ণবর্গ না হলে মূলদ্বয় অমূলদ ও অসমান

$q^2 - 4pr = 0$ হলে মূলদ্বয় মূলদ ও সমান

$q^2 - 4pr < 0$ হলে মূলদ্বয় অবাস্তব ও অনুবন্ধী।

যদি p, q, r মূলদ হয় তাহলে এই তিনটি শর্ত প্রযোজ্য।

27. $\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 5$
$\Psi(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$ [BB'21]

(ক) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $2 - 3i$. 2

(খ) $\varphi(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল 5 হলে অপর মূলদ্বয় নির্ণয় কর। 4

(গ) $\Psi(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c হলে $\sum a^3b$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. একটি মূল $2 - 3i$

[যেহেতু একটি মূলের কথা বলা হয়েছে। অপর মূলটি arbitrary। তবে অনুবন্ধী ধরা হয়েছে যাতে সমীকরণের সহগগুলো বাস্তব হয়।]

$\therefore$ অপর মূল $2 + 3i$; $(2 + 3i + 2 - 3i) = 4$; $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2 - 4x + 13 = 0$

খ. $\phi(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$, ধরি, মূলদ্বয় α, β ও 5; যেখানে, $\alpha \geq \beta$ হিসেবে নেওয়া হয়েছে

$\therefore \alpha + \beta + 5 = 9 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \cdots\cdots\cdots (i)$; $5\alpha\beta = 5 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{5}{5} = 1 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) ও (iii) হতে পাই, $\alpha = 2 + \sqrt{3}$; $\beta = 2 - \sqrt{3}$

গ. $\Psi(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 8 = 0$ এর মূলদ্বয় abc

$\therefore \sum a = 3$; $\sum ab = 5$; $abc = 8$ $\therefore \sum a^3b = a^3b + b^3c + c^3a + b^3a + c^3b + a^3c$

$= (a^3b + b^3a + abc^2) + (b^3c + c^3b + bca^2) + (a^3c + c^3a + cab^2) - abc^2 - bca^2 - cab^2$

$= ab(a^2 + b^2 + c^2) + bc(a^2 + b^2 + c^2) + ca(a^2 + b^2 + c^2) - abc(a + b + c)$

$= (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) - abc(a + b + c) = (\sum ab)\{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)\} - abc(\sum a)$

$= (\sum ab)\{(\sum a)^2 - 2\sum ab\} - abc(\sum a) = 5\{3^2 - 2 \times 5\} - 8 \times 3 = -29$

28. দৃশ্যকল্প-১: একটি ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল $2 - 3\sqrt{-1}$ এবং মূলগুলোর গুণফল 65। [JB'21]

দৃশ্যকল্প-২: $lx^2 + mx + m = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত a: b.

(ক) $(m - 1)x^2 - (m + 1)x + 2 = 0$, m এর মান কত হলে প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো সমান হবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে সমীকরণটি নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{m}{l}} = 0$. 4

সমাধান

ক. 12 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. 01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

29. দৃশ্যকল্প-১: $3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল α, β, γ. [JB'21]

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + gx + h = 0, x^2 + hx + g = 0$.

(ক) $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি গঠন কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকিলে, অপর মূলদ্বয় দ্বারা সমীকরণ গঠন কর। 4



সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $3x^3+2x^2-x-1=0$ সমীকরণের মূল তিনটি $\alpha, \beta, \gamma \therefore x=\alpha \Rightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{x} \therefore 3\left(\frac{1}{x}\right)^3+2\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}=1=0$

$\Rightarrow \frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow 3+2x-x^2-x^3=0 \Rightarrow x^3+x^2-2x-3=0$ (**Ans.**)

গ. ধরি, সাধারণ মূল α; $\alpha^2+g\alpha+h=0 \cdots\cdots\cdots (i)$; $\alpha^2+h\alpha+g=0 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i)-(ii) \Rightarrow \alpha(g-h)+h-g=0 \Rightarrow (g-h)(\alpha-1)=0$

এখানে, $g \neq h \therefore \alpha=1 \therefore$ অন্য মূল দুটি $\frac{h}{1}, \frac{g}{1} \Rightarrow h, g \therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-(g+h)x+gh=0$(**Ans.**)

30. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{x^2-px+pq=0}$. **[CB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{x^2+ax+b=0}$ এবং $\mathbf{x^2+bx+a=0}$.

(ক) $\mathbf{x^3+qx+r=0}$ সমীকরণের মূলগুলো **a, b, c** হলে $\mathbf{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণটির মূলদ্বয়ের অন্তর **r** হলে **p** কে **q** ও **r** এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর দুটি মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণটি $\mathbf{x^2+x+ab=0}$. 4

সমাধান

ক. $x^3+qx+r=0 \cdots\cdots\cdots (i)$ সমীকরণের মূলগুলো যথাক্রমে $a, b, c \therefore a+b+c=0$ এবং $abc=-r$

$\therefore (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=(-c-c)(-a-a)(-b-b)=-8abc=8r$

খ. $x^2-px+pq=0$; ধরি, মূলদ্বয় যথাক্রমে $\alpha, \beta \therefore \alpha+\beta=p$ এবং $\alpha\beta=pq$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \Rightarrow r=\sqrt{p^2-4pq} \Rightarrow p^2-4pq-r^2=0$

$\Rightarrow p=\frac{4q\pm\sqrt{(4q)^2+4r^2}}{2}=2q\pm\sqrt{4q^2+r^2}$

গ. $x^2+ax+b=0 \cdots\cdots\cdots (i)$; $x^2+bx+a=0 \cdots\cdots\cdots (ii)$

একটি সাধারণ মূল থাকলে, ধরি, সেটি $\alpha \therefore \frac{\alpha^2}{a^2-b^2}=\frac{-\alpha}{a-b}=\frac{1}{b-a}$

$\therefore \alpha=-(a+b)=1 \cdots\cdots\cdots (iii)$

$\therefore$(i) নং এর অপর মূল β হলে, $\beta=-a-1$ [$\because \alpha+\beta=-a$]

(ii) নং এর অপর মূল γ হলে, $\gamma=-b-1$ [$\because \alpha+\gamma=-b$]

$\therefore \beta+\gamma=-a-b-2=-(a+b)-2=1-2=-1$; $\beta\gamma=\{-(a+1)\}\{-(b+1)\}=ab+(a+b)+1=ab$

$\therefore \beta$ ও γ দ্বারা গঠিত সমীকরণটি $x^2+x+ab=0$ (দেখানো হলো)

31. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{ax^2+bx-c=2}$. **[CB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{8x^3-42x^2+63x-27=0}$.

(ক) মূলদ সহগবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $(3+\sqrt{2}i)^{-1}$. 2

(খ) যদি দৃশ্যকল্প-১ এ $\mathbf{a=27, b=6, c=m}$ এবং সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে **m** এর মানগুলো নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটি সমাধান কর, যেখানে মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত। 4

সমাধান

ক. একটি মূল, $(3+\sqrt{2}i)^{-1}=\frac{3-\sqrt{2}i}{9+2}=\frac{1}{11}(3-\sqrt{2}i) \therefore$ অপর মূল $\frac{1}{11}(3+\sqrt{2}i)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-\frac{1}{11}(3+\sqrt{2}i+3-\sqrt{2}i)x+\frac{1}{11}(3+\sqrt{2}i).\frac{1}{11}(3-\sqrt{2}i)=0$

বা, $x^2-\frac{6}{11}x+\frac{9+2}{121}=0$ বা, $11x^2-6x+1=0$

খ. $27x^2 + 6x - m = 2 \cdots\cdots\cdots (i)$

ধরি, মূলদ্বয় α ও α^2 $\therefore \alpha^2 + \alpha = -\frac{6}{27} \cdots\cdots\cdots (ii); \alpha^3 = \frac{-m-2}{27} \cdots\cdots\cdots (iii)$

(ii) হতে পাই $27\alpha^2 + 27\alpha + 6 = 0 \Rightarrow 27\alpha^2 + 9\alpha + 18\alpha + 6 = 0 \Rightarrow (9\alpha + 6)(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}$ অথবা, $\alpha = -\frac{1}{3}$ $\therefore$ (iii) হতে পাই, $-m - 2 = 27\alpha^3$

এখন, $\alpha = -\frac{1}{3}$ হলে, $\Rightarrow -m - 2 = 27 \times \frac{-1}{27} \Rightarrow m = 1 - 2 \therefore m = -1$

আবার, $\alpha = -\frac{2}{3}$ হলে, $-\frac{8}{27} = \frac{-m-2}{27} \Rightarrow m = 6$ **(Ans.)**

গ. $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$

ধরি মূলগুলো যথাক্রমে $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r \therefore \alpha^3 = \frac{27}{8}$ বা, $\alpha = \frac{3}{2} \cdots\cdots\cdots (i)$

$\therefore \frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = \frac{42}{8} \left[\because \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}\right]$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(r + \frac{1}{r} + 1\right) = \frac{42}{8} \Rightarrow r + \frac{1}{r} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow (r-2)\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore r = 2$ অথবা $r = \frac{1}{2} \therefore \alpha r = 3$ অথবা $\frac{3}{4}$ আরেকটি মূল, $\frac{\alpha}{r} = \frac{3}{4}$ অথবা 3 $\therefore$ মূলগুলো $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$ **(Ans.)**

32. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x - 10$. **[Din.B'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 30$.

(ক) $x^2 + 5x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $3 + i$ হলে, অপর মূলগুলি নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল 1 এবং অপর মূলগুলি α, β, γ হলে $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ নির্ণয় কর 4

সমাধান

ক. প্রশ্নমতে, $\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 3$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 25 - 12 \Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{13}; \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} = \pm\frac{\sqrt{13}}{3}$ **(Ans.)**

খ. একটি মূল, $3 + i$ হলে অপর মূল $3 - i$

শর্তমতে, $3 + i + 3 - i + \alpha = 3 \Rightarrow 6 + \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -3 \therefore$ অপর মূলগুলি $-3, 3 - i$ **(Ans.)**

গ. প্রশ্নমতে, $1 + \alpha + \beta + \gamma = 3 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $1.\alpha\beta\gamma = -10 \Rightarrow \alpha\beta\gamma = -10 \ldots\ldots\ldots (ii)$

আবার, $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma = -23 \Rightarrow -10 + \alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma = -23$

$\Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -13 \ldots\ldots\ldots (iii)$

আবার, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} = 2\{4 + 39\} = 86$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 86 + 3\alpha\beta\gamma = 86 + 3 \times (-10) = 56$ **(Ans.)**

33. দৃশ্যকল্প: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ একটি দ্বিঘাত ফাংশন। **[Din.B'21]**

(ক) $a = 1, b = -2, c = 1$ হলে, $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $cx^2 - \left(\frac{b^2}{a} - 2c\right)x + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্পে $a = 1, b = -2n, c = n^2 - m^2$ হলে এমন একটি সমীকরণ গঠন কর যার মূলদ্বয়, $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল ও অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে। 4

সমাধান

ক. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক, $D = b^2 - 4ac = 4 - 4.1.1 = 0$

$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব সমান ও মূলদ **(Ans.)**

খ. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}; \alpha\beta = \frac{c}{a} \therefore \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a}{c} = \frac{b^2}{ac} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$cx^2 - \left(\frac{b^2}{a} - 2c\right)x + c = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{b^2}{ac} - 2\right)x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - \left\{\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} - 2\right\}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left\{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right\}x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \therefore x = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha}$ **(Ans.)**

গ. প্রশ্নমতে, $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2nx + n^2 - m^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \{(n-m) + (n+m)\}x + (n-m)(n+m) = 0$

$\Rightarrow \{x - (n-m)\}\{x - (n+m)\} = 0 \Rightarrow x = n + m, n - m \therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $= 2n$; মূলদ্বয়ের বিয়োগফল $= 2m$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ-$x^2 - (2m + 2n)x + 4mn = 0 \Rightarrow x^2 - 2(m+n)x + 4mn = 0$ **(Ans.)**

34. $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$
$\mathbf{g(x) = px^2 + qx + r}$ **[MB'21]**

(ক) $\mathbf{x - \frac{1}{x} = k}$ সমীকরণটির একটি মূল $\sqrt{5} - 2$ হলে, **k**-এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) $\mathbf{f(x) = 0}$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\mathbf{a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0}$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। **4**

(গ) যদি $\mathbf{f(x) = 0}$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত $\mathbf{g(x) = 0}$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাতের সমান হয়, তাহলে দেখাও যে, $\mathbf{b : q = \sqrt{6} : \sqrt{35}}$ যখন $\mathbf{a = 2, c = 3, p = 5, r = 7}$. **4**

সমাধান

ক. $x - \frac{1}{x} = k$

$\Rightarrow (\sqrt{5} - 2) - \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = k$

$\Rightarrow \sqrt{5} - 2 - (\sqrt{5} + 2) = k$

$\Rightarrow k = -4$ **(Ans.)**

বিকল্প: $x^2 - kx - 1 = 0$

একটি মূল $-2 + \sqrt{5}$ হলে অপর মূল $= -2 - \sqrt{5}$

অর্থাৎ, $-2 + \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -\left(-\frac{k}{1}\right) \Rightarrow k = -4$

খ. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots (i); \alpha\beta = \frac{c}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}\right\}x + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha^2\beta^2 = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$\Rightarrow (x - \alpha^2)(x - \beta^2) = 0 \therefore x = \alpha^2, \beta^2$ **(Ans.)**

গ. ধরি, $\alpha x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, m\alpha$; $px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\beta, m\beta$

শর্তমতে, $\alpha(m+1) = -\frac{b}{a} \ldots\ldots (i); \alpha^2 m = \frac{c}{a} \ldots\ldots\ldots (ii)$

আবার, $\beta(m+1) = -\frac{q}{p} \ldots\ldots\ldots (iii); \beta^2 m = \frac{r}{p} \ldots\ldots\ldots (iv)$

$(i)^2 \div (ii) \Rightarrow \frac{(m+1)^2}{m} = \frac{b^2}{ac}; (iii)^2 \div (iv) \Rightarrow \frac{(m+1)^2}{m} = \frac{q^2}{pr}$

$\therefore \frac{b^2}{ac} = \frac{q^2}{pr} \Rightarrow \frac{b^2}{6} = \frac{q^2}{35} \Rightarrow \frac{b^2}{q^2} = \frac{6}{35} \Rightarrow \frac{b}{q} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{35}} \therefore b : q = \sqrt{6} : \sqrt{35}$ **(Showed)**

35. $px^2 + qx + 1 = 0 \cdots\cdots (i)$ এবং $x^3 - 11x^2 + 47x - 85 = 0 \cdots\cdots (ii)$ **[MB'21]**

(ক) m-এর মান কত হলে $(m-1)x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে? 2

(খ) (i) নং সমীকরণের মূল দুইটি α ও β হলে দেখাও যে, $(p\alpha + q)^{-3} + (p\beta + q)^{-3} = \frac{q(q^2-3p)}{p^3}$. 4

(গ) (ii) নং সমীকরণের মূলগুলি 5, α, β হলে, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 19 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $px^2 + qx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে- $\alpha + \beta = -\frac{q}{p} \ldots\ldots (i); \alpha\beta = \frac{1}{p} \ldots\ldots (ii)$

$(i) \Rightarrow p\alpha + q = -p\beta \ldots\ldots (iii); p\beta + q = -p\alpha \ldots\ldots (iv)$

$L.H.S = (p\alpha+q)^{-3} + (p\beta+q)^{-3} = (-p\beta)^{-3} + (-p\alpha)^{-3} = -\frac{1}{p^3\beta^3} - \frac{1}{p^3\alpha^3} = -\frac{1}{p^3}\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right)$

$= \frac{1}{p^3}\left\{\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\ (\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}\right\} = -\frac{1}{p^3} \times \frac{-\frac{q^3}{p^3}+\frac{3q}{p^2}}{\frac{1}{p^3}} = -\frac{1}{p^3} \times (3pq - q^3) = \frac{q}{p^3}(q^2 - 3p) = R.H.S$ **(Showed)**

গ. শর্তমতে, $5 + \alpha + \beta = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = 6 \ldots\ldots (i); 5\alpha\beta = 85 \Rightarrow \alpha\beta = 17 \ldots\ldots (ii)$

নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x + 2 + \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(6 + \frac{6}{17}\right)x + 2 + 17 + \frac{1}{17} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{108x}{17} + \frac{324}{17} = 0 \Rightarrow 17x^2 - 108x + 324 = 0$ **(Ans.)**

36. $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$ এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$. **[DB'19]**

(খ) $F(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপর মূলটির বর্গের সমান হলে, m এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে, প্রমাণ কর যে, $(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$. 4

সমাধান

খ. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. $rx^2 - 2nx + 4m = 0 = P(x) \ldots\ldots (i); mx^2 + nx + r = 0 = Q(x) \ldots\ldots (ii)$

ধরি, সাধারণ মূল α ∴ $r\alpha^2 - 2n\alpha + 4m = 0$ এবং $m\alpha^2 + n\alpha + r = 0$

∴ বজ্রগুণন, $\frac{\alpha^2}{-2nr-4mn} = \frac{\alpha}{-r^2+4m^2} = \frac{1}{nr+2mn} \Rightarrow \alpha = \frac{-2n(r+2m)}{4m^2-r^2} = \frac{4m^2-r^2}{n(r+2m)}$

$\therefore (4m^2 - r^2)^2 = -2n^2(r+2m)^2 \Rightarrow (2m-r)^2(2m+r)^2 + 2n^2(2m+r)^2 = 0$

$\Rightarrow (2m+r)^2\{(2m-r)^2 + 2n^2\} = 0 \therefore 2m + r = 0$ অথবা, $(2m-r)^2 + 2n^2 = 0$ **[Proved]**

37. $f(x) = px^2 + qx + r$ এবং $g(x) = rx^2 + qx + p$. **[RB'19]**

(ক) m এর মান কত হলে, $(m-1)x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে? 2

(খ) উদ্দীপক থেকে $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $rx^2 + 4qx + 16p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) উদ্দীপকের $f(x) = 0$ এবং $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে p, q এবং r এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। 4

সমাধান

ক. 12 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $F(x) = 0 \therefore px^2 + qx + r = 0 \therefore \alpha + \beta = -\frac{q}{p} \therefore \alpha\beta = \frac{r}{p}$; এখন, $rx^2 + 4qx + 16p = 0$

$\Rightarrow \frac{r}{p}x^2 + 4.\frac{q}{p}.x + 16 = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 - 4(\alpha+\beta)x + 16 = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 - 4\alpha x - 4\beta x + 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - 4) - 4(\beta x - 4) = 0 \Rightarrow (\beta x - 4)(\alpha x - 4) = 0 \therefore x = \frac{4}{\beta}$ or, $x = \frac{4}{\alpha} \therefore x = \frac{4}{\beta}, \frac{4}{\alpha}$

গ. $px^2 + qx + r = 0$ ……… (i); $rx^2 + qx + p = 0$ ……… (ii)
ধরি, সাধারণ মূল α নং
(i) নং হতে, $p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$ ……… (iii)
(ii) নং হতে, $r\alpha^2 + r\alpha + p = 0$ ……… (iv)
(iii) ও (iv) নং হতে আড় গুণন করে পাই, $\frac{\alpha^2}{qp-qr} = \frac{\alpha}{-p^2+r^2} = \frac{1}{pq-rq}$
এখন, $\frac{\alpha}{r^2-p^2} = \frac{1}{pq-rq}$ $\therefore \alpha = \frac{(r-p)(r+p)}{q(p-r)}$ $\therefore \alpha = -\frac{r+p}{q}$ $[p \neq r]$
আবার, $\alpha^2 = \frac{qp-qr}{pq-rq} \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \frac{(r+p)^2}{q^2} = 1 \therefore (r+p)^2 = q^2$

38. দৃশ্যকল্প-২: $mx^2 + nx + s = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। [Ctg.B'19]

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $m = 9,\ n = 2,\ s = -\frac{1}{3}(p+2)$ হলে প্রাপ্ত সমীকরণের একটি মূল যদি অপরটির বর্গের সমান হয় তবে p এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. 31 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

39. দৃশ্যকল্প-১: $8x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a ও b. [Ctg.B'19]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে এইরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $a + \frac{1}{b}$ এবং $b + \frac{1}{a}$. 4

সমাধান

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $8x^2 - 6x + 1 = 0$ $\therefore$ এখানে, $a + b = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $ab = \frac{1}{8}$
এখন, $a + \frac{1}{b}$ ও $b + \frac{1}{a}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ। সমষ্টি $= a + b + \frac{a+b}{ab} = \frac{3}{4} + \frac{3/4}{1/8} = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$
গুণফল $= ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab} = \frac{1}{8} + 2 + 8 = \frac{81}{8}$ $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{81}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 54x + 81 = 0$

40. $\phi(x) = \ell x^2 + mx + n$. [SB'19]

(ক) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 2i হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। 2

(খ) $\phi(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে, $nl(x^2+1) + (2nl - m^2)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

সমাধান

ক. একটি মূল 2i হলে, অপর মূলটি $-2i$
ধরি, অপর মূল α হলে, $\alpha + 2i - 2i = -1$ $\therefore \alpha = -1$ $\therefore$ সমাধান, $x = -1, 2i, -2i$

খ. $\phi(x) = 0 \therefore lnx^2 + mx + n = 0$
$a + b = -\frac{m}{\ell}$; $ab = \frac{n}{\ell}$ আবার, $n\ell(x^2+1) + (2n\ell - m^2)x = 0$
$\Rightarrow \frac{n}{\ell}(x^2+1) + \left(2\frac{n}{\ell} - \frac{m^2}{\ell^2}\right)x = 0$ [ℓ^2 দ্বারা ভাগ করে]
$\Rightarrow ab(x^2+1) + \{2ab - (a+b)^2\}x = 0 \Rightarrow abx^2 + ab + 2abx - (a+b)^2x = 0$
$\Rightarrow abx^2 + ab + 2abx - a^2x - b^2x - 2abx = 0$
$\Rightarrow abx^2 - a^2x - b^2x + ab = 0 \Rightarrow ax(bx-a) - b(bx-a) = 0$
$\Rightarrow (bx-a)(ax-b) = 0 \therefore x = \frac{a}{b}$ অথবা, $x = \frac{b}{a}$ $\therefore$ সমাধান, $x = \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$

41. দৃশ্যকল্প-১: $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত $u : v$ [BB'19]

(ক) $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে প্রমাণ কর $\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{\frac{v}{u}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$ 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

42. $x^2 + px + q = 0,\ p, q \neq 0$ এর মূলদ্বয় u এবং v; $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$. [JB'19]

(ক) $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে m এর মান কত? 2

(খ) দেখাও যে, $qx^2 + px + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$। 4

(গ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. এক্ষেত্রে নিশ্চায়ক শূন্য। $\therefore (-2m)^2 - 4.1.(8m - 15) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 32m + 60 = 0$
$\Rightarrow m^2 - 8m + 15 = 0 \Rightarrow (m-3)(m-5) = 0 \therefore m = 3,5$

খ. $X^2 + px + q = 0 \ \therefore u + v = -p; uv = q \therefore qx^2 + px + 1 = 0 \Rightarrow uvx^2 - (u+v)x + 1 = 0$
$\Rightarrow ux(vx-1) - 1(vx-1) = 0 \Rightarrow (ux-1)(vx-1) = 0 \therefore x = \frac{1}{u}, \frac{1}{v} \therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$।

গ. একটি মূল $2 - i$ হলে অপরটি হবে $2 + i$; এখন, $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল α হলে
$\alpha + 2 - i + 2 + i = \frac{9}{2} \therefore \alpha = \frac{1}{2} \therefore \frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ
$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow (2x-1)(4x-1) = 0 \Rightarrow 8x^2 - 6x + 1 = 0$

43. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ একটি বহুপদী রাশি। [CB'19]

(খ) $f(x) = 0$ বহুপদীর সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\sum \alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $x^3 + 2x^2 + x + 3 = 0 = f(x)$; মূলত্রয় α, β, γ হলে, $\alpha + \beta + \gamma = -2 \Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 \therefore \alpha\beta\gamma = -3$
$\sum \alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$
$= (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta++\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$
$= -2\{(-2)^2 - 3.1\} + 3.(-3) = -2(4-3) - 9 = -11$

44. $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r.$ [Din.B'19]

(ক) $m = 0$ এবং $n = q = r = 1$ হলে, $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum \alpha^3$ নির্ণয় কর। 4

(গ) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $P(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির সমষ্টি ও অন্তরফলের পরম মান হবে, যেখানে $m = 0, n = 2, q = 1, r = -1$। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 43 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 11 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

45. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ [All.B'18]

(ক) $p=q=1$ হলে দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p, q এবং r এর মধ্যে একটি সম্পর্ক লিখ। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}\Rightarrow \frac{p}{x(p-x)}=\frac{1}{q}\Rightarrow pq=px-x^2\Rightarrow x^2-px+pq=0$

ধরি, মূলদ্বয় α,β ; $\alpha+\beta=p$; $\alpha\beta=pq$; $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\Rightarrow r^2=p^2-4pq\Rightarrow p^2-4pq-r^2=0\ \therefore p=\frac{4q\pm\sqrt{16q^2+4r^2}}{2.1}\ \therefore p^2\ =2q\pm\sqrt{4q^2+r^2}$ (Ans.)

46. যদি $f(x)=ax^2+bx+c$ এবং $g(x)=cx^2+bx+a$ হয় তবে, [DB'17]

(ক) $f(x)=0$ এর মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় যথাক্রমে α,β হলে দেখাও যে, $(a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$. 4

(গ) $f(x)=0$ এর একটি মূল, $g(x)=0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2a=c$ অথবা $(2a+c)^2=2b^2$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x)=0\Rightarrow ax^2+bx+c=0\Rightarrow a\neq 0$ এর সমাধান $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

এখানে, b^2-4ac রাশিটিকে পৃথায়ক বলে। এই পৃথায়কের মানের উপর নির্ভর করে মূলের প্রকৃতি।

(i) পৃথায়ক $b^2-4ac<0$ হলে, মূলগুলি অসমান ও জটিল হবে।

(ii) পৃথায়ক $b^2-4ac=0$ হলে, মূলগুলি সমান ও বাস্তব হবে।

(iii) পৃথায়ক $b^2-4ac>0$ হলে, মূলগুলি অসমান ও বাস্তব হবে।

(iv) পৃথায়ক b^2-4ac এর মান পূর্ণবর্গ হলে, মূলগুলি মূলদ, অসমান ও বাস্তব হবে।

খ. দেওয়া আছে, $f(x)=ax^2+bx+c=0$ .... (i) এর মূলদ্বয় α,β ।

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ .... (ii)

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\because$ (i) নং সমীকরণের একটি মূল $x=\alpha$

আমরা পাই, $a\alpha^2+b\alpha+c=0\Rightarrow \alpha(a\alpha+b)=-c\Rightarrow (a\alpha+b)=-\frac{c}{\alpha}$

$\Rightarrow (a\alpha+b)^{-3}=\left(-\frac{c}{\alpha}\right)^{-3}\Rightarrow (a\alpha+b)^{-3}=-\frac{\alpha^3}{c^3}$ .... (iv)

অনুরূপভাবে, $x=\beta$ এর ক্ষেত্রে আমরা পাই, $a\beta^2+b\beta+c=0\Rightarrow (a\beta+b)^{-3}=-\frac{\beta^3}{c^3}$ .... (v)

এখন, $(a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}=-\frac{1}{c^3}(\alpha^3+\beta^3)$ [(iv) & (v) এর সাহায্যে]

$=-\frac{1}{c^3}\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}=-\frac{1}{c^3}\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{c^3}\left(-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}\right)=\frac{1}{c^3}\left(\frac{b^3}{a^3}-\frac{3bc}{a^2}\right)=\frac{b^3-3abc}{c^3a^3}\ \therefore (a\alpha+b)^3+(a\beta+b)^{-3}=\frac{b^3-3ab}{a^3c^3}$ (দেখানো হলো)

গ. মনে করি, $g(x) = cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূল α
সুতরাং আমরা পাই, $c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ ……………(i)
প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$
$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ সমীকারণের একটি মূল 2α
সুতরাং আমরা পাই, $a(2\alpha)^2 + b(2\alpha) + c = 0 \Rightarrow 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ …………(ii)
(i) ও (ii) নং সমীকরণকে বজ্রগুণনের সাহায্যে আমরা পাই,
$\frac{\alpha^2}{bc-2} = \frac{\alpha}{4a^2-c^2} = \frac{1}{2bc-4ab} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{bc-2} = \frac{\alpha}{4a^2-c^2}$ এবং $\frac{\alpha}{4a^2-c^2} = \frac{1}{2bc-} \Rightarrow \frac{\alpha}{b(c-2a)} = \frac{1}{(2a+c)(2a-c)}$
এবং $\frac{\alpha}{(2a+c)(2a-c)} = \frac{1}{2b(c-2a)} \Rightarrow \alpha = \frac{b(c-2a)}{(2a+c)(2a-c)}$ ………(iii) এবং $\alpha = \frac{(2a+c)(2a-c)}{2b(c-2a)}$ ……………….(iv)
(iii) ও (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{b(c-2a)}{(2a+c)(2a-c)} = \frac{(2a+c)(2a-c)}{2b(c-2a)} \Rightarrow (2a+c)^2(2a-c)^2 = 2b^2(c-2a)^2$
$\Rightarrow (2a+c)^2(2a-c)^2 - 2b^2(2a-c)^2 = 0 \Rightarrow (2a-c)^2\{(2a+c)^2 - 2b^2\} = 0 \Rightarrow (2a-c)^2 = 0$
অথবা $(2a+c)^2 - 2b^2 = 0 \therefore 2a = c$ অথবা $(2a+c)^2 = 2b^2$ (দেখানো হল)

47. দৃশ্যকল্প ২: $\mathbf{px^2 + qx + r = 0}$. [RB'17]
(গ) দৃশ্যকল্প ২ এ উল্লেখিত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $px^2 + qx + r = 0$;মূলদ্বয়, $\alpha, \beta \therefore \alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ এবং $\alpha\beta = \frac{r}{p}$
$\frac{2}{\alpha}$ এবং $\frac{2}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)x + \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = 0 \Rightarrow x^2 - 2\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{4}{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow x^2 - 2\left(\frac{\frac{-q}{p}}{\frac{r}{p}}\right)x + \frac{4}{\frac{r}{p}} = 0$
$\Rightarrow x^2 + \frac{2qx}{r} + 4 \times \frac{p}{r} = 0 \Rightarrow rx^2 + 2qx + 4p = 0 \therefore rx^2 + 2qx + 4p = 0$ যা নির্ণেয় সমীকরণ।

48. (ক) $\mathbf{6x^2 - 5x - 1 = 0}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। [RB'17]

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণ, $6x^2 - 5x - 1 = 0$
সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= (-5)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 + 24 = 49 = 7^2$, যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।
$\therefore$ মূলদ্বয় বাস্তব ও মূলদ ও অসমান হবে।

49. $\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$ সমীকরণটির মূলদ্বয় $\boldsymbol{\alpha, \beta}$— [Ctg.B'17]
(ক) উদ্দীপকের সমীকরণটির নিশ্চায়ক কত? 2
(খ) $\mathbf{c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0}$ এর মূল $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4
(গ) এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\beta}}$ ও $\boldsymbol{\beta + \frac{1}{\alpha}}$ 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, $ax^2 + bx + +c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$.
$\therefore x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4.1c \Rightarrow b^2 - 4c$

খ. প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + bx + c = 0$. এর মূলদ্বয় $\alpha, \beta \therefore \alpha + \beta = -b \Rightarrow \alpha\beta = c$
এখন, $c(x^2 + 1) - (b^2 - 2c)x = 0 \Rightarrow cx^2 - (b^2 - 2c)x + c = 0$
$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{(a+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$
$\Rightarrow \alpha x(\beta x - a) - \beta(\beta x - \alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0 \therefore x = \frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$ $\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\beta}{\alpha}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}$

গ. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \beta \therefore \alpha + \beta = -b \Rightarrow \alpha\beta = c$
নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \frac{1}{\beta} + \beta + \frac{1}{\alpha} = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = -b + \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = -b + \frac{-b}{c} = \frac{-bc-b}{c}$
এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = c + 2 + \frac{1}{c} = \frac{c^2+2c+1}{c} = \frac{(c+1)^2}{c}$
$\therefore \left(a + \frac{1}{\beta}\right)$ ও $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ মূলবিশিষ্ট নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{-bc-b}{c}x + \frac{(c+1)^2}{c} = 0 \quad \therefore cx^2 + b(c+1)x + (c+1)^2 = 0$

50. $\mathbf{z = -2 - 2\sqrt{3}\,i}$ একটি জটিল রাশি। **[SB'17]**

(গ) কোনো ত্রিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\mathbf{z}$ এবং মূলগুলির গুণফল $\mathbf{80}$ হলে সমীকরণটি নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, একটি মূল, z ∴ অপর মূলটি হবে, $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

ধরি, তৃতীয় মূল = t ; প্রশ্নমতে, $z\bar{z}t = 80 \Rightarrow (-2 - 2\sqrt{3}i).(-2 + 2\sqrt{3}i).t = 80$

$\Rightarrow \left\{(-2)^2 - \left(2\sqrt{3}i\right)^2\right\}.t = 80 \Rightarrow (4 - 4.3i^2).t = 80 \Rightarrow (4 + 12).t = 80 \Rightarrow t = \frac{80}{16} = 5$

এখন, $z + z + t = -2 - 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i + 5 = 5 - 4 = 1$

$z\bar{z} + \bar{z}t + tz \Rightarrow (-2 - 2\sqrt{3}i)(-2 + 2\sqrt{3}i) + (-2 + 2\sqrt{3}i).5 + 5(-2 - 2\sqrt{3}i)$

$\Rightarrow (4 - 4.3i^2) + 10\sqrt{3}i - 10 - 10 - 10\sqrt{3}i \Rightarrow 16 - 20 = -4$

∴ নির্ণেয় সমীকরণটি, $x^3 - (z + \bar{z} + t) + (z\bar{z} + \bar{z}t + tz)x - \overline{zz}t = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x - 80 = 0$

51. $\mathbf{f(x) = x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58}$ **[BB'17]**

(ক) উদাহরণসহ পৃথায়কের সংজ্ঞা দাও। **2**

(খ) $\mathbf{f(x) = 0}$ সমীকরণের একটি মূল $\mathbf{5 + 2i}$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান

ক. $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। এর মূলদ্বয় $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2a}$; যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা।

এখানে, '$\sqrt{}$' এর ভিতরের রাশি $b^2 - 4ac$ এর মানের উপর ভিত্তি করে মূলদ্বয়ের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয়। এর মান পর্যালোচনা করে মূলের প্রকৃতি নিশ্চিত ভাবে নিরুপন করা যায়। এ কারণে একে পৃথায়ক বলা হয়।

$ax^2 + bx + c = 0$ এর পৃথায়ক $b^2 - 4ac$

উদাহরণ: $x^2 - x - 6$ রাশিটির পৃথায়ক $(-1)^2 - 4.1(-6) \Rightarrow 1 + 24 = 25$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58$ এবং $f(x) = 0$

∴ $x^4 - 13x^3 + 61x^2 - 107x + 58 = 0$ ……… (i)

সমীকরণটির একটি মূল $5 + 2i$ হলে অপর একটি মূল হবে $5 - 2i$

মনে করি, সমীকরণটির অবশিষ্ট মূল দুইটি α, β ∴ মূলগুলির যোগফল, $5 + 2i + 5 - 2i + \alpha + \beta = 13$

$\Rightarrow \alpha + \beta + 10 = 13$ ∴ $\alpha + \beta = 3$ ……… (ii)

আবার, মূলগুলির গুণফল, $(5 + 2i)(5 - 2i)\alpha\beta = 58$

$\Rightarrow (25 - 4i^2)\alpha\beta = 58 \Rightarrow \{25 - 4(-1)\}\alpha\beta = 58 \Rightarrow 29\alpha\beta = 58$ ∴ $\alpha\beta = 2$ ……… (iii)

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 - 4.2 = 1$ ∴ $\alpha - \beta = \pm 1$

(+) চিহ্ন ব্যবহার করে পাই, $\alpha - \beta = 1$ ……… (iv)

(ii) ও (iv) যোগ করে পাই, $2\alpha = 4$ ∴ $\alpha = 2$; α এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $2 + \beta = 3$ ∴ $\beta = 1$

(−) চিহ্ন ব্যবহার করেও একই মূল পাওয়া যায়। ∴ নির্ণেয় অপর মূলগুলি $5 - 2i, 2, 1$

52. দৃশ্যকল্প -১: $\mathbf{x^2 - 5x + 3 = 0}$ এর মূলদ্বয় **α ও β.** **[JB'17]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\frac{3}{5-\alpha}$ ও $\frac{3}{5-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

খ. যেহেতু $x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β ∴ $\alpha + \beta = 5$ ………………………. (i)

এবং $\alpha\beta = 3$ ……………………… (ii)

এখন, প্রদত্তমূলদ্বয়ের যোগফল $\frac{3}{5-\alpha} + \frac{3}{5-\beta} = \frac{15-3\beta+15-3\alpha}{(5-\alpha)(5-\beta)} = \frac{30-3(\alpha+\beta)}{25-5\alpha-5\beta+\alpha\beta} \Rightarrow \frac{30-3.5}{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{15}{25-5.5+3} = \frac{15}{3} = 5$

আবার, প্রদত্তমূলদ্বয়ের গুণফল $= \frac{3}{5-\alpha} \times \frac{3}{5-\beta} \Rightarrow \frac{9}{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{9}{25-5.5+3} = \frac{9}{3} = 3$ ∴ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - 5x + 3 = 0$

53. $z = \alpha + \beta i$, যেখানে α ও β বাস্তব সংখ্যা। **[CB'17]**

(ক) $\frac{x^3-8}{x-2}$ বহুপদীর ঘাত নির্ণয় কর। **2**

(খ) উদ্দীপকে $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$ হলে z মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. $\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x^3-2^3)}{x-2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$; এখানে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2 ।

খ. দেওয়া আছে, $z = \alpha + \beta i$; যখন $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$; তখন $z = 2 + i\sqrt{3}$

আমরা জানি, কোনো বাস্তব সহগ বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের জটিল মূলগুলি যুগলে থাকে। একটি মূল $2 + i\sqrt{3}$ হলে অপর মূলটি হবে $2 - i\sqrt{3}$ এবং সমীকরণটি হবে, $x^2 - (2 + i\sqrt{3} + 2 - i\sqrt{3})x + (2 + i\sqrt{3})\ (2 - i\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + (4 - i^2 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + (4 + 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

54. $mx^2 + nx + l = 0$ এবং $lx^2 + nx + m = 0$. **[Din.B'17]**

(ক) উৎপাদকের সাহায্যে $2x^2 + 5x - 9 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। **2**

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $m + l = \pm n$. **4**

(গ) উদ্দীপকের ১ম সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β হলে $ml(x^2 + 1) - (n^2 - 2ml)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। **4**

সমাধান

ক. $2x^2 + 5x - 9 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 40x - 72 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 40x + 25 - 97 = 0$

$\Rightarrow (4x + 5)^2 - (\sqrt{97})^2 = 0 \Rightarrow (4x + 5 + \sqrt{97})(4x + 5 - \sqrt{97}) = 0$

অতএব, $4x + 5 + \sqrt{97} = 0 \Rightarrow 4x = -5 - \sqrt{97} \therefore x = \frac{-5-\sqrt{97}}{4}$

$4x + 5 - \sqrt{97} = 0 \Rightarrow 4x = -5 + \sqrt{97} \Rightarrow x = \frac{-5+\sqrt{97}}{4} \therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{-5\pm\sqrt{97}}{4}$

খ. দেওয়া আছে, $mx^2 + nx + l = 0$; $ln^2 + nx + m = 0$

$m\alpha^2 + n\alpha + l = 0$; $l\alpha^2 + n\alpha + m = 0$; $\frac{\alpha^2}{mn-ln} = \frac{\alpha}{l^2-m^2} = \frac{1}{mn-nl}$

$(l^2 - m^2)^2 = (mn - ln)(mn - ln)$; $(l^2 - m^2)^2 = (mn - ln)^2 \Rightarrow l^2 - m^2 = \pm(mn - ln) = \pm n(m - l)$

$\Rightarrow (m + l)(l - m) = \pm n(m - l) \Rightarrow m + l = \pm n$ **(Showed)**

গ. $mx^2 + nx + l = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha + \beta = \frac{-n}{m} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{l}{m}$

এখন $ml(x^2 + 1) - (n^2 - 2ml)x = 0 \Rightarrow \frac{ml(x^2+1)}{m^2} - \frac{1}{m^2}(n^2 - 2ml)x = 0$ [m^2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{l}{m}(x^2 + 1) - \left(\frac{n^2}{m^2} - 2\frac{l}{m}\right)x = 0 \Rightarrow \frac{l}{m}(x^2 + 1) - \left\{\left(\frac{-n}{m}\right)^2 - 2\frac{l}{m}\right\}x = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta(x^2 + 1) - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta x\} = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 + \alpha\beta - \alpha^2 x - \beta^2 x = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta x - \alpha)(\alpha x - \beta) = 0 \therefore \beta x - \alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow ax - \beta = 0 \Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$ $\therefore$ মূল দুইটি $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$

◆ **CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান**

01. $\mathbf{px^2 + qx + r = 0}$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ক) দেখাও যে, $\mathbf{m = n}$ না হলে, $\mathbf{2x^2 - 2(m+n)x + m^2 + n^2 = 0}$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না। **2**

(খ) উদ্দীপকের সমীকরণের একটি মূল যদি $\mathbf{p}$ ও $\mathbf{r}$ স্থান বিনিময় করলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তার একটি মূলের দ্বিগুণ হয়। তবে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{2p = r}$ অথবা $\mathbf{(2p + r)^2 = 2q^2}$ । **4**

(গ) উদ্দীপকে $\mathbf{p = 1, q = 5, r = 6}$ এর জন্য দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ হলে, $\boldsymbol{\alpha - 2}$ এবং $\boldsymbol{\beta - 3}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। **4**

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $= 4(m+n)^2 - 8(m^2+n^2) = 4(m^2+n^2+2mn-2m^2-2n^2)$
$= -4(m^2+n^2-2mn) = -4(m-n)^2$; মূলদ্বয় বাস্তব হবে যদি পৃথায়ক ≥ 0
অর্থাৎ, $-4(m-n)^2 \geq 0 \Rightarrow 4(m-n)^2 \leq 0 \therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হবে যদি $m - n = 0$ অর্থাৎ, $m = n$

খ. p এবং r স্থান বিনিময় করলে, $rx^2 + qx + p = 0$
$\therefore rx^2 + qx + p = 0$ এর একটি মূল α, তাহলে, $px^2 + qx + r = 0$ এর একটি মূল 2α হবে।
$\therefore r\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \ldots\ldots$ (i) এবং $p(2\alpha)^2 + q(2\alpha) + r = 0 \Rightarrow 4p\alpha^2 + 2q\alpha + r = 0 \ldots\ldots$ (ii)
(i) এবং (ii) থাকে, $\frac{\alpha^2}{qr-2pq} = \frac{\alpha}{4p^2-r^2} = \frac{1}{2qr-4pq}$
$\therefore \alpha = \frac{qr-2}{4p^2-r^2}$ এবং $\alpha = \frac{4p^2-r^2}{2qr-4pq}$ $\therefore \frac{qr-2pq}{4p^2-r^2} = \frac{4p^2-r^2}{2qr-4pq}$
$\Rightarrow 2(qr-2pq)(qr-2pq) = (4p^2-r^2)^2 \Rightarrow 2q^2(r-2p)^2 = (r-2p)^2(r+2p)^2$
$\Rightarrow 2q^2(r-2p)^2 - (r-2p)^2(r+2p)^2 = 0 \Rightarrow (r-2p)^2\{2q^2 - (r+2p)^2\} = 0 \therefore 2p = r$
অথবা, $(2p+r)^2 = 2q^2$ **[Proved]**

গ. সমীকরণটি $x^2 + 5x + 6 = 0 \therefore$ এর মূলদ্বয়, $x = \frac{-5\pm\sqrt{25-2}}{2} = \frac{-5\pm1}{2} = -2, -3$
$\therefore \alpha - 2 = -2 - 2 = -4 \therefore \beta - 3 = -3 - 3 = -6$
$\therefore$ সমীকরণটি, $(x+4)(x+6) = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 4x + 24 = 0 \therefore x^2 + 10x + 24 = 0$

02. $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\boldsymbol{\alpha}$ ও $\boldsymbol{\beta}$ এবং $\mathbf{2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0}$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

(ক) দ্বিতীয় সমীকরণের মূলগুলো $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ ও $\boldsymbol{\gamma}$ হলে $\boldsymbol{\sum \alpha^2\beta}$ এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) দ্বিতীয় সমীকরণের দুটি মূলের অনুপাত $\mathbf{3:4}$ হলে সমীকরণটির সমাধান কর। **4**

(গ) ১ম সমীকরণ থেকে $\mathbf{(a\alpha + b)^{-2}}$ এবং $\mathbf{(a\beta + b)^{-2}}$ মূল দুটি দ্বারা গঠিত সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. $\alpha + \beta + \gamma = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -11$; $\alpha\beta\gamma = 12$; $\Sigma\alpha^2\beta = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2$
এবং $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = \alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + +\beta\gamma^2 + \gamma\alpha = \Sigma\alpha^2\beta + 3\alpha\beta\gamma$
অর্থাৎ, $\Sigma\alpha^2\beta = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(-11) - 3.12 = \frac{-11}{2} - 36 = -\frac{83}{2}$

খ. মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণে মূলগুলি $3a, 4a, b$ $\therefore 3a + 4a + b = \frac{1}{2}$ $\therefore 7a + b = \frac{1}{2} \ldots\ldots$ (i)
এবং $3a \times 4a + 4a \times b + 3a \times b = \frac{-22}{2} = -11 \Rightarrow 12a^2 + 7a\left(\frac{1}{2} - 7a\right) + 11 = 0$
$\Rightarrow 12a^2 + \frac{7a}{2} - 49a^2 + 11 = 0 \Rightarrow -37a^2 + \frac{7a}{2} + 11 = 0$
$\Rightarrow 74a^2 - 7a - 22 = 0 \Rightarrow 74a^2 - 44a + 37a - 22 = 0$
$\Rightarrow 2a(37a - 22) + (37a - 22) = 0 \Rightarrow (37a - 22)(2a + 1) = 0 \therefore a = -\frac{1}{2}, \frac{22}{37}$
$a = \frac{22}{37}$ গ্রহণযোগ্য মান নয়, কারণ সেক্ষেত্রে 3a এবং 4a মূলদ্বয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে না
$\therefore a = \frac{1}{2}$ এবং $b = 4$ $\therefore$ মূলত্রয় $-\frac{3}{2}, -2, 4.$

গ. α ও β দ্বারা ১ম সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$A\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow a\alpha + b = -\frac{c}{\alpha}$

$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \Rightarrow a\beta + b = -\frac{c}{\beta}$

অতএব, $(a\alpha + b)^{-2}$ ও $(a\beta + b)^{-2}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি হবে-

$x^2 - \{(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}\}x + (a\alpha + b)^{-2}(a\beta + b)^{-2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left\{\frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\beta^2}{c^2}\right\}x + \left(\frac{\alpha\beta}{c^2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - \left\{\frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{c^2}\right\}x + \frac{\alpha^2\beta^2}{c^4} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left\{\frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{c^2}\right\}x + \frac{c^2}{c^4a^2} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{b^2 - 2ca}{a^2c^2}\right)x + \frac{1}{a^2c^2} = 0$

03. $\mathbf{f(x) = 4 + 3x - x^2 ; g(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 10}$

(ক) বহুপদী দ্বিঘাত সমীকরণের মূল বের করার পদ্ধতিটি লিখ। 2

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha^2 + \beta^2$ ও $\alpha^3 + \beta^3$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। 4

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + \sqrt{3}$; সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. এক চলক সমন্বিত বহুপদী দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $\alpha \neq 0$.

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$, [উভয় পক্ষকে 4a দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2.2ax.b + b^2 + 4ac = b^2 \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব, $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ হচ্ছে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল।

খ. $4 + 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4, -1$

$\alpha = 4, \beta = -1. \alpha^2 + \beta^2 = 16 + 1 = 17$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = 64 - 1 = 63$

$\therefore$ সমীকরণটি, $x^2 - (17 + 63)x + 17 \times 63 = 0 \Rightarrow x^2 - 80x + 1071 = 0$

গ. প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল $1 + \sqrt{3}$ যা অমূলদ।

$\therefore$ অপর একটি মূল হবে $1 - \sqrt{3}$ [$\because$অমূলদ মূল যুগল রূপে থাকে]

এখন, মূলদ্বয়ের যোগফল $= 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$ এবং

মূলদ্বয়ের গুণফল $= (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$

$\therefore 1 + \sqrt{3}$ এবং $1 - \sqrt{3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - 2x - 2 = 0$

$x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 2) - 5(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 5)(x^2 - 2x - 2) = 0 \therefore x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

অতএব, অপর মূলদ্বয় $1 - \sqrt{3}$ এবং 5. **(Ans)**

04. $x^2 - px + 6 = 0, x^2 - 6x - 16 = 0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ক) $2x^2 - 3x - 35 = 0$ সমাধান কর। 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত দ্বিতীয় দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $(\alpha + \beta)$ এবং $(\alpha - \beta)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি গঠন কর। 4

(গ) উদ্দীপকের প্রথম ও দ্বিতীয় দ্বিঘাত সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে p এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $2x^2 - 3x - 35 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 7x - 35 = 0 \Rightarrow 2x(x-5) + 7(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x-5)(2x+7) = 0$ ∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = 5, -\frac{7}{2}$.

খ. $x = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2} = 8, -2 \therefore \alpha = 8, \beta = -2 \therefore \alpha + \beta = 6, \alpha - \beta = 10$

∴ সমীকরণটি, $(x-6)(x-10) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 10x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0$

গ. বোর্ড প্রশ্ন 22 (গ) এর অনুরূপ।

05. (i) $P(x) = x^2 + px + q$ এবং $Q(x) = x^2 + qx + p$

(ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$

(ক) k এর মান কত হলে $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে? 2

(খ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ হলে এবং সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে। 4

(গ) উদ্দীপকে (ii) নং হতে মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে, p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 12 (ক) এর অনুরূপ।

খ. মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি α। তাহলে, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \cdots\cdots\cdots (i)$

$\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i) - (ii) \Rightarrow (p-q)\alpha + q - p = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{p-q}{p-q} = 1$, ইহাই সাধারণ মূল

(i) এ $\alpha = 1$ বসিয়ে আমরা পাই, $1 + p + q = 0 \Rightarrow p + q = -1 \cdots\cdots\cdots (iii)$

এখন, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল q ∴ অপর মূলটি q.

আবার, $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল p ∴ অপর মূলটি p.

∴ q এবং p মূল দ্বারা গঠিত সমীকরণ, $x^2 - (q+p)x + qp = 0 \Rightarrow x^2 + x + pq = 0$

অতএব অপর মূল দুইটি $x^2 + x + pq = 0$ সমীকরণের মূল হবে। **(Showed)**

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{p-x+x}{px-x^2} = \frac{1}{q} \Rightarrow px - x^2 = pq \Rightarrow x^2 - px + pq = 0 \ldots. (i)$

মনেকরি, (i) এর মূলদ্বয় α ও β $\therefore \alpha + \beta = p, \alpha\beta = pq$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\alpha - \beta = \pm r \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = r^2 \Rightarrow p^2 - 4pq - r^2 = 0$

$\therefore p = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 4(-r^2)}}{2} = \frac{4q \pm 2\sqrt{4q^2 + r^2}}{2} = 2q \pm \sqrt{4q^2 + r^2}$

অধ্যায় ০৬ — কনিক

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	2	2	2	5				8	1	1	1	4	1	1	1	5	1	1	1	3
রাজশাহী	2	2	2	5				7	1	1	1	4	সকল বোর্ড				1	1	1	4
চট্টগ্রাম	2	2	2	4				7	1	1	1	4					1	1	1	3
সিলেট	2	2	2	8				7	1	1	1	3					1	1	1	4
বরিশাল	2	2	2	5				8				3					1	1	1	4
যশোর	1	1	1	5				7				1					1	1	1	4
কুমিল্লা	2	2	2	4				6				3					1	1	1	3
দিনাজপুর	2	2	2	5				7				4								3
ময়মনসিংহ	2	2	2	4				9												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই, ২০২১ সালে শর্ট সিলেবাসে অধ্যায়-০৬ ছিল না। ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ সাধারণ সমীকরণ হতে কনিক চিহ্নিতকরণ: $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c = 0$

◈ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Case-01: $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ হলে, একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে।

Example-1: $x^2 - y^2 = 0; a = 1, b = -1; g = f = h = c = 0$

$\Delta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ∴ উক্ত সমীকরণ একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে। সরলরেখাদ্বয় হবে, $x + y = 0; x - y = 0$

Case-02: যদি $\Delta \neq 0$ এবং $a = b,\ h = 0,\ g^2 + f^2 - c \geq 0$ হয়, তাহলে এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

- x ও y দ্বিঘাত হবে।
- x^2 ও y^2 এর সহগদ্বয় সমান হবে।
- xy সম্বলিত কোন পদ থাকবে না।
- $g^2 + f^2 - c \geq 0$

} হলেও, বৃত্ত নির্দেশ করে।

Case-03: $\Delta \neq 0$ এবং $\boxed{h^2 = ab}$ হলে পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

$y^2 = 4x + 2 \Rightarrow y^2 - 4x - 2 = 0$ $\quad \left.\begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix}\right\}$ $\quad h = 0$, $\therefore h^2 = 0 = ab$

Case-04: যদি $\Delta \neq 0$; $\boxed{h^2 < ab} \rightarrow \boxed{ab > h^2}$ হয়, তবে ইহা উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a = \frac{1}{4}$ $\quad$ $h^2 = 0$

$b = 1$ $\quad$ $ab = \frac{1}{4}$

$h = 0$ $\quad$ $\underline{ab > h^2}$

Case-05: যদি $\Delta \neq 0$; $ab < h^2$ হয়, তবে ইহা অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad$ $\boxed{h^2 > ab}$

$a = \frac{1}{4}$ $\quad$ $h^2 = 0$

$b = \frac{-1}{9}$ $\quad$ $ab = \frac{-1}{36}$

$h = 0$ $\quad$ $\underline{ab < h^2}$

- উৎকেন্দ্রিকতা e হলে, $e = 1 \rightarrow$ পরাবৃত্ত ; $0 < e < 1 \rightarrow$ উপবৃত্ত ; $e > 1 \rightarrow$ অধিবৃত্ত; $e \rightarrow 0$ হলে বৃত্ত; $e \rightarrow \infty$ হলে জোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে।
- কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দ্বিঘাত সমন্বিত পদগুলো পূর্ণবর্গ সৃষ্টি করলে এটি একটি পরাবৃত্ত।
- বৃহৎ অক্ষই উপবৃত্তের সর্ববৃহৎ জ্যা।
- উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী সকল জ্যা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
- আয়তাকার অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, $e = \sqrt{2}$

পরাবৃত্ত (Parabola)

	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$
পরাবৃত্তের আকার:	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, A:	$(0,0)$	$(0,0)$	(α,β)	(α,β)
(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, S:	$(a,0)$	$(0,a)$	$(a+\alpha,\beta)$	$(\alpha,a+\beta)$
(iii) নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, Z:	$(-a,0)$	$(0,-a)$	$(-a+\alpha,\beta)$	$(\alpha,-a+\beta)$
(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ:	$y = 0$	$x = 0$	$y-\beta = 0$	$x-\alpha = 0$
(v) নিয়ামকরেখার সমীকরণ:	$x+a = 0$	$y+a = 0$	$x-\alpha+a = 0$	$y-\beta+a = 0$
(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ:	$x = a$	$y = a$	$x-\alpha = a$	$y-\beta = a$
(vii) শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ:	$x = 0$	$y = 0$	$x-\alpha = 0$	$y-\beta = 0$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, LL′:	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
(ix) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক:	$(a,\pm 2a)$	$(\pm 2a,a)$	$(a+\alpha,\pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha,a+\beta)$
(x) (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, SP:	$x+a$	$y+a$	$x-\alpha+a$	$y-\beta+a$
(xi) উপকেন্দ্র ও শীর্ষের দূরত্ব	a	a	a	a
(xii) পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2$, $y = 2at$	$x = 2at, y = at^2$	$x = \alpha + at^2$, $y = \beta + 2at$	$x = \alpha + 2at$, $y = \beta + at^2$
(xiii) পোলার সমীকরণ	$r = 4a\cot\theta\ \mathrm{cosec}\,\theta$	$r = 4a\tan\theta\sec\theta$	$(r\sin\theta-\beta)^2 = 4a(4\cos\theta-\alpha)$	$(r\cos\theta-\alpha)^2 = 4a(r\sin\theta-\beta)$

➲ অন্যান্য:

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x = ay^2 + by + c$;

শীর্ষ $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{1}{|a|}$

(ii) y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y = ax^2 + bx + c$;

শীর্ষ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{1}{|a|}$

(iii) $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $yy_1 = 2a(x + x_1)$

(iv) $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c = \frac{a}{m}$;

$x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx - am^2$ $[c = -am^2]$

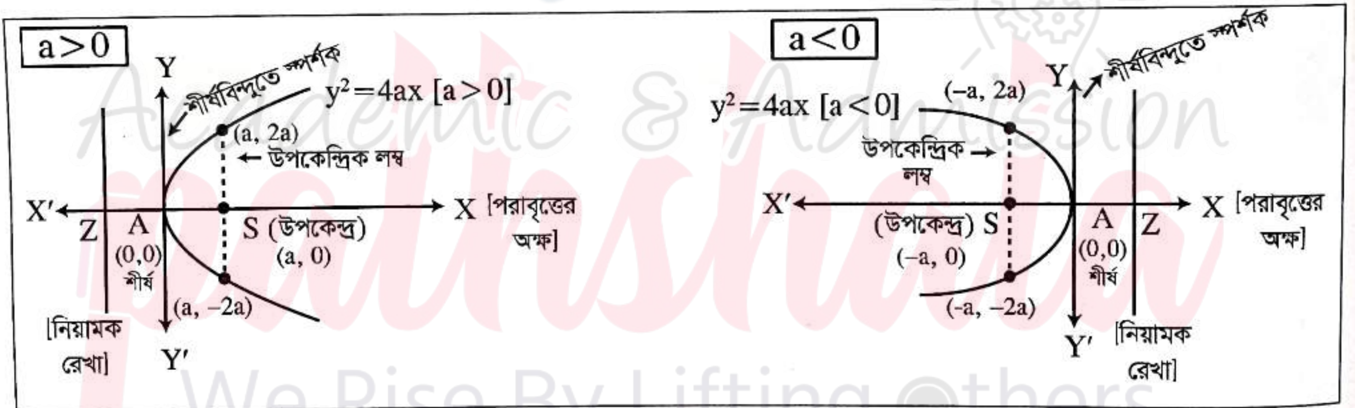
(v) $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 2 × উৎকেন্দ্রিকতা × উপকেন্দ্র হতে দিকাক্ষের লম্ব দূরত্ব।

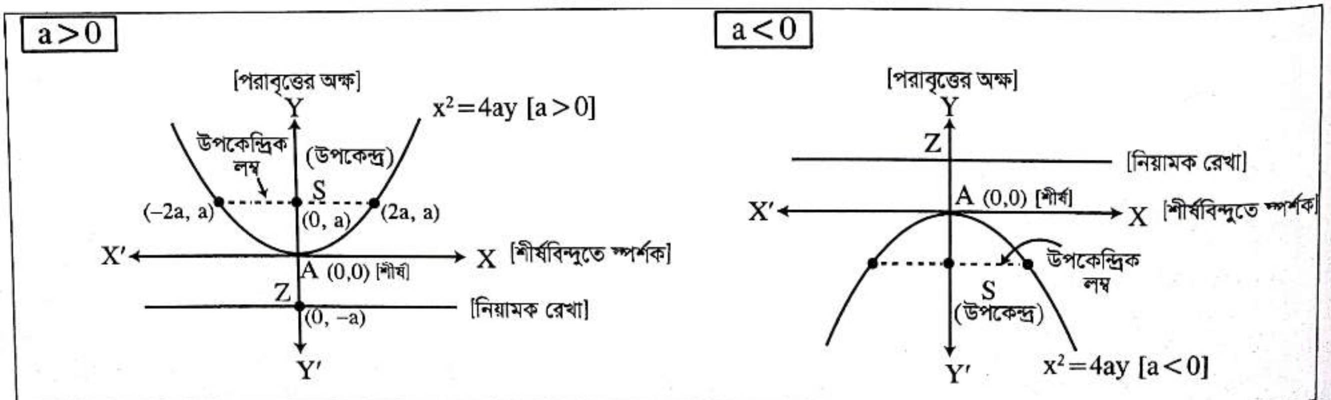
(vii) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ, $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$

(viii) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং অক্ষরেখা y -অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ, $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

➲ **$y^2 = 4ax$** এর লেখচিত্র:



➲ **$x^2 = 4ay$** এর লেখচিত্র:

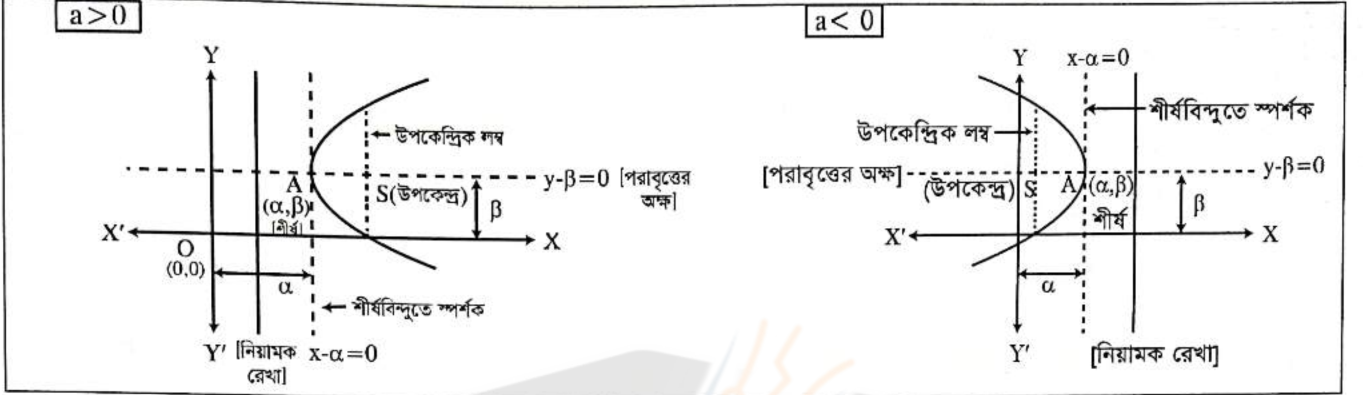


➲ অক্ষ স্থানান্তর:

(i) **(α, β) শীর্ষ এবং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের চিত্র:**

$A(\alpha, \beta)$ তে শীর্ষবিন্দু এবং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল পরাবৃত্তের সমীকরণ,

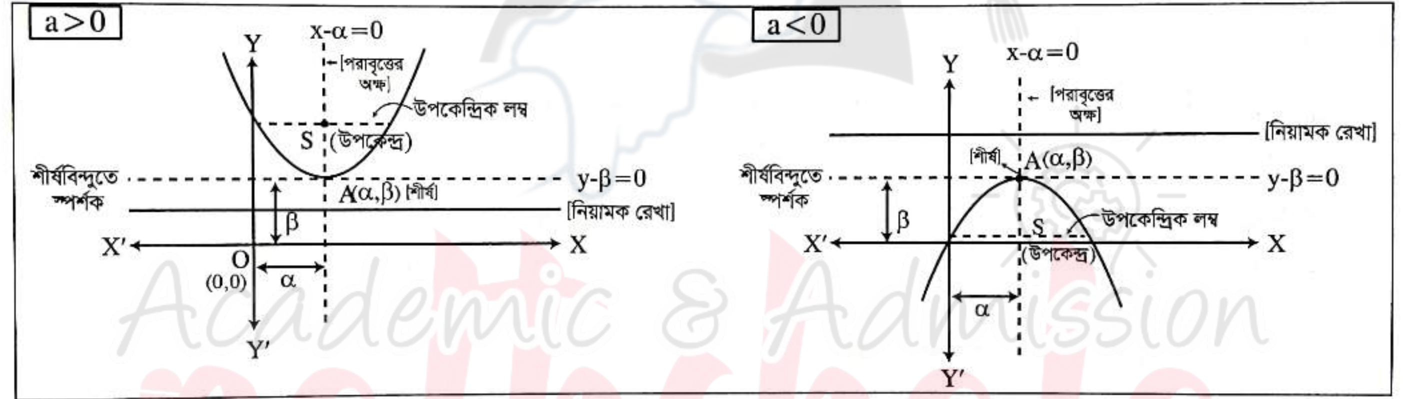
$\boxed{(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)}$ বা, $\boxed{Y^2 = 4aX}$ [যেখানে, $Y = y - \beta, X = x - \alpha$]



(ii) **(α, β) শীর্ষ এবং অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের চিত্র:**

$A(\alpha, \beta)$ তে শীর্ষ বিন্দু এবং অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$\boxed{(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)}$ বা, $\boxed{X^2 = 4aY}$ [যেখানে, $Y = y - \beta, X = x - \alpha$]



উপবৃত্ত (Ellipse)

➲ **$0 < e < 1$** হলে কোন বিন্দুর সঞ্চারপথকে উপবৃত্ত বলে।

ক্রমিক নং	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a<b$
(i)	কেন্দ্র, C	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii)	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$	$2b$	$2a$	$2b$
(iii)	ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$	$2a$	$2b$	$2a$
(iv)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha \pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm be)$
(v)	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$	$y-\beta = 0$	$x-\alpha = 0$
(vi)	ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$	$x-\alpha = 0$	$y-\beta = 0$
(vii)	দিকাক্ষের সমীকরণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{b}{e}$	$x = \alpha \pm \frac{a}{e}$	$y = \beta \pm \frac{b}{e}$
(viii)	উপকেন্দ্রিক লম্ব, LL′	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(ix)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$y = \pm be$	$x = \alpha \pm ae$	$y = \beta \pm be$

(x)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
(xi)	বৃহৎ অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm b)$
(xii)	ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(\alpha, \beta \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$
(xiii)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xiv)	নিয়ামকের দূরত্ব, ZZ′	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$
(xv)	ক্ষেত্রফল	πab	πab	πab	πab
(xvi)	পরামিতিক সমীকরণ	$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x = \alpha + a\cos\theta$, $y = \beta + b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$	$x = \alpha + a\cos\theta$, $y = \beta + b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$

- কোনো উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) হলে এবং এর অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর হলে, সমীকরণ হবে- $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে $y = mx + c$ সরলরেখা স্পর্শ করার শর্ত-

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+\ )^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mcx + c^2) = a^2b^2$

$\Rightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mcx + (a^2c^2 - a^2b^2) = 0$

এখন রেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে অর্থাৎ নিশ্চায়ক $= 0$

$4a^4m^2c^2 - 4 \times (b^2 + a^2m^2)(a^2c^2 - a^2b^2) = 0 \Rightarrow a^2m^2c^2 + (b^2 + a^2m^2)(b^2 - c^2) = 0$

$\Rightarrow a^2m^2c^2 + b^4 - b^2c^2 + a^2b^2m^2 - a^2m^2c^2 = 0 \Rightarrow b^2(b^2 - c^2 + a^2m^2) = 0$

$\therefore c^2 = a^2m^2 + b^2$ এটাই স্পর্শ করার শর্ত।

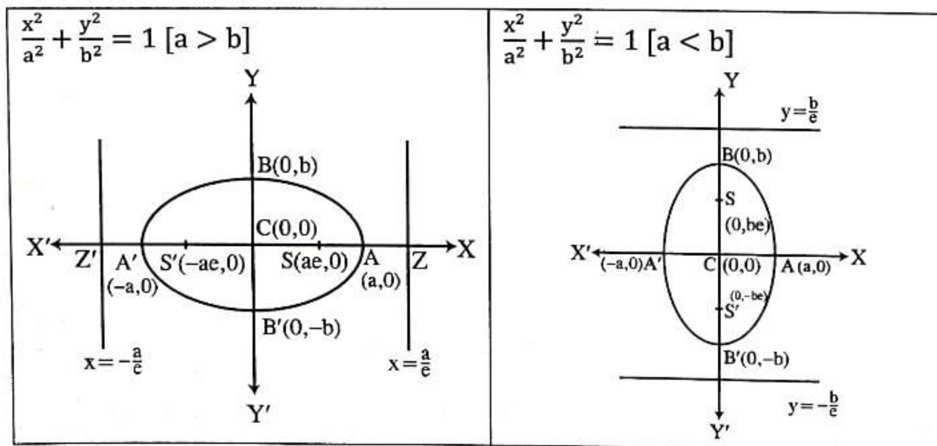
Note:

(i) $c^2 > a^2m^2 + b^2$ হলে রেখা উপবৃত্তকে ছেদ বা স্পর্শ করে না।

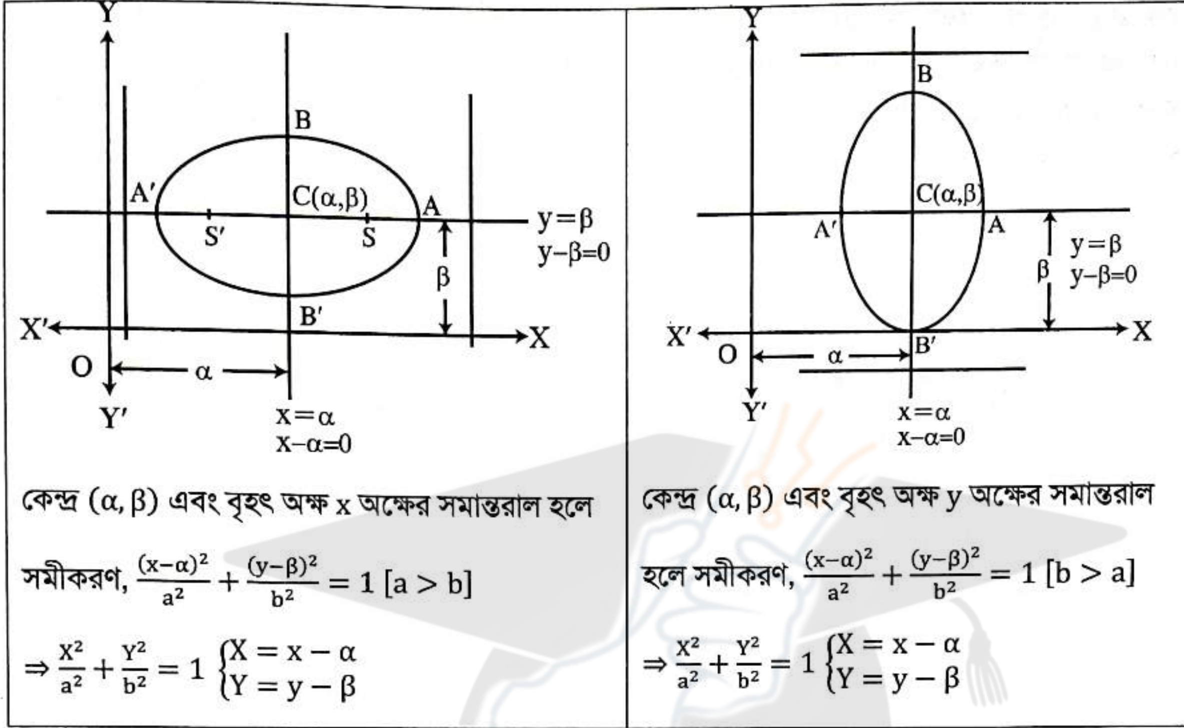
(ii) $c^2 = a^2m^2 + b^2$ হলে রেখা উপবৃত্তকে স্পর্শ করে ।

(iii) $c^2 < a^2m^2 + b^2$ হলে রেখা উপবৃত্তকে ছেদ করে ।

- উপবৃত্ত:



➤ অক্ষ স্থানান্তর:



➲ পরামিতিক সমীকরণ: $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ অথবা

$x = a\cos\theta+\alpha,\ y = b\sin\theta+\beta$; a, b, α, β = constant $(a\neq b)$

➲ উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে উপকেন্দ্রিক দূরত্বদ্বয়ের যোগফল বৃহৎ অক্ষের সমান।

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$; A, B, C, D, E constant

$A\neq B$ হলে x_1, y_1 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $= Axx_1+Byy_1+C\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+D\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+E=0$

➤ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক $y=mx+c$ হলে, $c^2=a^2m^2+b^2$

➤ (α, β) কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

➤ $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ উপবৃত্তের উপর θ_1 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a}\cos\theta_1+\frac{y}{b}\sin\theta_1=1$

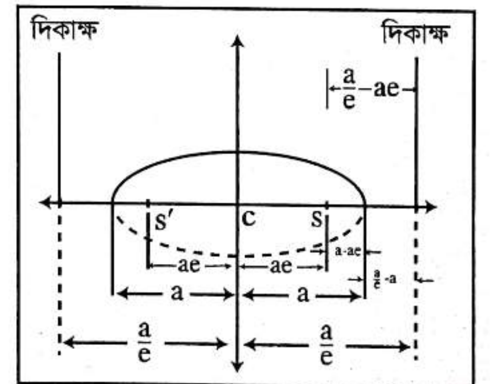
(i) উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{a}{e}-ae$

(ii) উপকেন্দ্র ও বিপরীত দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{a}{e}+ae$

(iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = 2ae

(iv) দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2\frac{a}{e}$

(v) উপকেন্দ্র ও অনুরূপ শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব = a − ae



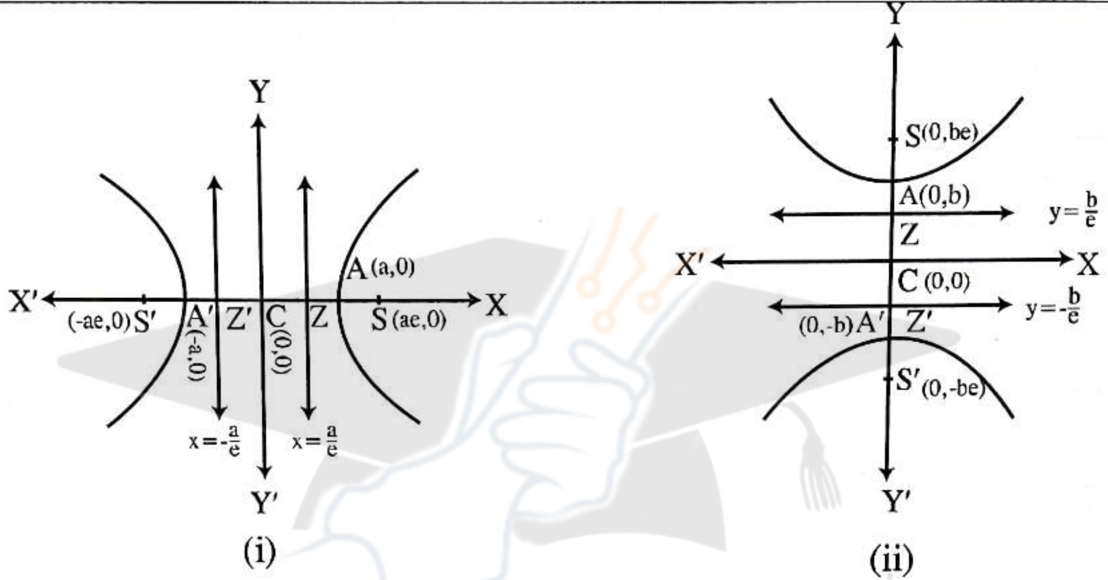
অধিবৃত্ত (Hyperbola)

(i) কনিকের ক্ষেত্রে $1 < e < \infty$ হলে কোন চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত।

(ii) P (x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু হলে এবং যদি S ও S′ উপকেন্দ্র হয়, তবে $|PS' - PS| = 2a$

(iii) আয়তাকার অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, $e = \sqrt{2}$

➲ অধিবৃত্ত সংক্রান্ত প্রযোজনীয় সূত্রসমূহ:

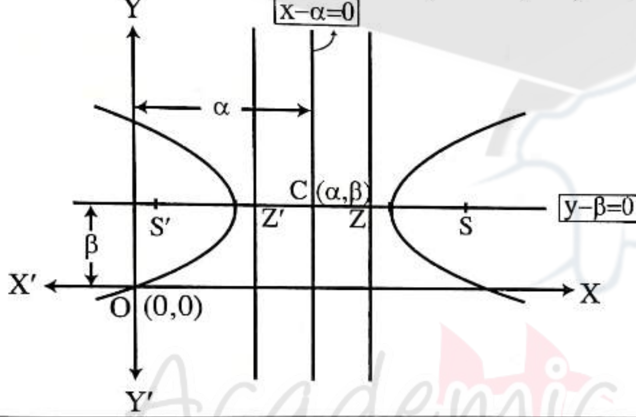


(i)	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1$
(ii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$	$x = a\tan\theta$, $y = b\sec\theta$	$x = \alpha + a\sec\theta$, $y = \beta + b\tan\theta$	$x = \alpha + a\tan\theta$, $y = \beta + b\sec\theta$
(iii)	পোলার স্থানাংকে সমীকরণ	$r^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$	$r^2(a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta) = a^2b^2$	$b^2(r\cos\theta-\alpha)^2 - a^2(r\sin\theta-\beta)^2 = a^2b^2$	$a^2(r\sin\theta-\beta)^2 - b^2(r\cos\theta-\alpha)^2 = a^2b^2$
(iv)	কেন্দ্র, C	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(v)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha \pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm be)$
(vi)	অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(vii)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাংক	$(\pm, a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm b)$
(viii)	আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(ix)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(xi)	আড় অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
(xii)	অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
(xiii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$y = \pm be$	$x = \alpha \pm ae$	$y = \beta \pm be$
(xiv)	নিয়ামক রেখার সমীকরণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{b}{e}$	$x = \alpha \pm \frac{a}{e}$	$y = \beta \pm \frac{b}{e}$

(xv)	উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xvi)	উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যবর্তী দূরত্ব	$ae-\frac{a}{e}$	$be-\frac{b}{e}$	$ae-\frac{a}{e}$	$be-\frac{b}{e}$
(xvii)	নিয়ামক/দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, ZZ′	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$
(xviii)	অসীমতটের সমীকরণ	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$	$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$
(xix)	শীর্ষ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ	$x=\pm a$	$y=\pm b$	$x=\alpha\pm a$	$y=\beta\pm b$

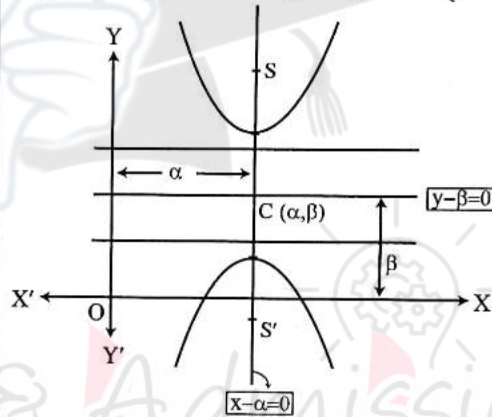
(a) আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α,β) হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \left\{\text{যেখানে, } \begin{matrix} x-\alpha=X \\ y-\beta=Y \end{matrix}\right.$$



(b) আড় অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α,β) হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=1 \left\{\text{যেখানে, } \begin{matrix} x-\alpha=X \\ y-\beta=Y \end{matrix}\right.$$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের:

(i) (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

(ii) θ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$

(iii) পরামিতিক স্থানাংকে $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $(a\sec\theta_1,\ b\tan\theta_1)$ এবং $(a\sec\theta_2,\ b\tan\theta_2)$ বিন্দুগামী জ্যা এর সমীকরণ, $\frac{x}{a}\cos\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)-\frac{y}{b}\sin\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)=\cos\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$

(iv) ডানপক্ষে 1 এর পরিবর্তে 0 বসালে অসমীতটদ্বয়ের সমীকরণ পাওয়া যায়।

02. কোন শর্ত উল্লেখ না থাকলে $a>b$ ধরা হয় । তবে ফোকাসের কোটি স্থির থাকলে $a>b$ এবং ভুজ স্থির থাকলে $a<b$ ধরা হয়।

03. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ $y=\pm\frac{bx}{a}$, অসীমতটদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\theta=2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

04. কোনো অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয় $bx+ay=0$ এবং $bx-ay=0$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে।
$(bx+ay)(bx-ay)=\lambda$ [যেখানে λ একটি ধ্রুবক] [অথবা $(bx+ay)(bx-ay)+\lambda=0$]
১ম অসীমতট × ২য় অসীমতট + λ = 0 [λ = ধ্রুবক]

05. আড় অক্ষ x -অক্ষের সমান্তরাল এবং কেন্দ্র (α,β) এরূপ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

06. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর অনুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

07. $y=mx+c$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c^2=a^2m^2-b^2$

08. $y=mx+c$ রেখাটি $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c^2=b^2-a^2m^2$

09. P(x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু হলে এবং যদি S ও S′ উপকেন্দ্র হয়, তবে $|PS'-PS|=2a$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **MCQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তটি $y = mx + c$, রেখাকে স্পর্শ করলে— **[DB, SB'22; DB, SB'21]**

(i) $c = \frac{3}{2m}$

(ii) পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সমীকরণ উভয়ই মূলবিন্দুগামী।

(iii) স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2m^2}, \frac{3}{m}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(c)**; $y = mx + c$ সরল রেখাটির y-অক্ষরে ছেদক অংশ উপস্থিত। তাই ইহা মূলবিন্দুগামী সরলরেখা নয়

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

02. কনিকটির উৎকেন্দ্রিকতা কত? **[DB, JB'22; RB, SB, JB, Din.B'21; DB, Ctg.B'19; All.B'18]**

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

সমাধান: **(a)**; $16y^2 - 9x^2 = 144 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

$\therefore e = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

03. কনিকটির— **[DB, MB'22; RB'19]**

(i) অসীমতট রেখার সমীকরণ, $y = \pm\frac{3}{4}x$

(ii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $5y \pm 9 = 0$

(iii) পরামিতিক সমীকরণ, $x = 3\sec\theta, y = 4\tan\theta$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(a)**; $16y^2 - 9x^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$

এখানে, $a = 4, b = 3$

(i) $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x$; (i) নং সঠিক

(ii) $y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{3}{\frac{5}{3}} = \pm\frac{9}{5} \Rightarrow 5y \pm 9 = 0$

(ii) নং সঠিক (iii) পরামিতিক স্থানাঙ্ক:

$(a\tan\theta, b\sec\theta) = (4\tan\theta, 3\sec\theta)$

সুতরাং, (i) ও (ii) নং সঠিক।

04. $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র হবে— **[DB, Ctg.B'22; SB, BB'19]**

(a) $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$ (b) $\left(\frac{9}{4}, -2\right)$ (c) $\left(\frac{5}{4}, -1\right)$ (d) $\left(\frac{13}{4}, -1\right)$

সমাধান: **(c)**; $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 2y = -4x + 8$

$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -4x + 8 + 1$

$\Rightarrow (y+1)^2 = -4x + 9 \Rightarrow (y+1)^2 = -4\left(x - \frac{9}{4}\right)$

$\therefore \{y - (-1)\}^2 = -4.1.\left(x - \frac{9}{4}\right)$

মনে করি, $y + 1 = Y,\ x - \frac{9}{4} = X$;

অর্থাৎ, $y^2 = -4.1.X$ উপকেন্দ্র:$(-a, 0)$

অর্থাৎ, $X = -a \Rightarrow x - \frac{9}{4} = -1$

$\therefore x = -1 + \frac{9}{4} = \frac{-4+9}{4} = \frac{5}{4}$

$\therefore y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \therefore$ উপকেন্দ্র: $\left(\frac{5}{4}, -1\right)$

05. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{3}$ হলে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য কত? **[DB'22]**

(a) $4\sqrt{2}$ (b) $8\sqrt{2}$ (c) $9\sqrt{2}$ (d) $4\sqrt{6}$

সমাধান: **(b)**; $2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow e = \frac{1}{9} \Rightarrow e^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{36} = \frac{1}{9} \Rightarrow b^2 = 32 \therefore b = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

06. $y^2 = 32x - 64$ পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ– **[Ctg.B, SB, JB'22; DB, RB'21; Din.B'19; BB'17]**

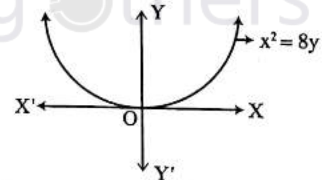
(a) $x - 6 = 0$ (b) $x + 8 = 0$

(c) $x - 10 = 0$ (d) $x + 6 = 0$

সমাধান: **(d)**; $X = -a \Rightarrow x - 2 = -8$

$\Rightarrow x - 2 + 8 = 0 \therefore x + 6 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



07. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক– **[RB, Ctg.B, SB'22]**

(a) (8, 0) (b) (2, 0) (c) (0, 2) (d) (0, 8)

সমাধান: **(c)**; $x^2 = 8y \Rightarrow x^2 = 4.2.y$

$\therefore$ উপকেন্দ্র: $(0, a) \equiv (0, 2)$

08. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ- **[Ctg.B'22]**

(a) $x = 0$ (b) $y = 3$ (c) $x = 4$ (d) $y = 0$

সমাধান: **(d)**; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ: $y = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2-16y^2=144$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

09. অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? **[RB'22]**
(a) $\frac{9}{8}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) $\frac{32}{5}$ (d) $\frac{32}{9}$
সমাধান: (b); $9x^2-16y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$
এখানে, $a=4,\ b=3$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2.3^2}{4}=\frac{9}{2}$

10. নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি? **[RB'22]**
(a) $x=\frac{16}{5}$ (b) $y=\frac{16}{5}$ (c) $x=\pm\frac{16}{5}$ (d) $y=\pm\frac{16}{5}$
সমাধান: (c); $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{\frac{5}{4}}=\pm\frac{16}{5}$

11. $9x^2+7y^2=63$ কনিকের ক্ষেত্রফল কত? **[RB'22]**
(a) 7π (b) 9π (c) $7\sqrt{3}\pi$ (d) $3\sqrt{7}\pi$
সমাধান: (d); $9x^2+7y^2=63$
$\Rightarrow \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y^2}{3^3}=1$
এখানে, $e<1$। অর্থাৎ, কনিকটি উপবৃত্ত।
$\therefore$ কনিকটির ক্ষেত্রফল $=\pi ab=\pi.\sqrt{7}.3=3\sqrt{7}\pi$

12. $9x^2-24xy+12y^2-48x-24y+36=0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? **[RB'22; JB'19]**
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: (d); এখানে, $h=-12, a=9, b=12$
অর্থাৎ, $h^2=144$
$ab=9\times12=108 \therefore h^2>ab \therefore$ কনিকটি অধিবৃত্ত।

13. $x^2=-12y$ পরাবৃত্তের – **[SB'22]**
(i) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0,-3)$
(ii) নিয়ামকের সমীকরণ $y-3=0$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y+3=0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $x^2=-12y \Rightarrow x^2=-4.3.y$
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক: $(0,-a)\equiv(0,-3)$
নিয়ামকের সমীকরণ: $y=a \Rightarrow y=3 \Rightarrow y-3=0$
উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $y=-a$
$\Rightarrow y=-3 \therefore y+3=0 \therefore$ (i), (ii) ও (iii) নং সঠিক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$25x^2-16y^2+400=0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

14. অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে– **[SB'22; DB, Ctg.B'21]**
(a) 10, 8 (b) 8, 10 (c) 5, 4 (d) 4, 5
সমাধান: (a); $25x^2-16y^2+400=0$
$\Rightarrow 16y^2-25x^2=400$
$\Rightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{4^2}=1$ এখন, $a=4, b=5$
$\therefore$ আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b=2\times5=10$ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2a=2\times4=8$

15. নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি? **[SB'22; DB'21]**
(a) $y=\pm\frac{16}{\sqrt{41}}$ (b) $y=\pm\frac{25}{\sqrt{39}}$
(c) $y=\pm\frac{25}{\sqrt{41}}$ (d) $y=\pm\frac{\sqrt{41}}{25}$
সমাধান: (c); $y=\pm\frac{b}{e}\Rightarrow y=\pm\frac{5}{\frac{\sqrt{41}}{5}}$
$\therefore y=\pm\frac{25}{\sqrt{41}}, e=\sqrt{1+\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{41}{25}}=\frac{\sqrt{41}}{5}$

16. $3x^2+5y^2=15$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হবে– **[SB'22, 21; Ctg.B'21; CB'19; JB'17]**
(a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$
সমাধান: (d); $3x^2+5y^2=15 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{15}{3}}+\frac{y^2}{\frac{15}{5}}=1$
$\Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$; এখানে $a>b$
$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}$
$\therefore e=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{5\times2}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{5\times2}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

17. $x^2+4x+2y=0$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব x-অক্ষের সাথে কত কোণ তৈরি করে? **[SB'22]**
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0
সমাধান: (d); $x^2+4x+2y=0$
$\Rightarrow x^2+4x+4=-2y+4$
$\Rightarrow x^2+2.x.2+(2)^2=-2(y-2)$
$\Rightarrow (x+2)^2=-4.\frac{1}{2}(y-2)\Rightarrow X^2=-4.\frac{1}{2}Y$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $Y=-a\Rightarrow y-2=-\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 2y-4=-1 \therefore 2y-3=0$
উপকেন্দ্রিক লম্ব x-অক্ষের সমান্তরাল অর্থা x-অক্ষের সাথে $0°$ কোণ উৎপন্ন করবে

18. $(x-4)^2=-4(y-5)$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নিচের কোনটি? **[BB'22]**
(a) $x=4$ (b) $y=6$ (c) $x=5$ (d) $y=5$
সমাধান: (b); $(x-4)^2=-4(y-5)$
$\Rightarrow y-5=1\Rightarrow y=6$

19. $y^2 = -12x$ পরাবৃত্তের - **[BB'22]**
(i) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16 একক
(ii) অক্ষের সমীকরণ $y = 0$
(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $x = 3$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(b)**; (i) এ উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 12$ একক

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$8x^2 + 3y^2 = 1$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

20. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি? **[BB'22; CB'21; Din.B'19]**
(a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
সমাধান: **(d)**; $8x^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{8}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$
দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

21. উপবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? **[BB'22]**
(a) $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$
(c) $\left(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (d) $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$
সমাধান: **(a)**; শীর্ষবিন্দু: $(0, \pm b) \equiv \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

22. $x^2 - y^2 = 18$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[BB'22]**
(a) 6 (b) 12 (c) 16 (d) 18
সমাধান: **(b)**; $x^2 - y^2 = 18$
$\Rightarrow \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1; e = \sqrt{2}\ a = b = 3\sqrt{2}$
distance $= 2ae = 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6 \times 2 = 12$

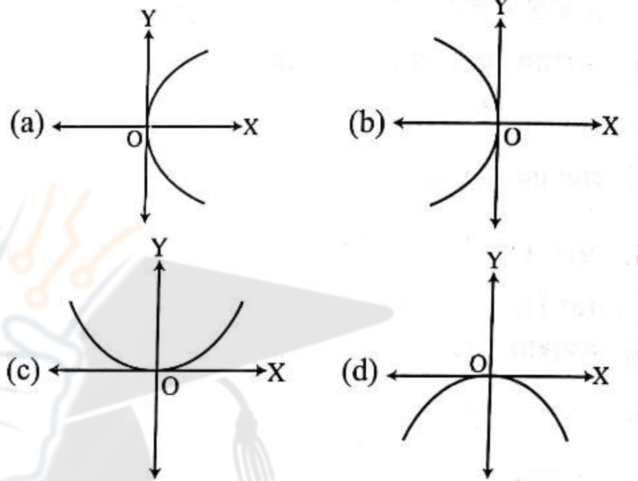
23. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ $(4, 8)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত? **[JB, CB'22; JB'21, 17]**
(a) 20 (b) 16 (c) 12 (d) 8
সমাধান: **(d)**; উপকেন্দ্রিক দূরত্ব: $a + x = 4 + 4 = 8$,
$y^2 = 16x = 4.4x; \therefore a = 4$

24. $4x^2 + y^2 = 4$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রে- **[JB'22]**
(i) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 (ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 1
(iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm\sqrt{2})$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(a)**; $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$
$\Rightarrow \frac{2a^2}{b} = \frac{2\times1}{2} = 1$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y^2 = 1 - x$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

25. পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু কোনটি? **[JB'22; RB, BB, MB'21]**
(a) $(-1, 0)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, -1)$ (d) $(0, 1)$
সমাধান: **(b)**; শীর্ষবিন্দু $(1, 0)$

26. $x^2 = -12y$ এর স্কেচ কোনটি? **[CB'22; BB'21; RB'17] [Ans: d]**



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 + 25y^2 = 225$

27. উদ্দীপকের কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[CB'22; DB, SB'21; Din.B'19; BB'17]**
(a) $(\pm4, 0)$ (b) $(\pm5, 0)$ (c) $(0, \pm4)$ (d) $(0, \pm5)$
সমাধান: **(a)**; $9x^2 + 25y^2 = 225$
$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1; a > b$
এখানে, $a = 5, b = 3 \therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$
$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক: $(\pm ae, 0) \equiv \left(\pm5.\frac{4}{5}, 0\right) \equiv (\pm4, 0)$

28. উদ্দীপকের কনিকের নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[CB'22]**
(a) $\frac{25}{4}$ (b) $\frac{25}{2}$ (c) 4 (d) 8
সমাধান: **(b)**; নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব:
$2\frac{a}{e} = 2.\frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{2}$

29. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের আড় অক্ষ নিচের কোনটি? **[Din.B'22] [Ans: b]**
(a) x-অক্ষ (b) y-অক্ষ
(c) x-অক্ষের সমান্তরাল (d) y-অক্ষের সমান্তরাল

30. $x^2 = 16y$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা কত হবে? **[Din.B, MB'22] [Ans: a]**
(a) $e = 1$ (b) $e = 0$ (c) $e > 1$ (d) $0 < e < 1$

31. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ [Din.B'22]

(i) উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{4}{5}$

(ii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=\left(0,\pm\frac{24}{5}\right)$

(iii) নিয়ামক দুইটির দূরত্ব= 25

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান (b); $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1\Rightarrow\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ এখানে, $a=10, b=6$ $[a>b]$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{36}{100}}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক: $(\pm ae,0)\equiv\left(\pm10.\frac{4}{5},0\right)$

$\equiv(\pm8,0)$; নিয়ামকদ্বয়ের দূরত্ব: $2\frac{a}{e}=2.\frac{10}{\frac{4}{5}}=25$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$।

32. বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য কত একক? [Din.B'22]

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (a); $2b=2\Rightarrow b=1$; $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1-\frac{1^2}{a^2}\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{2}\therefore 2a=2.\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

33. উপবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [Din.B'22]

(a) $3x^2+5y^2=5$ (b) $4x^2+3y^2=5$

(c) $2x^2+3y^2=5$ (d) $4x^2+5y^2=5$

সমাধান: (d); $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{(1)^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{5}{4}}+\frac{y^2}{1}=1$

$\Rightarrow\frac{4x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1\Rightarrow\frac{4x^2+5y^2}{5}=1\therefore 4x^2+5y^2=5$

34. $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব কত? [MB'22]

(a) 2 (b) $\sqrt{3}$ (c) 1 (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

সমাধান: (a); $3x^2+4y^2=12\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

$\Rightarrow\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$; $a>b$

$\therefore e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $=2ae=2.2.\frac{1}{2}=2$

35. $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ অধিবৃত্তের- [MB'22]

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-2,0)$ (ii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 4

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1\Rightarrow\frac{Y^2}{2^2}-\frac{X^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক: $(0,-2)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$25x^2+y^2=25$

36. কনিকটির ক্ষেত্রে- [DB, Ctg.B, BB'21; DB'17]

(i) কেন্দ্রের স্থানাংক $(0,0)$

(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{5}{2}$

(iii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 10

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); $\frac{x^2}{(1)^2}+\frac{y^2}{(5)^2}=1\therefore$ কেন্দ্র $\equiv(0,0)$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষ $=2b=10$ একক।

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=2\frac{a^2}{b}=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ একক

37. $9x^2+4y^2=36$ এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? [DB'21]

(a) 3 (b) 9 (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{8}{3}$

সমাধান: (d); $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

38. $(2,4)$ বিন্দুতে $y^2=8x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [DB'21]

(a) $x+y-2=0$ (b) $x-y-2=0$

(c) $x-y+2=0$ (d) $x=0$

সমাধান: (c); $y.4=8\left(\frac{x+2}{2}\right)\Rightarrow 4y=4(x+2)$

$\therefore y=x+2\Rightarrow x-y+2=0$

$\left|2y\frac{dy}{dx}=8\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{4}{y}\therefore\frac{dy}{dx}=1\right.$

39. $2x^2+3y^2=6$ কনিকের– [RB'21]

(i) বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{3}$ একক

(ii) ক্ষুদ্রতম অক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$ একক

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $=\frac{2b^2}{a}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

40. $2x^2+3y^2-4x-12y+8=0$ সমীকরণটি- [RB, JB, CB'21; JB'19]

(a) বৃত্তের (b) পরাবৃত্তের

(c) অধিবৃত্তের (d) উপবৃত্তের

সমাধান: (d); $h^2-ab=0-6=-6<0$

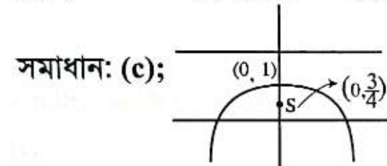
41. একটি কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$। কনিকটি একটি- [RB'21]

(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: (c); $e>1$

42. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RB'21]**
(a) $(at^2, 2at)$ (b) $(-at^2, 2at)$
(c) $(2at, at^2)$ (d) $(-2at, at^2)$
সমাধান: **(a)**; $x = at^2$ হলে, $y^2 \equiv (2at)^2 = 4a^2t^2$
$4ax = 4a \times at^2 = 4a^2t^2 \therefore y^2 = 4ax$

43. একটি অধিবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দুর পরামিতিক স্থানাংক $(4\sec\theta, 6\tan\theta)$. অধিবৃত্তটির সমীকরণ- **[Ctg.B'21]**
(a) $16x^2 - 25y^2 = 400$ (b) $16x^2 - 25y^2 = 400$
(c) $9x^2 - 4y^2 = 144$ (d) $4x^2 - 9y^2 = 144$
সমাধান: **(c)**; $x = 4\sec\theta \Rightarrow \frac{x}{4} = \sec\theta \cdots\cdots$ (i)
$y = 6\tan\theta \Rightarrow \frac{y}{6} = \tan\theta \cdots\cdots$ (ii)
$\{(i)^2 - (ii)^2\} \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$
$\Rightarrow 9x^2 - 4y^2 = 144$

44. $x^2 = 1 - y$ পরাবৃত্তটির- **[Ctg.B'21]**
(i) শীর্ষবিন্দু $(1, 0)$ (ii) উপকেন্দ্র $\left(0, \frac{3}{4}\right)$
(iii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $4y = 5$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(c)**;


$X^2 = -4.\left(\frac{1}{4}\right).(y-1)$;
নিয়ামক, $y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \therefore 4y = 5$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

45. অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত? **[Ctg.B'21]**
(a) $(\pm\sqrt{13}, 0)$ (b) $(\pm\sqrt{5}, 0)$
(c) $(0, \pm\sqrt{5})$ (d) $(0, \pm\sqrt{13})$
সমাধান: **(d)**; উপকেন্দ্র $\equiv (0, \pm be)$
$\equiv \left(0, \pm\sqrt{a^2+b^2}\right) = \left(0, \pm\sqrt{13}\right)$

46. $y^2 = 12ax$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দুগামী হলে পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[SB'21]**
(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{2}{3}$
সমাধান: **(a)**; $4 = 36a \Rightarrow a = \frac{1}{9}$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $= |4a| = \left|4 \times \frac{1}{9}\right| = \frac{4}{9}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$16y^2 - 25x^2 = 400$ একটি কনিকের সমীকরণ।

47. কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ কত? **[SB, MB'21]**
(a) $x = \pm\sqrt{41}$ (b) $y = \pm\sqrt{41}$
(c) $x = \pm 3$ (d) $y = \pm 3$
সমাধান: **(b)**; $y = \pm be \Rightarrow y = \pm 5.\frac{\sqrt{41}}{5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{41}$

48. $(x-2)^2 = 16(y+3)$ পরাবৃত্তের- **[SB'21]**
(i) উপকেন্দ্র $(2, 1)$
(ii) নিয়ামকের সমীকরণ, $y - 7 = 0$
(iii) অক্ষরেখার সমীকরণ, $x - 2 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(b)**; $y + 3 = -4 \Rightarrow y + 7 = 0$

49. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু- **[BB'21]**
(a) $(4, 4)$ (b) $(-4, 4)$
(c) $(-4, -4)$ (d) $(4, -4)$
সমাধান: **(b)**; $y^2 - 8y + 16 = 4x + 16$
$\Rightarrow (y-4)^2 = 4(x+4)$

50. $y = 3x + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে c এর মান কত? **[BB, Din.B'21]**
(a) $\pm2\sqrt{7}$ (b) $\pm3\sqrt{26}$ (c) $\pm6\sqrt{6}$ (d) $\pm4\sqrt{3}$
সমাধান: **(d)**; $C = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$
$= \pm\sqrt{5 \times 3^2 + 3} = \pm4\sqrt{3}$

51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের (hyperbola) অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য কত? **[BB'21]**
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8
সমাধান: **(c)**; $2b = 2 \times 3 = 6$

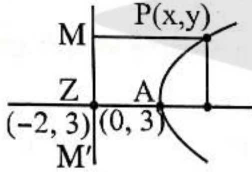
52. $4y^2 - 9x^2 = 36$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু কত? **[BB'21]**
(a) $(\pm3, 0)$ (b) $(0, \pm3)$
(c) $(\pm2, 0)$ (d) $(0, \pm2)$
সমাধান: **(b)**; $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ শীর্ষ $(0, \pm b) \equiv (0, \pm3)$

53. $x^2 + 3y^2 = 3$ কনিকের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? **[BB, Din.B'21]**
(a) $\sqrt{2}x = \pm3$ (b) $2x = \pm3$
(c) $x = \pm\sqrt{2}$ (d) $x = \pm2$
সমাধান: **(a)**; $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$; সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e}$
$= \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$; $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}x = \pm 3$

54. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ– **[JB'21]**
(a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$ (b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 0$
(c) $y = \pm\frac{3}{4}x$ (d) $x = \pm\frac{5}{4}y$
সমাধান: **(c)**; $y = \pm\frac{b}{a}x$

55. $x^2 = 4 - 4y^2$ উপবৃত্তের– [JB'21]
(i) পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(2\cos\theta, \sin\theta)$
(ii) ক্ষুদ্রাক্ষ x-অক্ষ বরাবর
(iii) ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $2\sqrt{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(b)**; $x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, ক্ষুদ্রাক্ষ x অক্ষ বরাবর নয়।
পরামিতিক স্থানাঙ্ক $= a\cos\theta, b\sin\theta = 2\cos\theta, \sin\theta$
ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae = e = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ একক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



56. পরাবৃত্তের দ্বিকাক্ষের সমীকরণ– [JB'21]
(a) $y = 3$ (b) $x + 2 = 0$
(c) $y = -3$ (d) $x - 2 = 0$
সমাধান: **(b)**; অক্ষের সমীকরণ $y = 3$
$\therefore$ দিকাক্ষ $x = a$ যা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী
$\therefore$ দিকাক্ষ $x = -2 \Rightarrow x + 2 = 0$

57. উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ– [JB'21]
(a) $x = 4$ (b) $x = -2$ (c) $x = 8$ (d) $x = 2$
সমাধান: **(d)**; উপকেন্দ্র $\equiv (0 + 2, 3) \equiv (2, 3)$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $x = 2$

58. $x^2 = 2y$ কনিকের জন্য- [CB'21]
(i) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
(ii) অক্ষের সমীকরণ $y = 0$
(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $2y + 1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(d)**; $x^2 = 4.\frac{1}{2}.y$ (i) ফোকাস $\equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$
(ii) অক্ষ, $y = 0$ (iii) নিয়ামক $y = -\frac{1}{2}$

59. $(\pm 3, 0)$ শীর্ষবিন্দুতে এবং $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [CB'21]
(a) $x^2 - 2y^2 = 18$ (b) $2x^2 - y^2 = 18$
(c) $2y^2 - x^2 = 18$ (d) $y^2 - 2x^2 = 18$
সমাধান: **(b)**; option check $(3, 0)$ দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

60. উপকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি? [CB'21]
(a) $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ (b) $(0, 2), (0, -2)$
(c) $(2, 3), (2, -1)$ (d) $(2, -3), (2, 1)$
সমাধান: (উত্তর নেই); $b > a$
$\therefore$ উপকেন্দ্র $(x - 2, y - 1) \equiv \left(0, \pm 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{2}{8}}\right)$
বা, $(x, y) \equiv (2, 1 \pm \sqrt{6})$

61. কেন্দ্রবিহীন কনিক কোনটি? [CB'21; Ctg.B'17]
(a) $x^2 + y^2 = 0$ (b) $x^2 + y = 0$
(c) $x^2 - y^2 = 10$ (d) $x^2 + 2y^2 = 10$
সমাধান: **(b)**; পরাবৃত্তের কেন্দ্র নেই।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ একটি পরাবৃত্ত।

62. পরাবৃত্তটির ফোকাস কোনটি? [Din.B'21]
(a) $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$ (b) $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
(c) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ (d) $(-1, -2)$
সমাধান: **(a)**; $3\{(x + 1)^2 - 1\} = 4y + 5$
$\Rightarrow 3(x + 1)^2 = 4y + 8 \Rightarrow (x + 1)^2 = \frac{4}{3}(y + 2)$
$A(-1, -2), S\left(-1, -2 + \frac{1}{3}\right)$

63. পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখা কোনটি? [Din.B'21]
(a) $3y + 2 = 0$ (b) $3y + 5 = 0$
(c) $3y + 7 = 0$ (d) $3y - 7 = 0$
সমাধান: **(c)**; $y + 2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3y + 7 = 0$

64. $3x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের- [Din.B'21]
(i) উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{2}$ (ii) উপকেন্দ্র $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{\sqrt{3}}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(b)**; $e = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2.\frac{1}{4} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
উপকেন্দ্র $\equiv \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}, 0\right) \equiv \left(\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$
$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ $[a > b]$

65. $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [Din.B'21]
(a) 9 (b) $\frac{4}{9}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{8}{3}$

সমাধান: (b); $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = 2.\frac{1}{9}.2 = \frac{4}{9}$

66. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির পরামিতিক স্থানাঙ্ক- **[MB'21] [Ans: c]**

(a) $(a\sec\theta, b\,\text{cosec}\,\theta)$ (b) $(b\sec\theta, a\,\text{cosec}\,\theta)$
(c) $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ (d) $(a\sin\theta, b\cos\theta)$

67. $(x-3)^2 = -4(y-4)$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ– **[MB'21]**

(a) $y + 3 = 0$ (b) $y - 3 = 0$
(c) $x + 3 = 0$ (d) $x - 3 = 0$

সমাধান: (b); সমীরকণ $y - 4 = -1 \Rightarrow y - 3 = 0$



68. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ কনিকটির উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে বক্ররেখাটির নাম– **[MB'21] [Ans: b]**

(a) উপবৃত্ত (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

69. u ও a ধ্রুবক হলে $v^2 = u^2 + 2as$ এর লেখচিত্র হবে– **[MB'21] [Ans: b]**

(a) সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত
(c) অধিবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

70. $3x^2 + 2y^2 = 12$ কনিকটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ– **[MB'21]**

(a) $2x = \pm\sqrt{3}$ (b) $x = \pm 2\sqrt{3}$
(c) $y = \pm 2\sqrt{3}$ (d) $y = \pm 3\sqrt{2}$

সমাধান: (d); $3x^2 + 2y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$

$\therefore e = \sqrt{1 - \frac{4}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ামক রেখা- $y = \pm\frac{b}{e}$

$= \pm\sqrt{6}.\sqrt{3} = \pm 3\sqrt{2}$

71. $x^2 - 8y^2 = 2$ কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য– **[MB'21]**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (c); $x^2 - 8y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.\frac{1}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$px^2 - 16y^2 = 144$ কনিকটি $(\pm 4, 0)$ বিন্দুগামী।

72. p এর মান– **[MB'21]**

(a) −9 (b) −4 (c) 4 (d) 9

সমাধান: (d); $(\pm 4,0) \Rightarrow 16p - 16 \times 0 = 144$
$\Rightarrow p = 9$

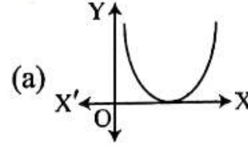
73. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক– **[MB'21; DB, RB'19]**

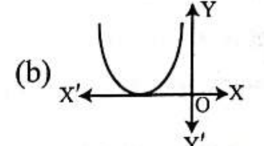
(a) $(0, \pm 4)$ (b) $(\pm 4, 0)$ (c) $(0, \pm 5)$ (d) $(\pm 5, 0)$

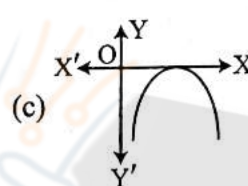
সমাধান: (d); $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; e = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$

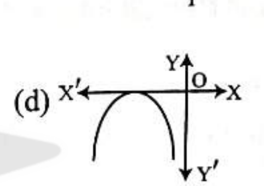
উপকেন্দ্র $\equiv (\pm ae, 0) \equiv \left(\pm 4 \times \frac{5}{4}, 0\right) \equiv (\pm 5, 0)$

74. $y = (x+2)^2$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র কোনটি? **[DB'19] [Ans: b]**

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 4y^2 = 36$ এর-

75. উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? **[DB, Ctg.B'19; All.B'18]**

(a) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

সমাধান: (a); $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 = \sqrt{\frac{4+9}{4}}\ \therefore e = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ বক্ররেখাটি একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

76. পরাবৃত্তটির অক্ষরেখা হলো- **[RB'19] [Ans: b]**

(a) x-অক্ষের সমান্তরাল (b) y-অক্ষের সমান্তরাল
(c) x-অক্ষ (d) y-অক্ষ

77. পরাবৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়- **[RB'19] [Ans: a]**

(a) বাস্তব ও সমান (b) মূলদ ও অসমান
(c) অমূলদ ও অসমান (d) জটিল ও অসমান

78. $y = 4x + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 32x$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে c এর মান কত? **[Ctg.B'19]**

(a) −128 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 128

সমাধান: (c); $\frac{a}{m} = c \Rightarrow \frac{8}{4} = c \therefore c = 2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{225} = 1$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

79. শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক- **[Ctg.B'19]**

(a) $(\pm 16, 0)$ (b) $(\pm 15, 0)$
(c) $(0, \pm 16)$ (d) $(0, \pm 15)$

সমাধান: (a); $(\pm a, 0) = (\pm 16, 0)$

80. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তের- [SB'19]

(i) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm\sqrt{5},0)$

(iii) ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $=4$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $e=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$; উপকেন্দ্র $\equiv(\pm ae,0)$ বা, $(\pm\sqrt{5},0)$; ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2\times2=4$ একক।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2-4y-4x+16=0$ একটি প্যারাবোলার সমীকরণ।

81. অক্ষরেখার সমীকরণ কোনটি? [SB'19]

(a) $x-3=0$ (b) $y-2=0$

(c) $x=0$ (d) $y=0$

সমাধান: (b); $(y-2)^2=4.1.(x-3)$

$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ, $y-2=0$

82. $\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ উপবৃত্তের- [JB'19]

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-2,1)$ (ii) ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 6

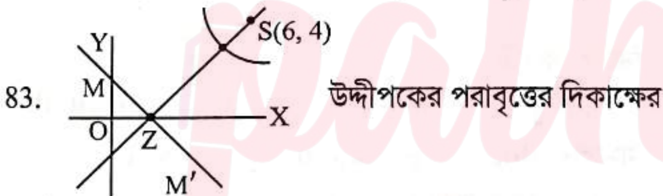
(iii) একটি উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y=2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); কেন্দ্র $(-2,1)$; ক্ষুদ্রাক্ষ $=2\sqrt{3}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $y-1=\frac{1}{2}.2\therefore y=2$

83. 

উদ্দীপকের পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x+y-2=0$ হলে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [JB'19]

(a) (2, 0) (b) (4, 2) (c) (2, 4) (d) (0, 2)

সমাধান: (b); দিকাক্ষের সমীকরণ: $x+y-2=0$

$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ: $x-y=k$; (6,4)

$\Rightarrow x-y=6-4=2\therefore x-y-2=0$

$\therefore$ অক্ষ ও দিকাক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,0)

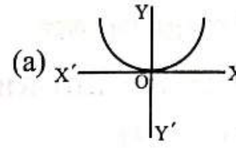
$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $\equiv\left(\frac{6+2}{2},\frac{4+0}{2}\right)=(4,2)$

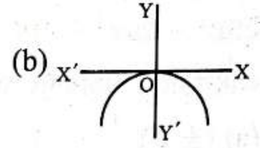
84. $x^2-y^2=2$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি? [CB'19]

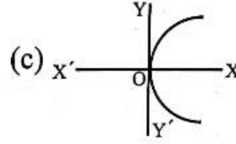
(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) $4\sqrt{2}$

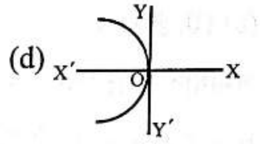
সমাধান: (c); $2ae=2.(\sqrt{2})\sqrt{\frac{2+2}{2}}=4$

85. $x^2=3y$ কনিকের লেখচিত্র কোনটি? [CB'19] [Ans: a]

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

86. $x^2+12x+3y=0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু- [Din.B'19]

(a) $(-6,-12)$ (b) $(6,12)$

(c) $(-6,12)$ (d) $(6,-12)$

সমাধান: (c); $x^2+12x+36=-3y+36$

$\Rightarrow(x+6)^2=-3.(y-12)\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(-6,12)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$7x^2+16y^2=112$ একটি কনিক।

87. $y^2=-2x$ পরাবৃত্তের- [All.B'18]

(i) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $2x=1$

(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 2 একক

(iii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

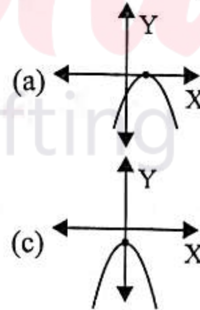
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

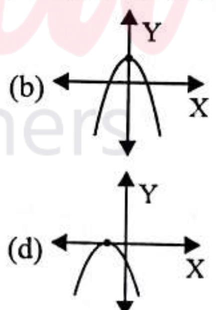
সমাধান: (c); $y^2=4\left(-\frac{1}{2}\right)x\therefore a=\frac{1}{2}$,

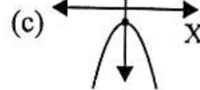
উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x=-\frac{1}{2}\therefore 2x=-1$

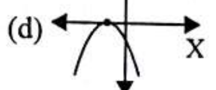
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=2\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

88. $(x-1)^2=-4y$ কনিকটির জন্য কোনটি সত্য? [All.B'18]

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

সমাধান: (a); শীর্ষ (1, 0) বিন্দুতে

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ একটি কনিকের সমীকরণ।

89. কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি? [All.B'18; SB'17]

(a) 9 (b) $3\sqrt{2}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

সমাধান: (d); উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$25x^2 - 16y^2 + 400 =$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

90. অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক কোনটি? **[DB, RB'17]**

(a) $(\pm, 0)$ (b) $(0, \pm 2)$
(c) $(0, \pm 5)$ (d) $(\pm 5, 0)$

সমাধান: (c); $16y^2 - 25x^2 = 400 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

$b = 5$ & $a = 4$; শীর্ষবিন্দু $(0, \pm 5)$

91. $3x^2 + 2y^2 = 6$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাংক কত? **[RB'17]**

(a) $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ (b) $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$
(c) $\left(0, \pm\sqrt{3}\right)$ (d) $(0, \pm 1)$

সমাধান: (d); $3x^2 + 2y^2 = 6 \therefore \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \therefore b = \sqrt{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাংক $= (0, \pm be)$

$= \left(0, \pm\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0, \pm 1)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ একটি কনিকের সমীকরণ।

92. কেন্দ্রবিহীন কনিক কোনটি? **[Ctg.B'17] [Ans: b]**

(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

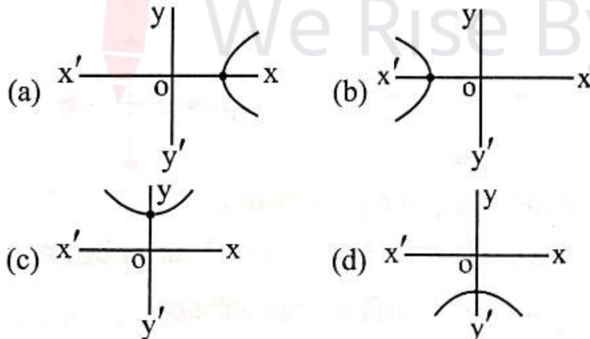
93. $x^2 = -4y$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক- **[Ctg.B'17]**

(a) (0,1) (b) $(0, -1)$
(c) $(1, 0)$ (d) $(-1, 0)$

সমাধান: (b); $x^2 = -4y$ $x^2 = 4ay$ তুলনা করে,

$4a = -4 \therefore a = -1 \therefore \cdots$ স্থানাংক $(0, -1)$

94. $y^2 = -4ax, a > 0$ পরাবৃত্তের লেখ চিত্র কোনটি? **[SB'17]**



সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); x′ —— x, y, O, y′

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 = -y$ একটি কনিক।

95. কনিকটির দিকাক্ষের সমীকরণ কোনটি? **[SB, BB'17]**

(a) $4x - 1 = 0$ (b) $4x + 1 = 0$
(c) $4y - 1 = 0$ (d) $4y + 1 = 0$

সমাধান: (c); $x^2 = -y$, $x^2 = 4\,ay$ সাথে তুলনা করে।

$4a = -1 \therefore a = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ $y - \frac{1}{4} = 0 \therefore 4y - 1 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$9x^2 + 4y^2 = 324$ কনিকের সমীকরণ।

96. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[BB'17]**

(a) $\frac{4}{3}$ (b) 3 (c) 8 (d) 27

সমাধান: (c); $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1 \therefore a = 6$ $b = 9; a < b$

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2\frac{a^2}{b} = 2 \times \frac{36}{9} = 8$

97. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ সমীকরণ $(-5, -4)$ বিন্দুগামী, a^2 এর মান কত? **[BB'17]**

(a) 9 (b) 3 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{9}$

সমাধান: (a); $\frac{25}{a^2} - \frac{16}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{25}{a^2} = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \therefore a^2 = 9$

98. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে– **[JB'17]**

(i) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 একক
(ii) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\pm\sqrt{5}, 0\right)$
(iii) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1 \therefore b^2 = 4, a^2 = 5$

(i) আড়অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 2 \times 2 = 4$
(ii) শীর্ষ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 2)$
(iii) উৎকেন্দ্রিকতা $= \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \frac{3}{2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$5x^2 + 7y^2 = 1$

99. উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য কত? **[JB'17]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (d) $\frac{2}{7}$

সমাধান: (a); $\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2 \times \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

100. $3x^2 = 12 - 4y^2$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? **[CB'17]**

(a) বৃত্তের সমীকরণ (b) উপবৃত্তের সমীকরণ
(c) পরাবৃত্তের সমীকরণ (d) অধিবৃত্তের সমীকরণ

সমাধান: (b); $3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 = 4(1-y)$একটি কনিক।

101. কনিকটির উৎকেন্দ্রিকতা- [CB'17]

(a) 0 (b) $0 < e < 1$

(c) $e = 1$ (d) $e > 1$

সমাধান: **(c)**; $x^2 = -4(y-1)$ পরাবৃত্তের সমীকরণ।

102. কনিকটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক - [CB'17]

(a) $(0,0)$ (b) $(0,-1)$ (c) $(0,1)$ (d) $(0,2)$

সমাধান: **(a)**; $x^2 = 4(1-y) = -4.1.(y-1)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(0,0)$

103. $y^2 - 2(x+3)^2 = 18$ কনিকের নিয়ামকদ্বয়ের দূরত্ব কোনটি? [Din.B'17]

(a) $4\sqrt{3}$ (b) $4\sqrt{2}$ (c) $3\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$

সমাধান: **(a)**; $y^2 - 2(x+3)^2 = 18$; $\frac{y^2}{18} - \frac{(x+3)^2}{9}$

$= 1 \therefore a^2 = 9, b^2 = 18$

$\therefore$ নিয়ামকের দূরত্ব $= \frac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4\sqrt{3}$

104. $3y^2 - 30y + 5x + 55 = 0$ কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি? [Din.B'17]

(a) $\left(-\frac{53}{12}, 5\right)$ (b) $\left(-\frac{43}{12}, 5\right)$

(c) $\left(\frac{43}{12}, 5\right)$ (d) $\left(\frac{53}{12}, 5\right)$

সমাধান: **(c)**; $3y^2 - 30y + 5x + 55 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 10y + \frac{5}{3}x + \frac{55}{3} = 0$

$\Rightarrow y^2 - 2 \times 5 \times y + 25 + \frac{5x}{3} - \frac{20}{3} = 0$

$\Rightarrow (y-5)^2 = \frac{20}{3} - \frac{5x}{3} \Rightarrow (y-5)^2 = -\frac{5}{3}(x-4)$

$\therefore 4a = \frac{5}{3} \therefore a = \frac{5}{12}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $= \left(\frac{-5}{12} + 4, 5\right) \equiv \left(\frac{43}{12}, 5\right)$

105. $\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের– [Din.B'17]

(i) শীর্ষের একটি স্থানাংক (3,1)

(ii) ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 6

(iii) একটি উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y + 2 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(c)**; (i) শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3,1)$

(ii) ক্ষুদ্রাক্ষ $= 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y + 1 = \pm\frac{2.1}{2}$

$\Rightarrow y + 1 = \pm 1 \therefore y + 2 = 0$ অথবা $y = 0$

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

চিত্রে, B বিন্দুটি একটি কনিকের উপর অবস্থিত।

C B
নির্দিষ্ট সরলরেখা
A (স্থির বিন্দু)

01. AB > BC হলে-

(i) কনিকটি একটি উপবৃত্ত (ii) কনিকটি একটি অধিবৃত্ত

(iii) কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 2AB

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, iii (d) ii, iii

সমাধান: **(b)**; $e = \frac{AB}{BC} = \frac{SP}{PM} > 1 \therefore$ কনিকটি একটি অধিবৃত্ত।

02. $y = -(x+2)^2 + 3$ কনিকের শীর্ষ কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

(a) প্রথম (b) দ্বিতীয় (c) তৃতীয় (d) চতুর্থ

সমাধান: **(b)**; $(y-3) = -(x+2)^2$

কনিকটির শীর্ষ $(-2,3)$; দ্বিতীয় চতুর্ভাগে শীর্ষ অবস্থিত।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

চিত্রের পরাবৃত্তটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x + 1 = 0$

Y
X' X
(−3,0)
Y'

03. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র কোনটি?

(a) $(-2,0)$ (b) $(-4,0)$ (c) $(-5,0)$ (d) $(-7,0)$

সমাধান: **(c)**; নিয়ামকরেখা, $x + 1 = 0$

x=−1 Y
B(−1, 0)
X' S(−5,0) 2 2 o X
A(−3, 0)
Y'

04. পরাবৃত্তটির সমীকরণ কোনটি?
(a) $y = -8(x-3)$ (b) $y^2 = -8(x+3)$
(c) $y^2 = -4(x+3)$ (d) $y^2 = 4(x+3)$
সমাধান: **(b)**; $|a| = 2$ শীর্ষ $(-3, 0)$ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-0)^2 = -8(x+3) \therefore y^2 = -8(x+3)$

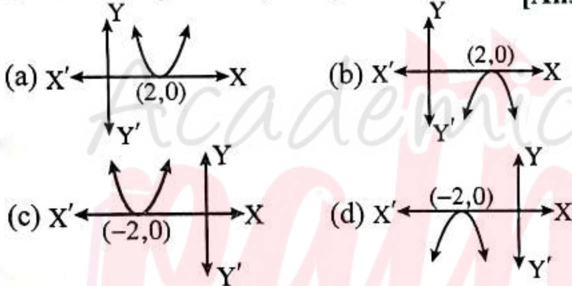
05. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 8 হলে-
(i) বিন্দুটির ভুজ 4 (ii) বিন্দুটির কোটি ± 8
(iii) পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4, 0)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(d)**; $y^2 = 16x; a = 4 \quad a + x = 8$
$\therefore x = 4 \quad y^2 = 64 \quad \therefore y = \pm 8 \quad S(4, 0)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
কোনো পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = a(y-a)$.

06. পরাবৃত্তটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $y = 0$ (b) $y = 2a$ (c) $y = \frac{5}{4}a$ (d) $y = \frac{3}{4}a$
সমাধান: **(d)**; নিয়ামকরেখা, $y - a + \frac{a}{4} = 0 \therefore y = \frac{3}{4}a$

07. $a = -4$ হলে, পরাবৃত্তটির ফোকাস কত?
(a) $(0, -5)$ (b) $(0, 3)$ (c) $(-1, 4)$ (d) $(1, 4)$
সমাধান: **(a)**; উপকেন্দ্র $s(0, y); y - a = \frac{a}{4}$
$\Rightarrow y = \frac{5a}{4}$; $a = -4$ হলে, $y = -5$; $s(0, -5)$

08. নিচের কোনটি $y = -4(x+2)^2$ এর লেখচিত্র? **[Ans: d]**



09. $y^2 = x$ কনিকের-
(i) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ (ii) উৎকেন্দ্রিকতা $= 1$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(d)**; $|4a| = 1 \therefore |a| = \frac{1}{4}; s \equiv \left(\frac{1}{4}, 0\right)$

10. $4y = x - 24$ রেখাটি $y^2 = -ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$ (c) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (d) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
সমাধান: **(a)**; $4y = x - 24$
$\Rightarrow y = \frac{x}{4} - 6 \ldots\ldots\ldots (i)$; $y^2 = ax$
(i) নং রেখাটি পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, $a = m \cdot c$
$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \times (-6) = -\frac{3}{2}$ পরাবৃত্তের সমীকরণ,
$y^2 = \frac{3}{2}x$; $|4a| = \frac{3}{2} \therefore |a| = \frac{3}{8}; s\left(\frac{3}{8}, 0\right)$

11. $y^2 = -8x$ ও $x^2 = 16y$ পরাবৃত্ত দুইটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) 0 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 6
সমাধান: **(c)**; $y^2 = -8x; s(-2, 0)$ এবং
$x^2 = 16y; s'(0, 4); \therefore ss' = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ একক

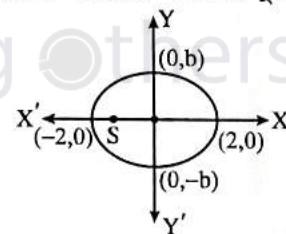
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

12. অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(\pm 3, 0)$ (b) $(0, \pm 3)$
(c) $(\pm 2, 0)$ (d) $(0, \pm 2)$
সমাধান: **(b)**; $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$
$\Rightarrow 4y^2 - 9x^2 = 36 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$; $a = 2, b = 3$
$\therefore$ শীর্ষ বিন্দু $(0, \pm b) = (0, \pm 3)$

13. অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?
(a) $\frac{9}{2}$ (b) 9 (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$
সমাধান: **(c)**; উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2\frac{b^2}{a}$
$= 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ একক

14. $x^2 - 2x + 3y^2 - 8 = 0$ কনিকটির উৎকেন্দ্রিকতা e হলে-
(i) $e > 1$ (ii) ইহা একটি আবদ্ধক্ষেত্র
(iii) ইহা কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 0)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(c)**; $x^2 - 2x + 3y^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ যা উপবৃত্ত।
$e < 1$; কেন্দ্র $(1, 0)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b < 2$ এবং এর একটি উপকেন্দ্র S.

15. b এর মান কত?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(a)**; $a = 2$; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{b^2}{2^2}$
$\Rightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2} \therefore b^2 = 2 \therefore b = \sqrt{2}$

16. S হতে উপবৃত্তটির উপরস্থ সবচেয়ে বেশি দূরে অবস্থিত বিন্দুর দূরত্ব কত?
(a) $2-\sqrt{2}$ (b) $2+\sqrt{2}$
(c) $2+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $2-\frac{1}{\sqrt{2}}$
সমাধান: (b); $A(2,0)$; $SA = \text{max distance}$
$= (2+\sqrt{2})$ unit

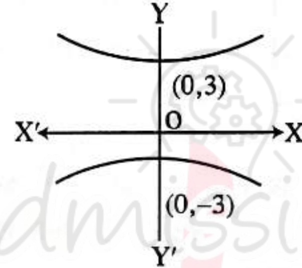
17. $25x^2+by^2=400$ উপবৃত্তের $(0,-5)$ বিন্দুতে পরামিতিক স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(5\cos\theta, 4\sin\theta), \theta = 90°$
(b) $(5\cos\theta, 4\sin\theta), \theta = 270°$
(c) $(4\cos\theta, 5\sin\theta), \theta = 90°$
(d) $(4\cos\theta, 5\sin\theta), \theta = 270°$
সমাধান: (d); $25x^2+by^2=400$; $(0,-5)$
$\Rightarrow 0+b\times 25 = 400 \therefore b = 16$; $25x^2+16y^2$
$=400 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; $x = a\cos\theta = 4\cos\theta$
$Y = b\sin\theta = 5\sin\theta$; $\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{5}{0}\right) = \pi+\frac{\pi}{2}$
$=\frac{3\pi}{2} = 270°$; $(4\cos\theta, 5\sin\theta), \theta = 270°$

18. $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের–
(i) ক্ষুদ্রাক্ষ x-অক্ষ বরাবর
(ii) নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{8}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) iii (d) ii, iii
সমাধান: (c); $4x^2+9y^2=36 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
$e=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3} \therefore a > b$ ক্ষুদ্রাক্ষ Y- অক্ষ বরাবর।
নিয়ামকরেখা, $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$ উপকেন্দ্রিক লম্ব
দৈর্ঘ্য $= 2\frac{b^2}{a} = 2\times\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

19. $2x+3y-15=0$ সরলরেখা $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে b এর মান কত?
(a) $-\sqrt{21}$ (b) $\sqrt{21}$ (c) 21 (d) $\sqrt{69}$
সমাধান: (b); $2x+3y-15=0$
$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x+5$ ……… (i); $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$
(i) নং রেখা উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c^2 = a^2.m^2+b^2$
$=5^2 = 9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+b^2 \therefore b = \sqrt{21}$

20. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–
(i) $y^2 = -2x$ কণিকে 2
(ii) $x^2+2y^2=1$ কনিকের 1
(iii) $x^2-y^2=1$ কনিকের 2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (i)$|4a| = 2$ (ii)$2\frac{b^2}{a} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1} = 1$
(iii) $\frac{2b^2}{a} = 2\times\frac{1}{1} = 2$

21. $25y^2-9x^2=225$ অধিবৃত্তটি ছেদ করে–
(i) x-অক্ষকে $(5,0)$ বিন্দুতে
(ii) y-অক্ষকে $(0,3)$ বিন্দুতে
(iii) y-অক্ষকে $(0,-3)$ বিন্দুতে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $25y^2-9x^2=225$; y অক্ষকে ছেদ করলে, $x=0$, $y^2=9 \therefore y = \pm 3$



22. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের পাদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক কত?
(a) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ (b) $\left(0,\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
(c) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$ (d) $\left(0,\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
সমাধান: (c); $x^2-\frac{y^2}{4}=1$; $e=\sqrt{1+\frac{4}{1}}=\sqrt{5}$
$\frac{a}{e}=\frac{1}{\sqrt{5}}$; নিয়ামকরেখা, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\therefore$ নিয়ামকের পাদবিন্দু $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$

23. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ কোনটি?
(a) $4y=\pm 3x$ (b) $3y=\pm 4x$
(c) $16y=\pm 9x$ (d) $9y=\pm 16x$
সমাধান: (a); $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$
অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=0$
$\Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}x \therefore 4y=\pm 3x$

24. $x = 2\tan\theta, y = 4\sec\theta$ দ্বারা সূচিত অধিবৃত্তের সমীকরণ কোনটি?
(a) $y^2 - 4x^2 = 16$ (b) $4x^2 - y^2 = 16$
(c) $y^2 - 2x^2 = 4$ (d) $2x^2 - y^2 = 4$
সমাধান: **(a)**; $\sec^2\theta - \tan^2\theta \Rightarrow \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$
$\therefore y^2 - 4x^2 = 16$

25. $11x^2 + 14y^2 - 4xy - 48x - 24y + 66 = 0$ সমীকরণটি কোনটি নির্দেশ করে?
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: **(c)**; $a = 11, b = 14, h = -2, g = -24$
$f = -12, c = 66$
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -2 & -24 \\ -2 & 14 & -12 \\ -24 & -12 & 66 \end{vmatrix} = -900 \neq 0$$
$ab - h^2 = (11 \times 4) - 4 = 150 > 0$; যা উপবৃত্তের সমীকরণ।

26. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের কোনো বিন্দু থেকে তার উপকেন্দ্রের দূরত্ব 6 হলে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(2, \pm 4\sqrt{2})$ (b) $(2, 4\sqrt{2})$
(c) $(2, -4\sqrt{2})$ (d) $(4\sqrt{2}, \pm 2)$
সমাধান: **(a)**; $a = 4; a + x = 6 \therefore x = 2$
$y^2 = 16x$; $x = 2$ হলে, $y^2 = 32 \therefore y = \pm 4\sqrt{2}$

27. এরূপ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার শীর্ষ $(4, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 যার অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল-
(a) $y^2 - 4x + 6y + 25 = 0$
(b) $x^2 + 4y - 8x + 4 = 0$
(c) $y^2 - 16x + 6y + 73 = 0$
(d) কোনোটিই নয়
সমাধান: **(a)**; $|4a| = 4$ $(y + 3)^2 = 4 \cdot (x - 4)$
$\Rightarrow y^2 + 6y + 9 = 4x - 16$
$\therefore y^2 - 4x + 6y + 25 = 0$

(4, −3)

28. Y, F(4,5), V(4,3), X', X, Y'
চিত্রের প্যারাবোলাটির নিয়ামকরেখার সমীকরণ?
(a) $y = 1$ (b) $y = 3$ (c) $x = 4$ (d) $y = 0$

সমাধান: **(a)**; Y, (4,5), 2, V(4,3), y=1, X', O, X, Y'

29. $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ উভয় পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে এরূপ সরলরেখা–
(a) $y + x + 1 = 0$ (b) $y - x + 1 = 0$
(c) $y - x - 1 = 0$ (d) $y + x - 1 = 0$
সমাধান: **(a)**; $y = mx + c$ যদি $y^2 = 4x$ কে স্পর্শ করলে, $1 = mc$ ……… (i)
$y = mx + c$ যদি $x^2 = 4y$ কে স্পর্শ করলে,
$c = -m^2$ ……… (ii), (i) ও (ii) থেকে $m = -1, c = -1$
$\therefore$ সাধারণ স্পর্শক $y + x + 1 = 0$

30. কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এর বৃহদাক্ষের অর্ধেক। এর উৎকেন্দ্রিকতা নিচের কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 2 (d) $\sqrt{2}$
সমাধান: **(b)**; $\frac{2b^2}{a} = a \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$
$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

31. কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক হলে এর উৎকেন্দ্রিকতা নিচের কোনটি?
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
সমাধান: **(b)**; $\frac{2b^2}{a} = b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$
$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

32. কোনো উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান হলে তার উৎকেন্দ্রিকতা হবে-
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(a)**; $ae = b \Rightarrow e = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$
$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$; $e = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

33. $7x^2 + 8y^2 = 56$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক-
(a) $\sqrt{7}\pi$ (b) $\sqrt{8}\pi$ (c) 56π (d) $\sqrt{56}\pi$
সমাধান: **(d)**; $7x^2 + 8y^2 = 56$; $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{8}$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi ab = \pi\sqrt{56}$

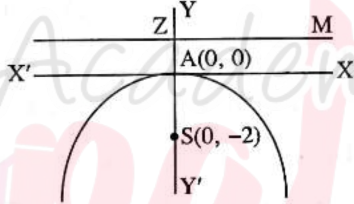
এস ইউ আহাম্মদ স্যার

34. যদি $y = 2x + 2$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলাকে স্পর্শ করে, তবে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–
(a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 20
সমাধান: **(b)**; $y = 2x + 2 \ldots\ldots\ldots (i)$ $y^2 = 4ax$
(i) নং রেখাটি পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে,
$a = mc = 2 \times 2 = 4$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = 16$

35. যে উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(1, -1)$, নিয়ামকরেখা $x - y + 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 2 (b) 4 (c) $6\sqrt{2}$ (d) 8
সমাধান: **(b)**; $\frac{a}{e} - ae = SM; e = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{|2+2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2a - a = 4 \therefore a = 4$
$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \therefore b^2 = 8$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times8}{3} = 4$ একক।

36. $y^2 = 4x + 8y$ প্যারাবোলাটির শীর্ষবিন্দু–
(a) (1, 2) (b) (4, −4) (c) (2, 4) (d) (−4, 4)
সমাধান: **(d)**; $y^2 = 4x + 8y \Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 4x + 16 \Rightarrow (y-4)^2 = 4(x+4)$ শীর্ষবিন্দু $(-4, 4)$

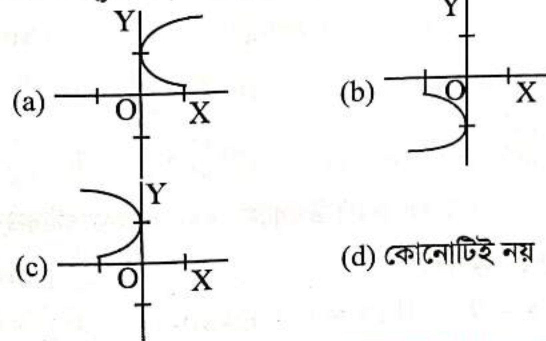
37. পাশের চিত্রে প্যারাবোলাটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–



(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) কোনোটিই নয়
সমাধান: **(c)**; $|a| = 2$; $\therefore |4a| = 8$ একক

38. $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0$ হাইপারবোলার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য-
(a) $\frac{14}{3}$ (b) $\frac{12}{7}$ (c) $\frac{9}{7}$ (d) $\frac{16}{7}$
সমাধান: **(a)**; $9x^2 - 7y^2 + 63 = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2\times7}{3} = \frac{14}{3}$ একক

39. $x = -(y-1)^2$ এর লেখ কোনটি? **[Ans: c]**



40. $y = 2x + b$ রেখাটি $y^2 = 16x$ প্যারাবোলার স্পর্শক হলে b এর মান–
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
সমাধান: **(b)**; $y = 2x + b$ রেখাটি $y^2 = 16x$ কে স্পর্শ করলে, $4 = 2 \times b \therefore b = 2$

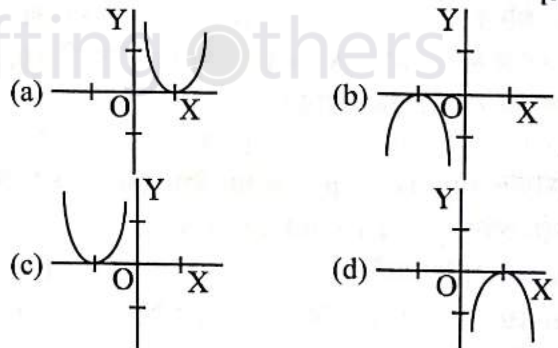
41. $y^2 = 4x$ প্যারাবোলার উপর P বিন্দুর কোটি 6 এবং ফোকাস S হলে SP = কত?
(a) 9.5 (b) 10 (c) 10.5 (d) 12
সমাধান: **(b)**; $y^2 = 4x; y = 6$ হলে, $x = \frac{6^2}{4} = 9$
$a = 1$; $SP = a + x = 1 + 9 = 10$

42. $x^2 + 3y^2 = 4$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(a)**; $x^2 + 3y^2 = 4$ $a^2 = 4, b^2 = \frac{4}{3}$
$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

43. $x = 3\tan\theta, y = 2\sec\theta$, হাইপারবোলা কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি?
(a) $4x^2 - y^2 + 36 = 0$ (b) $x^2 - y^2 + 4 = 0$
(c) $x^2 - y^2 = 1$ (d) $9y^2 - 4x^2 = 36$
সমাধান: **(d)**; $x = 3\tan\theta, y = 2\cos\theta$
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

44. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ হাইপারবোলার পরামিতিক সমীকরণ কোনটি? **[Ans: a]**
(a) $x = a\tan\theta,\ y = b\sec\theta$
(b) $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
(c) $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$
(d) কোনোটিই নয়

45. নিচের কোনটি $y = -(x-1)^2$ এর লেখচিত্র কোনটি? **[Ans: d]**



46. $y = mx - 1$ রেখাটি $y = x^2 + 3$ প্যারাবোলার স্পর্শক হবে যদি m এর মান হয়–
(a) ±1 (b) $\pm2\sqrt{2}$ (c) ±3 (d) ±4
সমাধান: **(d)**; $y = mx - 1$ রেখা $y = x^2 + 3$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $x^2 - mx + 4 = 0$
$D = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \therefore m = \pm4$

47. $y^2 = 9x$ প্যারাবোলার $(4, 6)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ-
(a) $3x - 4y + 12 = 0$
(b) $4x - 3y - 12 = 0$
(c) $7x + 3y - 5 = 0$
(d) $7x + 3y - 6 = 0$
সমাধান: **(a)**; $y^2 = 9x$ প্যারাবেলার $(4,6)$ বিন্দুতে স্পর্শক, $T = 0 \Rightarrow 6y - \frac{9}{2}(x+4) = 0$
$\Rightarrow 4y - 3x - 12 = 0 \therefore 3x - 4y + 12 = 0$

48. $5y = x + 50$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ প্যারাবোলার স্পর্শক হলে, তার ফোকাসের স্থানাঙ্ক–
(a) $(-2,0)$ (b) $(2,0)$ (c) $(-4,0)$ (d) $(4,0)$
সমাধান: **(b)**; $y = \frac{x}{5} + 10$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে, $a = \frac{10}{5} = 2$; $S(2,0)$

49. $y = x - x^2$ পরাবৃত্তের $x + y = k$ রেখাটি স্পর্শক হবে যদি-
(a) $k = 0$ (b) $k = -1$
(c) $k = 1$ (d) কোনোটিই নয়
সমাধান: **(c)**; $y = x - x^2$ পরাবৃত্তের $x + y = k$ রেখাটি স্পর্শক হলে, $x - x^2 = k - x$
$\Rightarrow x^2 - 2x + k = 0$ $D = 0$; $4 - 4k = 0 \therefore k = 1$

50. $y^2 = 4x + 4y - 8$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) কোনোটিই নয়
সমাধান: **(a)**; $y^2 = 4x + 4y - 8 \Rightarrow (y-2)^2 = 4(x-1) \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4$

51. $(3,4)$ উপকেন্দ্র এবং $(0, 0)$ শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–
(a) 12 (b) 16 (c) 20 (d) 25
সমাধান: **(c)**; $|4a| = 4\,SV \Rightarrow 4\sqrt{3^2 + 4^2} = 20$ একক

52. $x^2 - y^2 = 0$ এর জ্যামিতিক রূপ কি? **[Ans: d]**
(a) পরাবৃত্ত (b) উপবৃত্ত
(c) অধিবৃত্ত (d) জোড়া সরলেরেখা

53. p এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে?
(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 5
সমাধান: **(d)**; $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে গেলে, $p \times 16 = 80 \therefore p = 5$

54. $xy = 2$ সমীকরণটি হবে- **[Ans: d]**
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

55. কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধবর্তী দূরত্বের সমান হলে তার উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(a)**; $b = ae \Rightarrow e = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$
$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

56. কোন উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 একক এবং তার উৎকেন্দ্রিকত $\frac{3}{5}$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 12.5 (b) 15.3 (c) 19.2 (d) 18
সমাধান: **(c)**; $\frac{a}{e} - ae = 16 \Rightarrow a\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right) = 16$
$\Rightarrow a\frac{16}{15} = 16 \therefore a = 15; e = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$
$\Rightarrow b = \frac{4}{5} \times 15 = 12 \therefore b = 12$
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 144}{15} = 19.2$ একক

57. $y^2 - x^2 = 4$ হাইপারবোলার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক-
(a) $(0, \pm 1)$ (b) $(0, \pm 2)$
(c) $(\pm 2, 0)$ (d) $(\pm 1, 0)$
সমাধান: **(b)**; $y^2 - x^2 = 4$; $b = 2$
শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (0, \pm 2)$

58. $x^2 - y^2 = 18$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) 6 (b) $6\sqrt{2}$ (c) 12 (d) $12\sqrt{2}$
সমাধান: **(c)**; $x^2 - y^2 = 18$; $e = \sqrt{2}$ [$\because b = 1$]
$a = \sqrt{18}$ $SS' = 2ae = 2 \times 6 = 12$

59. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ সমীকরণটি কি নির্দেশ করে?
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: **(d)**; $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$
$\Rightarrow 9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$; যা অধিবৃত্তের সমীরকণ

অসীম কুমার সাহা স্যার

60. পরাবৃত্ত ও এর অক্ষরেখার ছেদবিন্দুকে কী বলা হয়? **[Ans: b]**
(a) পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (b) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু
(c) পরাবৃত্তের কেন্দ্র (d) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু

61. কোনো কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $0 < e < 1$ হলে ঐ কনিকের আদর্শ সমীকরণ কোনটি? **[Ans: d]**
(a) $y^2 = 4ax$ (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(c) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

62. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b)$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ নিচের কোনটি? **[Ans: b]**
(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = a$ (d) $y = a$

63. $y^2 = -4ax(a > 0)$ পরাবৃত্তের- **[Ans: b]**
(i) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$
(ii) অক্ষরেখা হলো y-অক্ষ
(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $x - a = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

64. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তটি $y = mx + c$ রেখাকে স্পর্শ করলে- **[Ans: b]**
(i) $c = \frac{a}{m}$
(ii) পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সমীকরণদ্বয় উভয়েই মূল বিন্দুগামী
(iii) স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

65. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[Ans: c]**
(a) $(-4, -2)$ (b) $(-2, -4)$
(c) $(4, 2)$ (d) $(2, 4)$

66. অক্ষরেখার সমীকরণ কোনটি? **[Ans: b]**
(a) $x - 3 = 0$ (b) $y - 2 = 0$
(c) $x = 0$ (d) $y = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + py^2 = 1$ উপবৃত্তটি $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$ বিন্দুগামী।

67. উপবৃত্তটির সমীকরণ নিচের কোনটি সঠিক?
(a) $4x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2 + 4y^2 = 1$
(c) $2x^2 + y^2 = 1$ (d) $x^2 + 2y = 1$
সমাধান: **(b)**; $x^2 + py^2 = 1$ উপবৃত্ত $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$
বিন্দুগামী হলে, $P \cdot \frac{1}{4} = 1 \therefore P = 4$; $x^2 + 4y^2 = 1$

68. উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
সমাধান: **(b)**; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

69. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $\left(\frac{2}{m^2}, \frac{4}{m}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{m^2}, \frac{21}{m}\right)$
(c) $\left(\frac{2}{m}, \frac{4}{m^2}\right)$ (d) $\left(\frac{4}{m}, \frac{2}{m^2}\right)$
সমাধান: **(a)**; স্পর্শ বিন্দু $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right) = \left(\frac{2}{m^2}, \frac{4}{m}\right)$

70. একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(-1, 1)$ এবং দিকাক্ষ $x - 2y + 6 = 0$ হলে, তার অক্ষরেখার সমীকরণ কত?
(a) $x - 2y + 1 = 0$ (b) $2x + y + 1 = 0$
(c) $2x - y + 1 = 0$ (d) $x + 2y - 1 = 0$
সমাধান: **(b)**; অক্ষরেখা, $2x + y = -2 + 1$
$\therefore 2x + y + 1 = 0$

71. অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4}{\cos\theta}, \frac{6}{\cot\theta}\right)$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ কোনটি হবে?
(a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
(c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5} = 1$ (d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$
সমাধান: **(a)**; $x = 4\sec\theta; y = 6\tan\theta$
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

72. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{p} = 1$ বক্ররেখাটি-
(i) (0, 1) বিন্দুগামী হলে $p = 1$
(ii) একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করবে যখন $p > 0$ হবে
(iii) একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করবে যখন $p < 0$ হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(d)**; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{P} = 1$ (i)(0, 1)
$\Rightarrow 0 + \frac{1}{p} = 1 \therefore P = 1$

73. $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের-
(i) উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{194}}{13}$ একক
(ii) ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য 10 একক
(iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 24 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(a)**; (i) $e = \sqrt{1 + \frac{25}{169}} = \frac{\sqrt{194}}{13}$ (ii) $2b = 10$
একক (iii) $2ae = 2 \times 13 \times \frac{\sqrt{194}}{13} = 2\sqrt{194}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

74. উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দুগামী হলে a এর মান কত
(a) $a = 100$ (b) $a = 10$ (c) $a = 3$ (d) $a = 9$
সমাধান: **(b)**; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ (6, 4) $\Rightarrow \frac{6^2}{a^2} + \frac{4^2}{25} = 1$
$\Rightarrow \frac{36}{a^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow a^2 = 100 \therefore a = 10$

75. $3y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হলো-
(a) $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$ (b) $\left(\frac{7}{12}, 0\right)$ (c) $\left(\frac{7}{12}, 1\right)$ (d) $\left(-\frac{5}{12}, 0\right)$
সমাধান: **(a)**; $y^2 = \frac{5}{3}x$ $S\left(\frac{5}{12}, 0\right)$

76. একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(0, 2)$ অক্ষ রেখা y- অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ কোনটি?

(a) $4x^2 = 3(y-2)$ (b) $3x^2 = 12(y-2)$
(c) $3x^2 = 4(y-2)$ (d) $4x^2 = 3(y-2)$

সমাধান: **(c)**; পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-\alpha)^2 = 4a \cdot (y-\beta) \Rightarrow x^2 = 4a(y-2)$ $(2,5)$ হলে, $2^2 = 4a \cdot (5-2) \therefore a = \frac{1}{3}$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 = \frac{4}{3}(y-2)$

77. কোন উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 একক এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ হলে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

(a) 12.5 (b) 15.3 (c) 19.2 (d) 18

সমাধান: **(c)**; $\frac{a}{e} - ae = 16 \Rightarrow a \cdot \frac{5}{3} - a \cdot \frac{3}{5} = 16$
$\therefore a = 15$ । এখন $e = \frac{3}{5}$ হলে, $b = a\sqrt{1-e^2}$
$= 15 \times \frac{4}{5} = 12$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times144}{15} = 19.2$ একক

78. $y = 2x + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে c এর মান কত?

(a) 7 (b) 19 (c) 25 (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: **(d)**; $y = 2x + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে, $c^2 = 4 \times 2^2 + 3 = 19 \quad \therefore c = \sqrt{19}$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

79. $y^2 = 4x$ প্যারাবোলার উপর একটি বিন্দুর কোটি 12 হলে ভুজ কত?

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 36

সমাধান: **(d)**; $y^2 = 4x$; এখন $y = 12$ হলে, $x = \frac{12^2}{4} = 36$

80. একটি প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু $(2, 3)$ এবং উপকেন্দ্র $(2, 4)$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

(a) 4 (b) 8 (c) 10 (d) 12

সমাধান: **(a)**; $a = VS = \sqrt{(2-2)^2 + (4-3)^2} = 1$ একক; $|4a| = 4 \cdot 1 = 4$

81. $y^2 = 8x$ প্যারাবোলার **[Ans: a]**

(i) শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$
(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 8$
(iii) দিকাক্ষের সমীকরণ $x = 4$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ বক্ররেখাটির একটি প্যারাবোলার সমীকরণ।

82. প্যারাবোলাটির অক্ষরেখা হলো- **[Ans: b]**

(a) x - অক্ষের সমান্তরাল (b) y – অক্ষের সমান্তরাল
(c) x - অক্ষ (d) y – অক্ষ

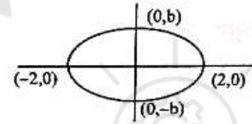
83. প্যারাবোলাটি x – অক্ষকে স্পর্শ করলে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়- **[Ans: a]**

(a) বাস্তব ও সমান (b) মূলদ ও অসমান
(c) অমূলদ ও অসমান (d) জটিল ও অসমান

84. $9x^2 + 16y^2 = 144$, সমীকরণটি নিচের কোনটি নির্দেশ করে? **[Ans: c]**

(a) বৃত্ত (b) হাইপারবোলা
(c) উপবৃত্ত (d) প্যারাবোলা

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}, b < 2$

85. b এর মান কত? **[Ans: a]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

86. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (b) $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(c) $(\pm\sqrt{2}, 0)$ (d) $(0, \pm\sqrt{2})$

87. $x = a\cos\theta + b\sin\theta, \ y = a\sin\theta - b\cos\theta$ কোন কনিকের সমীকরণ?

(a) ellipse (b) parabola (c) circle (d) hyperbola

সমাধান: **(c)**; $x = a\cos\theta + b\sin\theta$ ……… (i)
$y = a\sin\theta - b\cos\theta$ ……… (ii)
$(i)^2 + (ii)^2$ করে, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; যা বৃত্তের সমীকরণ।

88. $y = \sqrt{2x-1}$ বক্ররেখাটির জ্যামিতিক পরিচয়- **[Ans: b]**

(a) হাইপারবোলা (b) প্যারাবোলা
(c) উপবৃত্ত (d) সরলরেখা

89. $y^2 = 4x + 8y$ প্যারাবোলাটির শীর্ষবিন্দু স্থানাঙ্ক কত?

(a) $(4, 4)$ (b) $(-4, -4)$ (c) $(4, -4)$ (d) $(-4, 4)$

সমাধান: **(d)**; $y^2 = 4x + 8y \Rightarrow (y-4)^2 = 4(x+4)$

90. (i) m এর সকল মানের জন্য যে সরলরেখা $y^2 = 4ax$ কে স্পর্শ করে?

(a) $y = mx - \frac{a}{m}$ (b) $y = mx + \frac{a}{m}$
(c) $y = mx + am$ (d) $y = mx - am$

(ii) $y = kx$ সরলরেখাটি $y = x^2 + 4$ বক্ররেখার স্পর্শক হলে k এর একটি মান-

(a) 1 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 3 (d) 4

সমাধান: **(b)**; $y = kx$ সরলরেখাটি $y = x^2 + 4$ বক্ররেখাটিকে স্পর্শ করলে, $kx = x^2 + 4$

$\Rightarrow x^2 - kx + 4 = 0$

$D = 0 \Rightarrow k^2 - 16 = 0 \therefore k = \pm 4$

91. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 8x$ প্যারাবোলাকে স্পর্শ করলে, স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

(a) $\left(\frac{2}{m^2}, \frac{4}{m}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{m^2}, \frac{21}{m}\right)$ (c) $\left(\frac{2}{m}, \frac{4}{m^2}\right)$ (d) $\left(\frac{4}{m}, \frac{2}{m^2}\right)$

সমাধান: **(a)**; $y^2 = 8x; a = 2$ স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{+2}{m^2}, \frac{4}{m}\right)$

92. $3y + 7 = 0$ সরলরেখাটি $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ কনিকের কীসের সমীকরণ নির্দেশ করে?

(a) উপকেন্দ্রিক লম্বের (b) স্পর্শকের
(c) অভিলম্বের (d) নিয়ামকের

সমাধান: **(d)**; $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 = 4y + 8 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{4}{3}(y+2)$

$a = \frac{1}{3}; y + 2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y + \frac{7}{3} = 0$ যা নিয়ামকরেখা।

93. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: b]**

(a) πa^2 (b) πab (c) $\frac{\pi}{4}ab$ (d) ab

94. একটি উপবৃত্তের স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত উপবৃত্তটি $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ রেখাকে y অক্ষের উপরে ছেদ করে। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি?

(a) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ (c) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

সমাধান: **(b)**; $b = 6, a = 5$ হলে, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

◆ MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $\frac{2a^2}{b}$ (b) $\frac{2b^2}{a^2}$ (c) $\frac{2b^2}{a}$ (d) $\frac{2a^2}{b^2}$

02. কনিক বিভিন্ন প্রকার হতে পারে যেমন–

(i) উপবৃত্ত (ii) অধিবৃত্ত (iii) যুগল সরলরেখা

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(d)**; যুগল সরল রেখাও কনিক হতে পারে।

যেমন: $x^2 = y^2$ একটি hyperbola

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + 3y^2 = 4$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

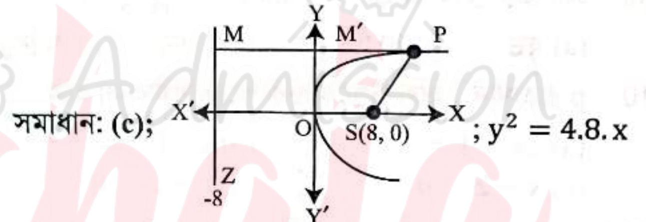
03. উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ কোনটি? **[Ans: a]**

(a) $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (b) $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(c) $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (d) $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

04. $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 12 ঐ বিন্দুর ভুজ কত?

(a) –4 (b) –8 (c) 4 (d) 8

সমাধান: **(c)**;



; $y^2 = 4.8.x$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = -8$; পরাবৃত্তে, $SP = PM$

$SP = 12 = PM = PM' + MM' = x + 8 \Rightarrow x = 4$

$\therefore$ ভুজ = 4

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$5x^2 + 4y^2 = 20$

05. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ অধিবৃত্ত— **[Ans: b]**

(i) আড় অক্ষ x অক্ষ, অনুবন্ধী অক্ষ y অক্ষ

(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 9 (iii) শীর্ষ $(\pm 3, 0)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

06. $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ —

(i) অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(0, \pm\sqrt{2})$

(ii) উপকেন্দ্র $(0, \pm\sqrt{3})$

(iii) দিকাক্ষদ্বয়ের সমীকরণ $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$; $e = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; শীর্ষ $\equiv (0, -\sqrt{2})$ ও $(0, \sqrt{2})$

07. $x^2 - y^2 = 2$ অধিবৃত্তের— **[Ans: c]**
(i) শীর্ষবিন্দু $(0, \pm\sqrt{2})$ (ii) উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$
(iii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $2\sqrt{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $(x-4)^2 = -4(y-5)$ পরাবৃত্তের সমীকরণ-
(i) এর শীর্ষ বিন্দু (4,5)
(ii) অক্ষের সমীকরণ $x - 4 = 0$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y - 4 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)^2$;
(i) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β)
(ii) অক্ষরেখার সমীকরণ $x = 0$ বা, $x - \alpha = 0$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $Y = -1$
বা, $y - \beta + 1 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x = pt^2$ ও $y = 2pt$ পরামিতিক সমীকরণ।

09. সমীকরণটি কোন কনিককে নির্দেশ করে? **[Ans: c]**
(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

10. p এর মান $\frac{1}{2}$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ হবে-
(a) $2x - 1 = 0$ (b) $2x + 1 = 0$
(c) $x - 2 = 0$ (d) $x + 2 = 0$

সমাধান: (a); $y^2 = 4px$ হল পরাবৃত্ত।
উপকেন্দ্রিক লম্ব, $x = p = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।

11. উপবৃত্তটি (6,4) বিন্দুগামী হলে a এর মান কত? **[Ans: a]**
(a) 10 (b) 100 (c) 3 (d) 9

12. $a = 6$ হলে উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি? **[Ans: c]**
(a) $\frac{5}{3}$ একক (b) $\frac{12}{5}$ একক (c) $\frac{25}{3}$ একক (d) $\frac{72}{5}$ একক

13. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ—
(a) $2y = \pm\sqrt{3}\,x$ (b) $\sqrt{3}y = \pm 2x$
(c) $3y = \pm 4x$ (d) $4y = \pm 3x$

সমাধান: (a); $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ -এর অসীমতটের সমীকরণ:
ধ্রুবক পদকে শূন্য ধরে পাই, $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

14. $x^2 = 6ky$ পরাবৃত্তটি (9, 2) বিন্দুগামী হলে, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?
(a) $\frac{81}{2}$ (b) $\frac{81}{8}$ (c) $\frac{27}{4}$ (d) $\frac{27}{2}$

সমাধান: (a); $x^2 = 6ky$; (9, 2) বিন্দু গামী।
$\Rightarrow 6k = \frac{9^2}{2} = \frac{81}{2}$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{81}{2}$

15. $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি?
(a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) 3 (d) 12

সমাধান: (d); $y^2 = 4ax$ এর স্পর্শক $y = mx + c$ হলে
$C = \frac{a}{m} \therefore 1 = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3 \therefore |4a| = 12$

16. $4x^2 - 5y^2 = 20$ অধিবৃত্তের—
(i) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x = \pm 5$
(ii) কেন্দ্রের স্থানাংক (0, 0)
(iii) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ $y = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$; $e = \sqrt{1 + \frac{4}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$
$a = \sqrt{5}$; $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{\sqrt{5}.\sqrt{5}}{3} = \pm\frac{5}{3} \Rightarrow 3x = \pm 5$

17. নিচের কোনটি অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ? **[Ans: a]**
(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (b) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$
(c) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

18. $x^2 + 4x + 2y = 0$ কনিকটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক কত?
(a) (0,0) (b) (−2,0) (c) (0,2) (d) (−2,2)

সমাধান: (d); $(x + 2)^2 = -2y + 4$
$\Rightarrow (x + 2)^2 = -2(y - 2) \therefore$ vertex (−2,2)

19. (±3,0) উপকেন্দ্র এবং $\frac{1}{3}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $x = \pm 9$ (b) $x = \pm 27$ (c) $x = \pm 3$ (d) $x = \pm 8$

সমাধান: (b); $ae = 3$; $e = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9 \therefore \frac{a}{e} = 27$
$\therefore x = \pm 27$

20. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ অধিবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ কোনটি? **[Ans: a]**
(a) $x = a\tan\theta, y = b\sec\theta$
(b) $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$
(c) $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$
(d) $x = a\cos\theta, y = b\tan\theta$

21. $y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ কোনটি?
(a) $y = 0$ (b) $y + 2 = 0$
(c) $6x - 7 = 0$ (d) $x = 0$

সমাধান: (b); $(y + 2)^2 = 6x - 11 + 4$
$= 6x - 7 = 4.\frac{3}{2} \times \left(x - \frac{7}{6}\right) \therefore$ Axis: $y + 2 = 0$

22. $5y = x + 50$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হলে তার ফোকাস হলে- **[Ans: c]**

(a) $(1, 0)$ (b) $(10, 0)$ (c) $(2, 0)$ (d) $(5, 0)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক।

23. স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক–

(a) $\left(\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$ (b) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ (c) $\left(\frac{2a}{m^2}, \frac{a}{m}\right)$ (d) $\left(\frac{a}{m}, \frac{2a}{m^2}\right)$

সমাধান: (b); স্পর্শবিন্দুর ক্ষেত্রে, $x = -\frac{2mc-}{2m^2}$

[(13)- এর (i)- নং থেকে Discriminant 0 ধরলে]

$= -\frac{mc-2a}{m^2} = -\frac{a-2a}{m^2} = \frac{a}{m^2} \therefore y = \sqrt{4a.\frac{a}{m^2}} = \frac{2a}{m}$

24. আয়ত অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নিচের কোনটি?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: (c); $xy = e^2$ or, $x^2 - y^2 = a^2$

or, $y^2 - x^2 = a^2 \therefore e = \sqrt{\frac{a^2+a^2}{a^2}} = \sqrt{2}$

25. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ অধিবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $x = \pm\frac{a}{e}$ (b) $x = \pm\frac{b}{e}$

(c) $y = \pm\frac{b}{e}$ (d) $y = \pm\frac{a}{e}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3y^2 = 27x$ একটি পরাবৃত্ত।

26. $(4, 6)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে—

(a) $3x - 4y - 12 = 0$ (b) $3x - 4y = 0$

(c) $3x - 4y + 12 = 0$ (d) $4x + 3y = 0$

সমাধান: (c); $3y^2 = 27x \Rightarrow 6y.\frac{dy}{dx} = 27$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{27}{6} \times \frac{1}{y} = \frac{9}{2y}$

(4,6) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{9}{2\times6} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ সমীকরণ $3x - 4y + 12 = 0$

27. $4y^2 - 5x^2 = 20$ অধিবৃত্তের— **[Ans: c]**

(i) শীর্ষের স্থানাংক (0,0)

(ii) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $3y \pm 5 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2 = 8x + 5$ একটি পরাবৃত্ত।

28. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ-

(a) $8x - 11 = 0$ (b) $8x - 21 = 0$

(c) $8x + 11 = 0$ (d) $8x + 21 = 0$

সমাধান: (a); $y^2 = 4.2\left(x + \frac{5}{8}\right)$

Vertex $= \left(-\frac{5}{8}, 0\right)$; $a = 2$

$\therefore$ Focus $= \left(-\frac{5}{8} + 2, 0\right) = \left(\frac{11}{8}, 0\right)$

$\therefore$ Latus rectum -এর equation: $\Rightarrow x = \frac{11}{8} \Rightarrow 8x = 11$

29. $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু **[Ans: d]**

(a) (1, 2) (b) (4, −4) (c) (2, 4) (d) (−4, 4)

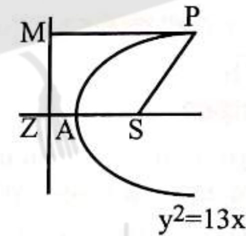
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

30. (3, 4) উপকেন্দ্র এবং (0,0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য– **[Ans: c]**

(a) 12 (b) 16 (c) 20 (d) 25

31. চিত্রে অঙ্কিত পরাবৃত্তের AS =? **[Ans: c]**

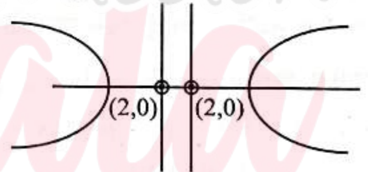


(a) 13 (b) $\frac{13}{2}$ (c) $\frac{13}{4}$ (d) $\frac{13}{8}$

32. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 এবং $(\pm2, 0)$ নিয়ামকের পাদবিন্দু বিশিষ্ট অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (c);



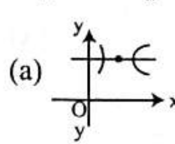
নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = 4 একক $2\left(\frac{a}{e}\right) = 4$

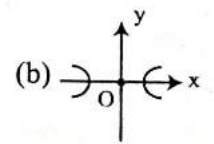
$\Rightarrow \frac{8}{e} = 4 \therefore e = 2$

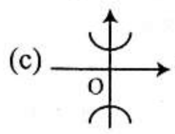
33. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় P, Q হলে ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[Ans: b]**

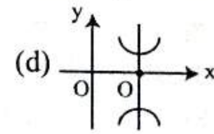
(a) 16 (b) 32 (c) 64 (d) 25

34. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$ এর চিত্ররূপ বোঝায়? **[Ans: a]**

(a)


(b)


(c)


(d)


35. $\frac{1}{2}x^2 = 4y^2 + 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য— **[Ans: b]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম হলে নিচের কোনটি সঠিক? **[Ans: a]**

(a) $x = \pm a\sqrt{\frac{b^2-y^2}{b^2}}$ (b) $x = \pm a\sqrt{\frac{y^2-b^2}{b^2}}$

(c) $x = \pm b\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}$ (d) $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}$

37. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর— **[Ans: a]**

(i) (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

(ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$

(iii) $y = mx + c$ রেখা স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c = \sqrt{a^2m^2+b^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

38. কনিকটির কেন্দ্র–

(a) $(-2, 1)$ (b) $(1, -2)$ (c) $(2, -1)$ (d) $(1, 2)$

সমাধান: (b); $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$

$9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 12^2 \therefore$ কেন্দ্র $(1, -2)$

39. অধিবৃত্তের সমীকরণের— **[Ans: d]**

(i) উপকেন্দ্র দুইটি সর্বদাই বৃহদাক্ষের উপর অবস্থিত

(ii) আদর্শ আকার $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(iii) সাধারণ আকার, $(a^2+b^2)\{(x-\alpha)^2+(y-\beta^2)\} = e^2(ax+by+c)^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, iii (b) ii, iii (c) ii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2 = 12x$ একটি পরাবৃত্ত এবং $x + 2y - 1 = 0$ একটি রেখা।

40. পরাবৃত্তের একটি স্পর্শকের $x + 2y - 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব নিচের কোনটি? **[Ans: a]**

(a) $4x - 2y + 3 = 0$ (b) $3x + 2y + 4 = 0$

(c) $2x + 2y + 1 = 0$ (d) $4x + 2y - 3 = 0$

41. পরাবৃত্তটির— **[Ans: a]**

(i) উপকেন্দ্রের স্থানাংক (3, 0)

(ii) আকার X -অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

(iii) আকার Y -অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

42. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত? **[Ans: c]**

(a) -1 (b) 1 (c) ∞ (d) 0

43. কোন উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এর বৃহদাক্ষের অর্ধেক। এর উৎকেন্দ্রিকতা কত? **[Ans: b]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 2 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (b); $\frac{2b^2}{a} = a \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

44. $x = 2t, y = t^2$ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত? **[Ans: d]**

(a) $(-1, 0)$ (b) $(0, -1)$ (c) $(1, 0)$ (d) $(0, 1)$

45. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a > b)$ উপবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $x = \frac{a}{e}$ (b) $x = -\frac{a}{e}$

(c) $x = \pm\frac{a}{e}$ (d) $x = \pm\frac{e}{a}$

46. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ কনিকটি- **[Ans: b]**

(i) অধিবৃত্ত যখন $a = -b$

(ii) উপবৃত্ত যখন $a \neq b$

(iii) বৃত্ত যখন $a = b$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

47. কোনো উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ ক্ষুদ্র অক্ষের চারগুণ হলে e =? **[Ans: c]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

48. $3x^2 + by^2 = 2$ সমীকরণটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করবে যখন- **[Ans: d]**

(a) $b = 1$ (b) $b = 0$ (c) $b < 1$ (d) $b < 0$

49. B বিন্দু $(y-2)^2 = 4(x+1)$ এর উপর অবস্থিত হলে, B এর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[Ans: b]**

(a) $(4, 0)$ (b) $(0, 4)$ (c) $(1, 2)$ (d) $(1, -2)$

50. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের কোনো বিন্দু থেকে তার উপকেন্দ্রের দূরত্ব 6 হলে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[Ans: a]**

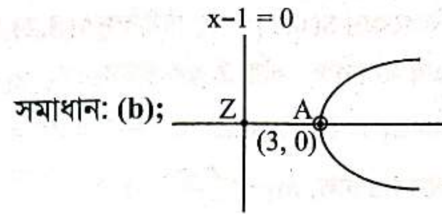
(a) $(2, \pm4\sqrt{2})$ (b) $(2, 4\sqrt{2})$

(c) $(2, -4\sqrt{2})$ (d) $(4\sqrt{2}, \pm2)$

51. একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0,2), অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ হলো- **[Ans: c]**
(a) $4x^2 = 3(y-2)$ (b) $3x^2 = 12(y-2)$
(c) $3x^2 = 4(y-2)$ (d) $2x^2 = 3(y-2)$

52. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের পাদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক কত? **[Ans: c]**
(a) $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$ (b) $\left(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
(c) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ (d) $\left(0, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

53. একটি পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ $x - 1 = 0$ এবং শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ-
(a) $y^2 = 4(x-3)$ (b) $y^2 = 8(x-3)$
(c) $y^2 = 4(x+3)$ (d) $y^2 = 8(x+3)$

সমাধান: (b);


$AZ = \left|\frac{3-1}{1}\right| = 2 \therefore a = 2$
$\therefore$ সমীকরণ $(y-0)^2 = 4(2)(x-3) \therefore y^2 = 8(x-3)$

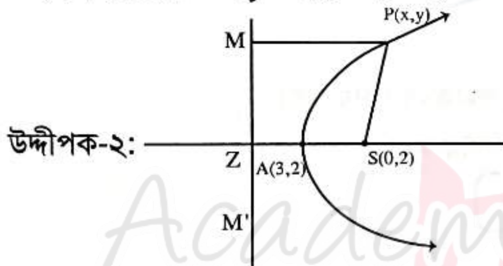
54. a ও b এর মান কত হলে $y = ax^2 + b$ পরাবৃত্তটি (0,1) বিন্দু দিয়ে যাবে ও (1,0) বিন্দুতে উহার স্পর্শকের ঢাল 6 হবে? **[Ans: b]**
(a) −1,1 (b) 3,1 (c) 1,−1 (d) 1,3

55. $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ উভয় পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে এরূপ সরলরেখা- **[Ans: a]**
(a) $y + x + 1 = 0$ (b) $y - x + 1 = 0$
(c) $y - x - 1 = 0$ (d) $y + x - 1 = 0$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান**

01. উদ্দীপক-১: $3x^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ **[DB'22]**

উদ্দীপক-২:


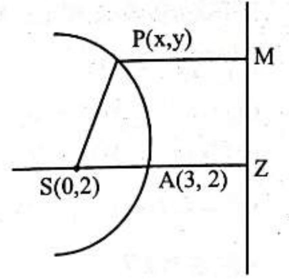
(ক) কনিক ও কনিকের উপকেন্দ্রের সংজ্ঞা লিখ। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত সমীকরণটিকে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর ও এর শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এ চিহ্নিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. কোনো সমতলে একটি বিন্দু যদি এমনভাবে চলে যে, ঐ সমতলের উপর অবস্থিতে একটি স্থির বিন্দু ও চলমান বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব এবং চলমান বিন্দু থেকে সমতলটির ওপর অবস্থিত একটি স্থির সরলরেখার লম্ব দূরত্বের অনুপাত সর্বদা ধ্রুবক থাকে, তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে কনিক বলে এবং ঐ স্থির বিন্দুটিকে কনিকের উপকেন্দ্র বলে।

খ. উদ্দীপক-১ হতে পাই, $3x^2 - 4y - 6x - 5 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4y + 5$
$\Rightarrow 3(x-1)^2 - 3 = 4y + 5 \Rightarrow 3(x-1)^2 = 4y + 8$
$\Rightarrow (x-1)^2 = \frac{4}{3}(y+2) \Rightarrow X^2 = 4.\frac{1}{3}.Y \ldots\ldots\ldots (i)$ $\left[\text{ধরি, } \begin{matrix} X = x - 1 \\ Y = y + 2 \end{matrix}\right]$
(i) নং কে $X^2 = 4aY$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = \frac{1}{3}$ এখন শীর্ষবিন্দু, $A(X, Y) \equiv (0, 0)$; $X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$
$\therefore x = 1, Y = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \therefore y = -2 \therefore$ শীর্ষবিন্দু, $A(x, y) \equiv (1, -2)$ **(Ans.)**
আবার, উপকেন্দ্র $S(X, Y) \equiv (0, a) \equiv \left(0, \frac{1}{3}\right)$; $X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \therefore x = 1, Y = \frac{1}{3} \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{3} \therefore y = -\frac{5}{3}$
$\therefore$ উপকেন্দ্র, $s(x, y) \equiv \left(1, -\frac{5}{3}\right)$ **(Ans.)**
অক্ষের সমীকরণ, $X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \therefore x = 1$ **(Ans.)**

দেওয়া [redacted]ছে, উপকেন্দ্র $S(0,2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $A(3,2)$ ধরি, পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু $P(x,y)$ ও নিয়ামক রেখা MZ আমরা জানি, Z ও S এর মধ্যবিন্দু। ধরি, Z এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)



$\therefore \frac{x_1+o}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 6 \therefore Z(6,2) \Rightarrow \frac{y_1+2}{2} = 2 \Rightarrow y + 2 = 4 \Rightarrow y_1 = 2$

পরাবৃত্তের অক্ষরেখার ঢাল, $m_1 = \frac{2-2}{3-0} = 0$

$\therefore$ নিয়ামক রেখারঢাল, $m_2 = \frac{-1}{0}$ $[\because m_1 \times m_2 = -1]$

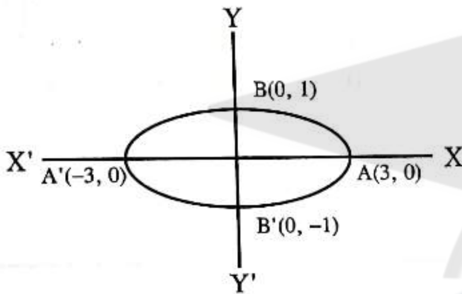
$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $y - 2 = \frac{-1}{0}(x-6) \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x - 6 = 0$

এখন, $SP = PM \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = x^2 - 12x + 36$

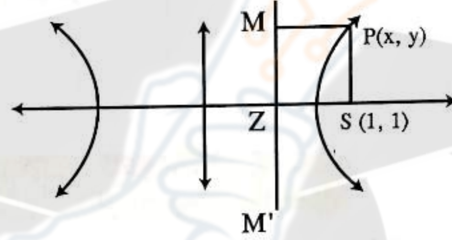
$\Rightarrow (y-2)^2 = -12(x-3)$, ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।

02. [DB'

উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২:



$\mathbf{2x + y = 1}$ হলো দিকাক্ষ **MM'**এর সমীকরণ।

(ক) $\mathbf{2x^2 + 3y^2 = 1}$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

উপবৃ[redacted] সমীকরণ: $2x^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2 = \frac{1}{2}, b^2 = \frac{1}{3} \therefore a > b$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ একক **(Ans.)**

উদ্দীপ[redacted] এর চিত্র হতে পাই, উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = \sqrt{(3+3)^2 + 0} \Rightarrow a = 3$

এবং ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b = \sqrt{(1+1)^2 + 0} \therefore b = 1 \because a > b \therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(Ans.)**

উপকেন্দ্রের সমীকরণ, $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \therefore x = \pm 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

নিয়ামকের সমাধান, $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \therefore 2\sqrt{2}x \pm 9 = 0$ **(Ans.)**

উদ্দীপ[redacted]২ হতে পাই, উপকেন্দ্র, $S(1,1)$; দিকাক্ষের সমীকরণ, $MM': 2x + y = 1 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{3}$ এবং অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু, $P(x,y)$

আমরা জানি, $SP = e \times PM \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{3} \times \left|\frac{2x+y-}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{3}{5}(2x+y-1)^2 \Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = 3(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x)$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 10 = 12x^2 + 3y^2 + 3 + 12xy - 6y - 12x$

$\Rightarrow 2y^2 - 7x^2 - 12xy + 2x - 4y + 7 = 0 \therefore 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$



03. দৃশ্যকল্প-১: $4x^2 - 8x + 8y^2 - 8y = 10$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ। **[Ctg.B'22]**

দৃশ্যকল্প-২: একটি কনিকের কেন্দ্র $(-2,-2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(4,-1)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$।

(ক) $x^2 = -7y$ পরাবৃত্তটির দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর উপবৃত্তটির কেন্দ্র, উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কনিকটির নাম উল্লেখ কর এবং উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক $x^2 = -7y \Rightarrow x^2 = 4.-\frac{7}{4}.y \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং কে $x^2 = 4ay$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -\frac{7}{4}$ ∴ দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = -a \Rightarrow y = \frac{7}{4} \therefore 4y - 7 = 0$ **(Ans.)**

খ উপবৃত্তের সমীকরণটি, $4x^2 - 8x + 8y^2 - 8y = 10 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 8\left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 10$

$\Rightarrow 4(x-1)^2 - 4 + 8\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 10 \Rightarrow 4(x-1)^2 + 8\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 16$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$ [ধরি, $X = x-1$, এবং $Y = y - \frac{1}{2}$]

(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$ এবং $b = \sqrt{2} \therefore a > b$, কেন্দ্র, $C(X.Y) \equiv (0,0)$

$X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \therefore x = 1, Y = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \therefore y = \frac{1}{2}$ ∴ কেন্দ্র $C(x,y) \equiv \left(1, \frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $S(X,Y) \equiv (\pm ae, 0)$

$X = \pm ae \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$;

$Y = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \therefore y = \frac{1}{2}$ ∴ উপকেন্দ্র, $S(x,y) \equiv \left(1 \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য= $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 2}{2} = 2$ একক **(Ans.)**

গ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{3}$ ∴ অক্ষরেখার সমীকরণ, $\frac{y+1}{-1+2} = \frac{x-4}{4+2} \Rightarrow 6y + 6 = x - 4 \Rightarrow x - 6y - 10 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

এখন, $a = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} \therefore \frac{a}{e} = 3\sqrt{37}, ae = \frac{\sqrt{37}}{3}$

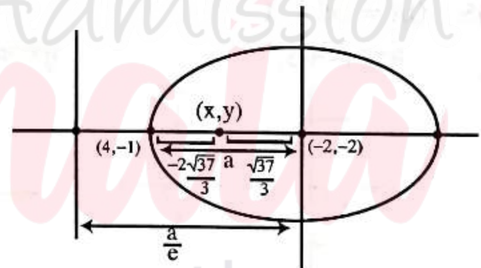
নিয়ামকরেখার সমীকরণ: নিয়ামকরেখা অক্ষরেখার উপর লম্ব,

সুতরাং নিয়ামকরেখা $\equiv 6x + y + k = 0$

$\frac{|6\times 4 - 1 + k|}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{a}{e} - a \Rightarrow |23 + k| = (3\sqrt{37} - \sqrt{37})\sqrt{37} = 74$

$\Rightarrow |23 + k| = 74 \Rightarrow k = 51, -97$

এখানে, $k = -97$ এর জন্য সরলরেখাটি কেন্দ্র হতে দূরবর্তী $k = 51$ এর তুলনায়



∴ নিয়ামকরেখা $\equiv 6x + y - 97 = 0$; উপকেন্দ্র নির্ণয়: $x = \frac{\frac{\sqrt{37}}{3}\times 4 + \frac{2\sqrt{37}}{3}\times(-2)}{\sqrt{37}} = 0$

$y = \frac{\frac{\sqrt{37}}{3}\times(-1) + \frac{2\sqrt{37}}{3}\times(-2)}{\sqrt{37}} = \frac{-5}{3}$ ∴ উপকেন্দ্র $\equiv \left(0, \frac{-5}{3}\right)$

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ, $(x-0)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{(6x+y-\quad)^2}{6^2+1^2} \Rightarrow x^2 + \left(y+\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{(6x+y-9\quad)^2}{37}$

04. দৃশ্যকল্প-১: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(4,2), (10,2)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3। **[Ctg.B'22]**

দৃশ্যকল্প-২: কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং y-অক্ষ বরাবর আড় অক্ষবিশিষ্ট কোনো অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 16।

(ক) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাংক নির্ণয় কর, যেখানে θ উপকেন্দ্রিক কোণ। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর তথ্যের সাহায্যে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, উপবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ ... ... (i)

(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=4$ এবং $b=2 \therefore a>b$

$\therefore x=4\cos\theta$ এবং $y=2\sin\theta$ $\therefore$ উপবৃত্তটির পরামিতিক স্থানাঙ্ক: $(4\cos\theta, 2\sin\theta)$; যেখানে উৎকেন্দ্রিক কোণ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $S(4,2)$ এবং $S'(10,2)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা, $e=3$

যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোণটি একই সুতরাং অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $SS'=2ae \Rightarrow \sqrt{(10-4)^2+(2-2)^2}=2\times a\times 3 \Rightarrow 6=6a \therefore a=1$

আবার, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow 3=\sqrt{1+b^2} \Rightarrow b^2=8 \therefore b=2\sqrt{2}$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির অসীমতটের সমীকরণ, $y=\pm\frac{b}{a}x \therefore y=\pm2\sqrt{2}x$

গ. মনে করি, মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং y অক্ষ বরাবর আড় অক্ষ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ... ... (i)

প্রশ্নমতে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2a^2}{b}=24 \Rightarrow a^2=12b$ ... ... (ii)

এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $2be=16 \Rightarrow be=8$ ... ... (iii)

আবার, $e=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} \Rightarrow e^2=\frac{b^2+a^2}{b^2} \Rightarrow (be)^2=b^2+12b$ [(ii) নং হতে]

$\Rightarrow 8^2=b^2+12b$ [(iii)নং হতে]

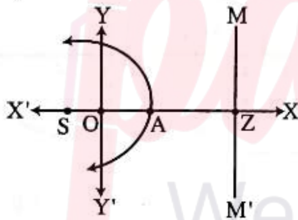
$\Rightarrow b^2+12b-64=0 \Rightarrow b^2+16b-4b-64=0 \Rightarrow b(b+16)-4(b+16)=0 \Rightarrow (b+16)(b-4)=0$

$\therefore$ হয়, $b=-16$ [গ্রহনযোগ্য নয়] অথবা, $b=4 \therefore b=4 \Rightarrow b^2=16$

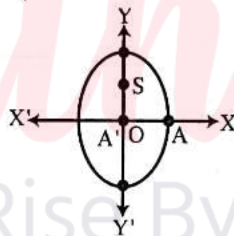
(ii) $\Rightarrow a^2=12\times4=48$ $\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{48}=1$ **(Ans.)**

05. $OA=OS=1$ **[RB'22]**

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



$AA'=6$, $AO<OB$.

(ক) **$3x^2-4y^2=12$** কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নিয়ামক রেখা **MZM'** এর সমীকরণ **$x=3$** হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্র **S** এর স্থানাঙ্ক **$(0,4)$** হলে এর নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

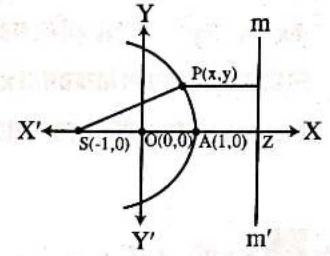
সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণটি, $3x^2-4y^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণকে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2=4$ এবং $b^2=3$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ **(Ans.)**

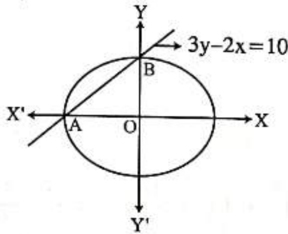
খ. যেহেতু, $OA = OS = 1 \therefore A(1,0)$ এবং $S(-1,0)$
দেওয়া আছে, নিয়ামকের সমীকরণ, $x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$ ……… (i)
ধরি, পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু, $P(x,y)$
পরাবৃত্তের সংজ্ঞামতে, $SP = PM$
$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \left|\frac{x-3}{\sqrt{1^2+0}}\right| \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 6x + 9$ [বর্গ করে]
$\Rightarrow y^2 = -8x + 8 \Rightarrow y^2 = -8(x-1) \Rightarrow y^2 = 4.(-2)(x-1)$ ……… (i)
(i) নং কে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -2$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4 \times -2| = 8$ একক **(Ans.)**



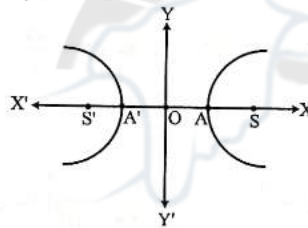
গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, $AA' = 2a = 6 \therefore a = 3$ এবং $AO < OB$; অর্থাৎ বৃহদাক্ষ y অক্ষ বরাবর অবস্থিত $b > a$
দেওয়া আছে, উপকেন্দ্র, $S(0,4) \therefore be = 4$ ……… (i)
আবার, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \Rightarrow e^2 = \frac{b^2-a^2}{b^2} \Rightarrow (be)^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow 4^2 = b^2 - 9 \Rightarrow b^2 = 25$
$\therefore b = 5$, (i) $\Rightarrow e = \frac{4}{5} \therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} \therefore 4y \pm 25 = 0$ **(Ans.)**

06. **[RB'22]**

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



$AA' = 8, SS' = 10$

(ক) $\mathbf{y^2 = 80x}$ কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণটি, $y^2 = 80x \Rightarrow y^2 = 4.20x$ ……… (i)
(i) নং কে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 20 \therefore$ উপকেন্দ্র, $S(20,0)$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ……… (i)
প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ, $3y - 2x = 10 \Rightarrow \frac{y}{\frac{10}{3}} + \frac{x}{-5} = 1$; অর্থাৎ উপবৃত্তটি, $(-5,0)$ এবং $(0,\frac{10}{3})$ বিন্দুগামী।
$\therefore \frac{(-5)^2}{a^2} + 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ এবং $0 + \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{100}{9} \Rightarrow b = \frac{10}{3} \therefore a > b$
$\therefore$ উৎকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{100}{9\times25}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = \pm ae \Rightarrow x = \pm 5 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \therefore 3x \pm 5\sqrt{5} = 0$ **(Ans.)**

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, আড়অক্ষ x অক্ষ বরাবর অবস্থিত।
মনে করি অধিবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ……… (i)
প্রশ্নমতে, $AA' = 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$ এবং $SS' = 10 \Rightarrow 2ae = 10 \Rightarrow 2 \times 4 \times e = 10 \Rightarrow e = \frac{5}{4}$
আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1 + \frac{b^2}{4^2} \therefore b^2 = 9 \therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **(Ans.)**

07. $\mathbf{A(1,-2)}$ একটি বিন্দু এবং $\mathbf{f(x,y) = x^2 - 8x - 4y + 20}$ একটি ফাংশন। [SB'2

(ক) $\mathbf{4x^2 + 7y^2 = 28}$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $\mathbf{3x - 4y = 1}$ হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ বের কর যার শীর্ষ বিন্দু **A** 4

(গ) $\mathbf{f(x,y) = 0}$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, নিয়ামকের সমীকরণ ও অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

প্রদত্ত [redacted]করণটি, $4x^2 + 7y^2 = 28 \Rightarrow \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1 \dots\dots\dots (i)$

(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2 = 7,\ b^2 = 4 \therefore a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ **(Ans.)**

দেওয়া [redacted]ছে, পরাবৃত্তটি শীর্ষবিন্দু, $A(1,-2)$ এবং নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $mz: 3x - 4y = 1 \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0 \dots\dots (i)$

(i) নং রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + k = 0 \dots\dots\dots (ii)$

(ii) নং রেখাটি $A(1,-2)$ বিন্দুগামী বলে, $4 - 6 + k = 0 \therefore k = 2$

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $4x + 3y + 2 = 0 \dots\dots\dots (iii)$

অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দু, $= \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

ধরি, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $S(\alpha,\beta)$, S এবং z এর মধ্যবিন্দু A, $\therefore \frac{\alpha - \frac{1}{5}}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{11}{5}$

এবং $\frac{\beta - \frac{2}{5}}{2} = -2 \Rightarrow \beta = \frac{18}{5} \therefore$ উপকেন্দ্র, $S\left(\frac{11}{5}, -\frac{18}{5}\right)$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞামতে, $SP = PM \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{18}{5}\right)^2} = \left|\frac{3x-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right| \Rightarrow \left(x - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{18}{5}\right)^2 = \frac{(3x-4y-1)^2}{25}$

$\Rightarrow x^2 - \frac{22}{5}x + \frac{121}{25} + y^2 + \frac{36}{5}y + \frac{324}{25} = \frac{9x^2+16y^2+1-24xy+8y-6x}{25}$

$\Rightarrow 25x^2 - 110x + 25y^2 + 80y + 445 = 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 8y - 6x + 1$

$\Rightarrow 16x^2 - 104x + 9y^2 + 172y + 24xy + 444 = 0$ **(Ans.)**

এখানে [redacted]$(x,y) = x^2 - 8x - 4y + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 2.4.x + 4^2 - 4^2 = 4y - 20$

$\Rightarrow (x-4)^2 = 4y - 4 \Rightarrow (x-4)^2 = 4(y-1) \Rightarrow X^2 = 4.1.Y \dots\dots\dots (i)$ [ধরি, $X = x - 4$ এবং $Y = y - 1$]

(i) নং কে $x^2 = 4ay$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $Y = a \Rightarrow y - 1 = 1 \therefore y = 2$ **(Ans.)**

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $Y = -a, \Rightarrow y - 1 = -1 \therefore y = 0$ **(Ans.)**

এবং অক্ষরেখার সমীকরণ, $X = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \therefore x = 4$ **(Ans.)**

08. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{4x^2 + ay^2 = 1}$ একটি কনিকের সমীকরণ। [SB'2

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{\sqrt{3}}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট একটি কনিকের নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব **4**।

(ক) $\mathbf{(x-3)^2 = 4(y+2)}$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর কনিকটি $\mathbf{(0, \pm 1)}$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে কনিকটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য বের কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কনিকের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বরাবর হলে, কনিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

প্রদত্ত [redacted]করণটি, $(x-3)^2 = 4(y+2) \Rightarrow X^2 = 4.1.Y \dots\dots\dots (i)$ [ধরি, $X = x - 3, Y = y + 2$]

(i) নং কে $x^2 = 4ay$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1 \therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(X,Y) \equiv (0,a)$

$X = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \therefore x = 3, Y = a \Rightarrow y + 2 = 1 \therefore y = -1 \therefore$ উপকেন্দ্র, $S(x,y) \equiv (3,-1)$ **(Ans.)**

প্রদত্ত [redacted]ীকরণ, $4x^2 + ay^2 = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং কনিকটি, $(0, \pm 1)$ বিন্দুগামী বলে, $4 \times 0^2 + a \times (\pm 1)^2 = 1 \therefore a = 1$

$(i) \Rightarrow 4x^2 + y = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(1)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(ii) নং কে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $A = \frac{1}{2}, b = 1 \therefore b > a$

$\therefore$ বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 1 = 2$ একক

এবং ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ একক **(Ans.)**

মনে ক[redacted], কনিকের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

প্রশ্নমতে, নিয়ামকরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব, $= 4 \Rightarrow \frac{2a}{e} = 4 \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$ $[\because e = \sqrt{3}]$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = 1 + \frac{b^2}{(2\sqrt{3})^2} \therefore b^2 = 24$

$\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$ **(Ans.)**

09. উদ্দীপক-১: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু **(–1,1)** এবং উপকেন্দ্র **(2, –3)** । **[BB'22]**

উদ্দীপক-২: $\mathbf{4x^2 + 9y^2 - 40x - 108y + 388 = 0}$ একটি কনিক।

(ক) $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। **2**

(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

প্রদত্ত [redacted]করণটি, $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{x^2}{(1)^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং কে $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $b = \sqrt{2}$ এবং $a = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $S(0, \pm be) \equiv (0, \pm\sqrt{3})$ **(Ans.)**

উদ্দীপ[redacted]১ হতে পাই, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, $A(-1, 1)$ এবং উপকেন্দ্র, $S(2, -3)$

$\therefore$ অক্ষরেখার সমীকরণ, $\frac{x+1}{-1-2} = \frac{y-1}{1+3} \Rightarrow 4x + 4 = -3y + 3 \Rightarrow 4x + 3y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $3x - 4y + k = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

ধরি, অক্ষরেখা ও নিয়ামকরেখার ছেদবিন্দু $= (\alpha, \beta)$

যেহেতু S ও Z এর মধ্যবিন্দু, A সুতরাং, $\frac{2+\alpha}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = -4$ এবং $\frac{-3+\beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = 5 \therefore Z(-4, 5)$

(ii) নং রেখাটি $(-4, 5)$ বিন্দুগামী বলে, $3 \times (-4) - 4 \times 5 + k = 0 \Rightarrow k = 32$

$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 32 = 0$

উদ্দীপ[redacted]২ হতে পাই, $4x^2 + 9y^2 - 40x - 108y + 388 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 - 12y) + 388 = 0$

$\Rightarrow 4(x^2 - 10x + 25 - 25) + 9(y^2 - 12y + 36 - 36) + 388 = 0$

$\Rightarrow 4(x-5)^2 - 100 + 9(y-6)^2 - 324 + 388 = 0 \Rightarrow 4(x-5)^2 + 9(y-6)^2 = 36$

$\Rightarrow \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$ [ধরি, $X = x - 5$ এবং $Y = y - 6$]

(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 3$ এবং $b = 2 \therefore a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $X = \pm ae \Rightarrow x - 5 = \pm 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{5}$ **(Ans.)**

10. উদ্দীপক-১: $\mathbf{9x^2 - 4y^2 + 36x - 8y - 4 = 0}$ একটি কনিকের সমীকরণ। **[BB'22]**
উদ্দীপক-২: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট একটি কনিক যা $(4, -2\sqrt{6})$ বিন্দুগামী; যার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর অবস্থিত।
(ক) $\mathbf{y^2 + 4x + 2y - 11 = 0}$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। **2**
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। **4**
(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. পরাবৃত্তটির সমীকরণটি, $y^2 + 4x + 2y - 11 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = -4x + 12$
$\Rightarrow (y+1)^2 = -4(x-3)$ ……… (i) ∴ পরাবৃত্তটির শীর্ষ, A(3, −1) **(Ans.)**

খ. উদ্দীপক হতে প্রাপ্ত কনিকের সমীকরণটি, $9x^2 - 4y^2 + 36x - 8y - 4 = 0$
$\Rightarrow 9(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y) - 4 = 0$; $9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 4(y^2 + 2y + 1 - 1) - 4 = 0$
$\Rightarrow 9(x-2)^2 - 36 - 4(y+1)^2 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow 9(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
$\Rightarrow \frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{3^2} = 1$ ……… (i) [ধরি, $X = x - 2, Y = y + 1$]
(i) নং কে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = 3$
∴ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ∴ উপকেন্দ্রের স্থানাংক, $S(X, Y) \equiv (\pm ae, 0)$
$X = \pm ae \Rightarrow x - 2 = \pm\left(2 \times \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \therefore x = 2 \pm \sqrt{13}$; $Y = 0 \Rightarrow y + 1 = 0 \therefore y + 1 = 0 \therefore y = -1$
∴ উপকেন্দ্রের স্থানাংক, $S(x, y) \equiv (2 \pm \sqrt{13}, -1)$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $e = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$; মনে করি, উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ……… (i) $(a > b)$
(i) নং $(4, -2\sqrt{6})$ বিন্দুগামী বলে, $\frac{16}{a^2} + \frac{24}{b^2} = 1$ ……… (ii)
আবার, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$ ……… (iii)
(ii) $\Rightarrow \frac{16}{2b^2} + \frac{24}{b^2} = 1 \Rightarrow 16 + 48 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 32 \therefore a^2 = 64$ [(iii) হতে]
∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$ **(Ans.)**

11. উদ্দীপক-১: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (5,3) অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (7,2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। **[JB'22]**
উদ্দীপক-২: একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র (−2, 3), নিয়ামকের সমীকরণ $\mathbf{2x + y - 3 = 0}$ এবং উৎকেন্দ্রিতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(ক) $\mathbf{y^2 - 8x + 8y = 0}$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত? **2**
(খ) পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**
(গ) উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. **08** নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং A (5, 3) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-5)^2 = 4a(y-3)$ ……… (i)
(i) নং (7, 2) বিন্দুগামী বলে, $(7-5)^2 = 4a(2-3) \Rightarrow 4 = -4a \therefore a = -1$
∴ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-5)^2 = -4(y-3)$ **(Ans.)**

গ. উদ্দীপক হতে পাই, উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র, S (−2, 3), উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$
নিয়ামকের সমীকরণ, MZ: $2x + y - 3 = 0$; ধরি, উপবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু, P (x, y)
উপবৃত্তের সংজ্ঞামতে, $SP = e \times PM \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left|\frac{2x+y-3}{\sqrt{2^2+1^2}}\right|$
$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = \frac{(2x+y-\ )^2}{3\times5} \Rightarrow 15(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy - 6y - 12x$
$\Rightarrow 11x^2 + 14y^2 - 4xy + 72x + 84y + 186 = 0$ **(Ans.)**

12. উদ্দীপক-১: একটি কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{13}}{3}$ এবং উহা $\left(4, \frac{\sqrt{28}}{3}\right)$ বিন্দুগামী। [CB'22]
উদ্দীপক-২: $x^2 + 2y^2 - 12x + 28 = 0$
(ক) $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ কনিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে শনাক্ত কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত কনিকের অক্ষদ্বয়কে x- অক্ষ ও y- অক্ষ ধরে উহার অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত সমীকরণটি, $4x^2 - 9y^2 - 1 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1; \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকারের ∴ ইহা একটি অধিবৃত্ত। **(Ans.)**

খ. উদ্দীপক-১ হতে পাই, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$
মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণটি, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ……… (i)
(i) নং $\left(4, \frac{\sqrt{28}}{3}\right)$ বিন্দুগামী হলে, $\frac{16}{a^2} - \frac{28}{9b^2} = 1$ ……… (ii)
আবার, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{13}{9} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \therefore b^2 = \frac{4}{9}a^2$ ……… (iii)
(ii) $\Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{28}{4a^2} = 1 \Rightarrow 64 - 28 = 4a^2 \therefore a^2 = 9 \therefore b^2 = 4$ [(iii) হতে]
∴ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ∴ আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 3 = 6$ একক
অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 2 = 4$ একক

গ. প্রদত্ত সমীকরণটি, $x^2 + 2y^2 - 12x + 28 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 - 36 + 2y^2 + 28 = 0$
$\Rightarrow (x-6)^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1$ ……… [ধরি, $X = x - 6$]
(i) নং কে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2\sqrt{2}$ এবং $b = 2 \therefore a > b$
$\therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(x, y) \equiv (\pm ae, 0)$
$X = \pm ae \Rightarrow x - 6 = \pm\left(2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = 6 \pm 2 \therefore x = 8 \text{ or } 4$
$y = 0$ ∴ উপকেন্দ্র, $S(8, 0)$ এবং $S'(4, 0)$ ∴ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x - 6 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow x - 6 = \pm 4$
(+) নিয়ে, $x - 10 = 0$; (−) নিয়ে, $x - 2 = 0$

13. উদ্দীপক-১: একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x ও y অক্ষরেখা, একটি উপকেন্দ্র (2,0) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$. [CB'22]
উদ্দীপক-২: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (–2,1).
(ক) $x^2 + 4y^2 = 1$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2
(খ) নিয়ামকরেখা x অক্ষরেখার উপর লম্ব ও (8, 0) বিন্দুগামী হলে, দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, উপবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + 2y^2 + 8x - 56 = 0$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (–6, –3) হলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 07 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. উদ্দীপক ১ হতে পাই, $S(2, 0)$ এবং $e = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$
x-অক্ষের উপর লম্ব এবং (8, 0) বিন্দুগামী নিয়ামকের সমীকরণ $x = 8 \Rightarrow x - 8 = 0$ ……… (i)
ধরি, উপরক্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু, $P(x, y)$
আমরা জানি, $SP = e \times PM \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left|\frac{x-8}{1}\right|$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 16x + 64)$ [বর্গ করে] $\therefore x^2 + 2y^2 + 8x - 56 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. 01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

[Din.B'22]

14. $A(1,-3), B(0,7), C(1,1)$

(ক) $4x^2+5y^2=1$ উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও এর অনুরূপ নিয়ামক রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) $y=ax^2+bx+c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ A এবং এটি B বিন্দুগামী হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) A ও C কোনো উপবৃত্তের শীর্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $x^2+5y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=1 \therefore a=\frac{1}{2}$ এবং $b=\frac{1}{\sqrt{5}} \therefore a>b \therefore e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র ও এর অনুরূপ নিয়ামকরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব, $=\frac{a}{e}-ae=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **(Ans.)**

খ. $A(1,-3)$ শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)^2=4a(y+3)$ ……… (i) [$\because$ y অক্ষের সমান্তরাল]

(i) নং $B(0,7)$ বিন্দুগামী বলে, $1=40a \Rightarrow a=\frac{1}{40} \therefore$ (i) $\Rightarrow (x-1)^2=4\times\frac{1}{40}(y+3)$

$\Rightarrow x^2-2x+1=\frac{1}{10}(y+3) \Rightarrow y=10x^2-20x+7$ ……… (ii)

(ii) নং কে $y=ax^2+bx+c$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=10, b=-20$ এবং $c=7$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, শীর্ষবিন্দুদ্বয়, $A(1,-3)$ এবং $C(1,1)$

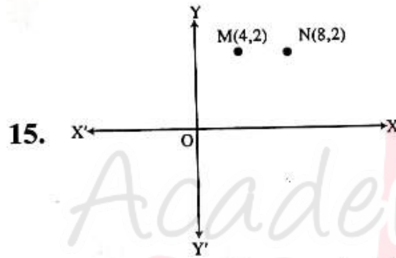
যেহেতু শীর্ষের ভুজ একই সুতরাং বৃহদাক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল-

$\therefore$ কেন্দ্র, $C\left(\frac{1+1}{2},\frac{-3+1}{2}\right)=(1,-1) \therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2}=1$

বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b=\sqrt{(1+3)^2+0} \Rightarrow 2b=4 \therefore b=2$

আবার, $e^2=1-\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{3}{4}=1-\frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2=1 \therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ **(Ans.)**

15.



[Din.B'22]

(ক) M ও N বিন্দুদ্বয় কোনো উপবৃত্তের ফোকাস এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র M এবং শীর্ষ O। 4

(গ) M ও N বিন্দুদ্বয় কোনো অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয়, $M(4,2)$ ও $N(8,2)$

কোটি একই বলে, বৃহদাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, $\therefore a>b$; কেন্দ্র, $C(6,2)$

প্রশ্নমতে, $2a=6 \Rightarrow a=3$ এবং $MN=2ae \Rightarrow 4=2\times3\times e \therefore e=\frac{2}{3}$

আবার, $e^2=1-\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{4}{9}=1-\frac{b^2}{9} \therefore b^2=5 \therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, উপকেন্দ্র, $S(4,2)$ এবং শীর্ষ, $A(0,0)$

আমরা জানি, S ও Z এর মধ্যবিন্দু, A

ধরি, Z এর স্থানাঙ্ক, (α,β) এবং $P(x,y) \therefore \frac{\alpha+4}{2}=0 \Rightarrow \alpha=-4$ এবং $\frac{\beta+2}{2}=0 \Rightarrow \beta=-2 \therefore Z(-4,-2)$

এখানে, অক্ষরেখার ঢাল, $m_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \therefore$ নিয়ামকের ঢাল, $m_2=-2$ $[m_1\times m_2=-1]$

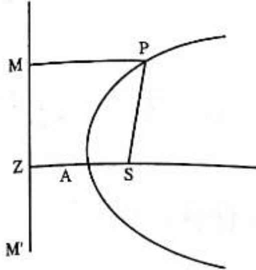
$\therefore$ নিয়ামকরেখার সমীকরণ, MZ: $(y+2)=-2(x+4) \Rightarrow 2x+y+10=0$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞামতে, $SP^2=PM^2 \Rightarrow (x-4)^2+(y-2)^2=\frac{(2x+y+\quad)^2}{5}$

$\Rightarrow 5(x^2-8x+16)+5(y^2-4y+4)=4x^2+y^2+100+4xy+40x+20y$

$\Rightarrow x^2+4y^2-4xy-80x-40y=0 \therefore (x-2y)^2-80x-40y=0$

দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় M $(4, 2)$ এবং N $(8, 2)$ ∴ কেন্দ্র, C $\left(\frac{4+8}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (6, 2)$ এবং $e = 2$
যেহেতু উপকেন্দ্রদ্বয়ের কোটি একই, আড় অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল তাহলে, অধিবৃত্তের সমীকরণটি,
$\frac{(x-6)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$ ... ... (i); এখানে, $MN = 2ae \Rightarrow \sqrt{4^2+0} = 2 \times a \times 2 \therefore a = 1$
আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 4 = 1 + \frac{b^2}{1} \therefore b^2 = 3$ ∴ অধিবৃত্তের সমীকরণটি $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ **(Ans.)**

16. 

[MB'22]

উপরের চিত্রটি একটি কনিক নির্দেশ করে। যার উপকেন্দ্র S, শীর্ষবিন্দু A এবং MZM' নিয়ামক রেখা।

(ক) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

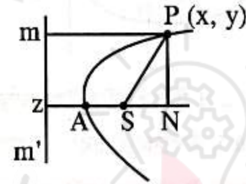
(খ) উদ্দীপকের কনিকটির সমীকরণ, $y^2 = 6x$ এবং $SP = 6$ হলে, P বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র $(-1,1)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(2, -3)$ । 4

সমাধান

05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

প্রদত্ত কনিকের সমীকরণ, $y^2 = 6x$ ... ... (i) ∴ শীর্ষ A $(0, 0)$ এবং $a = \frac{3}{2}$ পরাবৃত্তের সংজ্ঞা মতে, $SP = PM \Rightarrow SP = ZN$
$\Rightarrow SP = AZ + AN \Rightarrow 6 = a + x \Rightarrow 6 = \frac{3}{2} + x \therefore x = \frac{9}{2}$



(i) নং সমীকরণে $x = \frac{9}{2}$ বসিয়ে পাই, $y^2 = 6 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \therefore y = \pm\frac{9\sqrt{6}}{2}$
∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{9}{2}, \pm\frac{9\sqrt{6}}{2}\right)$ **(Ans.)**

01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

17. উদ্দীপক-১: $4x^2 + 6y^2 - 4x - 36y + 43 = 0$. **[MB'22]**

উদ্দীপক-২: একটি কনিকের উপকেন্দ্রদ্বয় $(10,5)$ ও $(8,3)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

(ক) $5x^2 + 4y^2 = 1$ কনিকের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ বর্ণিত সমীকরণকে প্রমিত আকারে প্রকাশ করে কনিকটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ এ বর্ণিত কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

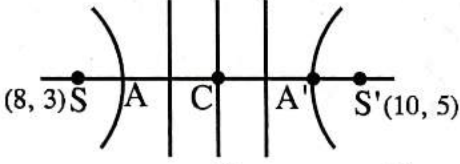
02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

উদ্দীপক ১ হতে পাই, $4x^2 + 6y^2 - 4x - 36y + 43 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - x) + 6(y^2 - 6y) + 43 = 0$
$\Rightarrow 4\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 6(y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 9 - 9) + 43 = 0$
$\Rightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 6(y-3)^2 - 54 + 43 = 0 \Rightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6(y-3)^2 = 12$
$\Rightarrow \frac{X^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ ... ... (i) [ধরি, $X = x - \frac{1}{2}, Y = y - 3$]
$\therefore a = \sqrt{3}$ এবং $b = \sqrt{2} \therefore a > b \therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
∴ নিয়ামকের সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm 3 \Rightarrow 2x - 1 = \pm 6$

$\left.\begin{array}{l}(+) \text{ নিয়ে}, 2x - 7 = 0 \\ (-) \text{ নিয়ে}, 2x + 5 = 0\end{array}\right\}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়, $S(8, 3)$ এবং $S'(10, 5)$

এখন, $SS' = 2ae \Rightarrow \sqrt{(10-8)^2 + (5-3)^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times a \Rightarrow a = 1$



আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 2 = 1 + \frac{b^2}{1} \therefore b = 1$

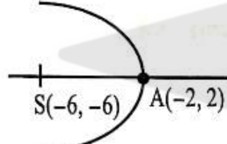
আমরা জানি, অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, $|SP - S'P| = 2b \Rightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = \pm 2$

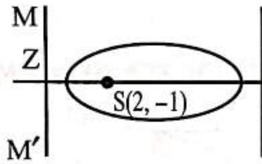
$\Rightarrow (x-8)^2 + (y+3)^2 = 4 + (x-10)^2 + (y-5)^2 \pm 4\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 64 + y^2 + 6y + 9 = 4 + x^2 - 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 \pm 4\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)}$

$\Rightarrow 4x + 16y - 56 = \pm 4\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}$

$\Rightarrow x + 4y - 14 = \pm\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = (x + 4y - 14)^2 \Rightarrow (x-10)^2 + (y-5)^2$ **(Ans.)**

18. দৃশ্যকল্প-১:  **[DB'19]**

দৃশ্যকল্প-২:  **MZM′ এর সমীকরণ $x - 2y + 2 = 0$**

(ক) $3x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ S উপকেন্দ্র এবং A শীর্ষবিন্দ y হলে, পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$, S উপকেন্দ্র এবং MZM′ নিয়ামক। 4

সমাধান

ক. 07 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

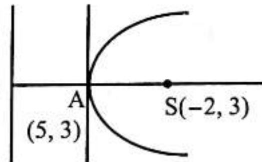
গ. $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, S এর স্থানাঙ্ক $(2, -1)$; নিয়ামক রেখার সমীকরণ $x - 2y + 2 = 0$ ……… (i)

ধরি, উপবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ; $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{x-2y+2}{\sqrt{1+4}}\right|^2$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5) = \frac{1}{5}(x^2 + 4y^2 + 4 - 4xy - 8y + 4x)$

$\Rightarrow 10(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5) = x^2 + 4y^2 + 4 - 4xy - 8y + 4x$

$\therefore 9x^2 + 6y^2 + 4xy - 44x + 28y + 46 = 0$

19. দৃশ্যকল্প-১:  **[RB'19]**

দৃশ্যকল্প-২: উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও তার নিকটতম নিয়ামকের দূরত্ব 14 সে.মি. ।

(ক) $16y^2 - 9x^2 = 144$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{4}$ হলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $16y^2 - 9x^2 = 144 \therefore \frac{y^2}{(3)^2} - \frac{x^2}{(4)^2} = 1 \therefore y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x$

খ. x-অক্ষের সমান্তরাল ∴ সমীকরণ, $(y-3)^2 = 4a(x-5)$; $x - 5 = a$ [উপকেন্দ্রের ক্ষেত্রে]

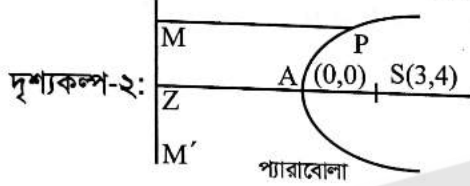
$\Rightarrow -2 - 5 = a$ [উপকেন্দ্র] $(-2,3)$]

$\therefore a = -7 \therefore$ সমীকরণ, $(y-3)^2 = -28(x-5)$

গ. 01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

20. দৃশ্যকল্প-১: $9y^2 - 16x^2 - 64x - 54y - 127 = 0$ **[Ctg.B'19]**

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে MZM′ এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. উপবৃত্তটি, $5x^2 + 4y^2 = 1$; $\left(\frac{x}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1/2}\right)^2 = 1$ এখানে, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Now, নিয়ামকরেখা, $y = \pm\frac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \Rightarrow 2y = \pm\sqrt{5}$

খ. এখানে, $e^2 = \frac{3^2+4^2}{4^2} \therefore e = \frac{5}{4}$; $9y^2 - 16x^2 - 64x - 54y - 127 = 0$

$\Rightarrow 9(y^2 - 6y + 9) - 16(x^2 + 4x + 4) = 144 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{4^2} - \frac{(x+2)^2}{3^2} = 1$

উপকেন্দ্রের ক্ষেত্রে, $Y = \pm be \Rightarrow y - 3 = \pm 4.\frac{5}{4} \therefore y = 8, -2 \therefore$ উপকেন্দ্র $(-2,-2)$ এবং $(-2,8)$ ∴ দূরত্ব $= 10$ unit

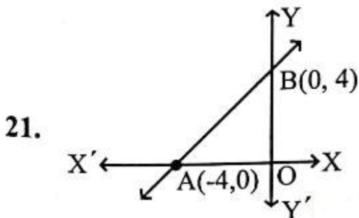
উপকেন্দ্রিক লম্বের $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2\times9}{4} = \frac{9}{2}$unit

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে, $\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x - 3y = 0$ ……..(i)

z এর স্থানাঙ্ক $(-3,-4)$; (i) এর উপর লম্ব $(-3,-4)$ বিন্দুগামী

$3x + 4y = -9 - 16 \Rightarrow 3x + 4y + 25 = 0$ যা MZM′ এর equation.

21. **[SB'19]**



(ক) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + 1 = 0$ কনিকের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) O-কে উপকেন্দ্র এবং AB- কে শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ধরে অঙ্কিত পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) O- কে কেন্দ্র এবং AB- কে নিয়ামক ধরে অঙ্কিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$। 4

সমাধান

ক. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+1=0 \Rightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1 \therefore \frac{y^2}{5^2}-\frac{x^2}{3^2}=1$ ∴ আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2\times5=10$ একক

অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2\times3=6$ একক

খ. AB এর সমীকরণ, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}=1 \therefore -x+y=4 \therefore x-y+4=0$ ……………(i)

∴ অক্ষের সমীকরণ, $x+y+k=0$ এটি $(0,0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। ∴ $x+y=0$ ……………(ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, শীর্ষবিন্দু y $(-2,2)$

ধরি, নিয়ামক ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দু (α,β) ; $\frac{\alpha+0}{2}=-2 \therefore \alpha=-4$; $\frac{\beta+0}{2}=2 \therefore \beta=4$

∴ নিয়ামকের সমীকরণ, $x-y+k=0 \Rightarrow -4-4+k=0 \therefore k=8 \quad \therefore x-y+8=0$

গ. AB এর সমীকরণ, $x-y+4=0$ [খ হতে]

অক্ষের সমীকরণ, $x+y=0$ ∴ অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু $(-2,2)$

এখন, (0,0) ও (−2,2), (α,β) বিন্দুতে $1:\sqrt{2}$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$\therefore \alpha=\frac{-2+0}{1+\sqrt{2}}=2-2\sqrt{2}$; $\beta=\frac{2+0}{1+\sqrt{2}}=-2+2\sqrt{2}$

আবার, (0,0) ও (−2,2), (γ,δ) বিন্দুতে $1:\sqrt{2}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়।

$\therefore \gamma=\frac{-2-0}{1-\sqrt{2}}=2+2\sqrt{2}$; $\delta=\frac{2-0}{1-\sqrt{2}}=-2-2\sqrt{2}$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয় $(2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}),(2+2\sqrt{2},-2-2\sqrt{2})$

22. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ [All.B'18]

দৃশ্যকল্প-২: $4x^2-5y^2-16x-10y-9=0$

(ক) $x^2=-12y$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ বের কর। 2

(খ) $x-y-5=0$ রেখাটি দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কনিকটিকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটি প্রমিত আকার প্রকাশ করে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $x^2=-12y \Rightarrow x^2=-4.3.y$; $a=3$ ∴ নিয়ামকের সমীকরণ: $y=3$ (**Ans.**)

খ. (x_1,y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ কনিকের স্পর্শকের সমীকরণ

$\frac{xx_1}{16}+\frac{yy_1}{9}=1 \Rightarrow \frac{xx_1}{16}+\frac{yy_1}{9}-1=0$ …. (i); আবার, $x-y-5=0$ ……..(ii)

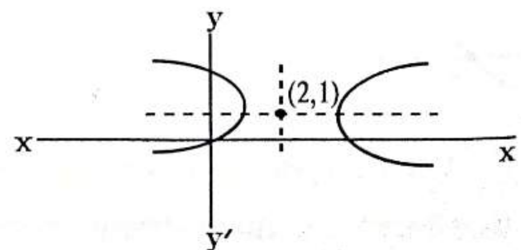
(i) ও (ii) একই সরলরেখা নির্দেশ করলে

$\frac{\frac{x_1}{16}}{1}=\frac{\frac{y_1}{9}}{-1}=\frac{-1}{-5} \Rightarrow x_1=\frac{16}{5}, y_1=\frac{-9}{5}$ ∴ নির্ণেয় বিন্দু $(x_1,y_1)=\left(\frac{16}{5},\frac{-9}{5}\right)$ (**Ans.**)

গ. $4x^2-5y^2-16x+10y-9=0 \Rightarrow 4(x^2-4x)-5(y^2-2y)-9=0$

$\Rightarrow 4(x^2-4x+4)-5(y^2-2y+1)=9+16-5$

$\Rightarrow 4(x-2)^2-5(y-1)^2=20 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$



$a=\sqrt{5},\ b=2$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times4}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$ একক (**Ans.**)

$e=\sqrt{1+\frac{4}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

∴ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2\pm3,1)\equiv(5,1)$ I $(-1,1)$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $x=5, x=-1$(**Ans.**)

23. $16x^2 + 25y^2 = 400$. [DB'17]

(ক) এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(0, 2\sqrt{2})$ ও $(-3, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। 2

(খ) উৎকেন্দ্রিকতাসহ উদ্দীপকের কনিকটির শীর্ষদ্বয়ের স্থানাংক, ফোকাস ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) চিত্র অংকনপূর্বক উদ্দীপকের কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয় ও নিয়ামকদ্বয় এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ……… (i)

$\Rightarrow (0, 2\sqrt{2})$ বিন্দুগামী $\therefore 0 + \frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 8$

আবার, (i) নং উপবৃত্তটি $(-3, 0)$ বিন্দুগামী $\therefore \frac{9}{a^2} + 0 = 1 \Rightarrow a^2 = 9$

(i) নং সমীকরণে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{8x^2 + 9y^2}{72} = 1 \Rightarrow 8x^2 + 9y^2 = 72$ যা নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ।

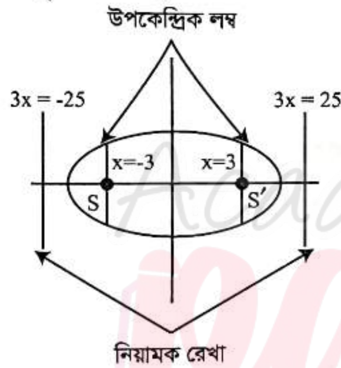
খ. দেওয়া আছে, $16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ……… (i)

$\Rightarrow a^2 = 25, b^2 = 16 \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow a > b$ সুতরাং উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \Rightarrow \sqrt{\frac{25-16}{25}} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \frac{3}{5}$

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$; ফোকাসদ্বয়ের স্থানঙ্ক $= (\pm ae, 0) = \left(\pm 5.\frac{3}{5}, 0\right) = (\pm 3, 0)$

এবং, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.4^2}{5} = \frac{32}{5}$

গ. উপবৃত্তটির চিত্র,

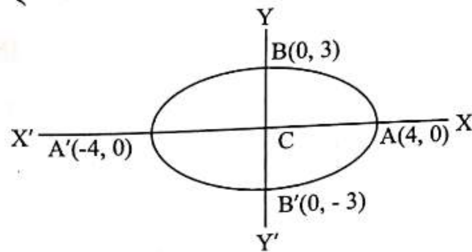


উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বদ্বয়ের সমীকরণ $x = \pm ae = \pm 5\left(\frac{3}{5}\right) \quad \therefore x = \pm 3$

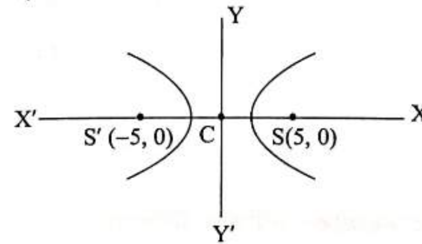
নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{5}{\frac{3}{5}} \quad \therefore 3x = \pm 25$

24. [RB'17]

দৃশ্যকল্প ১:



দৃশ্যকল্প ২:



(ক) $y^2 + 6y - 4x = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লেখিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

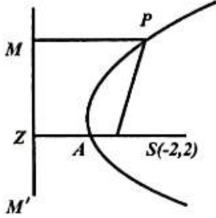
সমাধান

ক. প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2+6y-4x=0 \Rightarrow y^2+2.3.y+3^2-4x=9 \Rightarrow (y+3)^2=4x+9$

$\therefore (y+3)^2 = 4.1\left(x+\frac{9}{4}\right)$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=|4a|=|4\times 1|=4$

খ. 01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 15 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

25. 

[Ctg.B'17]

চিত্রটি একটি কনিক নির্দেশ করে যার নিয়ামক রেখা **MZM′**

(ক) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) $A(1,-2)$ হলে MZM' এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $SP : PM = 1 : 2$ এবং MZM' রেখার সমীকরণ $3x+4y=1$ হলে কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 20 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. দেওয়া আছে, $SP:PM=1:2 \Rightarrow \frac{SP}{PM}=\frac{1}{2} \Rightarrow PM=2SP$ ……………… (i)

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, (x,y); আবার, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $S(-2,2)$ এবং MZM' রেখার সমীকরণ $3x+4y=1$

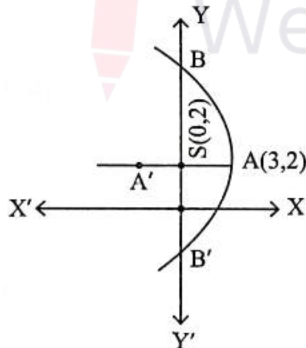
(i) থেকে পাই, $\left|\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 2.\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \left|\frac{3x+4y-1}{5}\right| = 2\sqrt{x^2+4x+4+y^2-4y+4}$

$\Rightarrow (3x+4y-1)^2 = \left(10\sqrt{x^2+y^2+4x-4y+8}\right)^2$

$\Rightarrow 9x^2+16y^2+1+24xy-6x-8y = 100(x^2+y^2+4x-4y+8)$

$\Rightarrow 100x^2+100y^2+400x-400y+800-9x^2-16y^2-24xy+6x+8y-1=0$

$\therefore 91x^2+84y^2-24xy+406x-392y+799=0$ যা নির্ণেয় কনিকের সমীকরণ|

26. 

[SB'17]

(ক) $9x^2-4y^2=36$ কনিকের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) A কে শীর্ষবিন্দু এবং S কে উপকেন্দ্র ধরে অংকিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকে $OB'=4$ এবং $AS=A'S$ হলে BB'কে বৃহৎ অক্ষ এবং কে AA' ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে অংকিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত কনিক: $9x^2 - 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ .... (i)

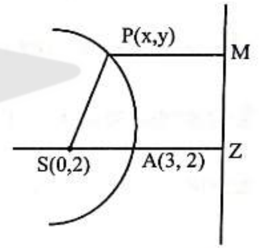
(i) নং এর সমীকরণকে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = 3$

(i) নং এর নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$ .... (ii)

উপকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2^2+3^2}{2^2}} = \sqrt{\frac{4+9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

(ii) হতে, $x = \pm\frac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$ $\therefore \sqrt{13}x = \pm 4$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

খ. দেওয়া আছে, উপকেন্দ্র S(0,2) এবং শীর্ষবিন্দুA(3,2) ধরি, পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু P(x, y) ও নিয়ামক রেখা MZ আমরা জানি, Z ও S এর মধ্যবিন্দু। ধরি, Z এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)



$\therefore \frac{x_1+0}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 6 \therefore Z(6,2) \Rightarrow \frac{y_1+2}{2} = 2 \Rightarrow y + 2 = 4 \Rightarrow y_1 = 2$

পরাবৃত্তের অক্ষরেখার ঢাল, $m_1 = \frac{2-2}{3-0} = 0$

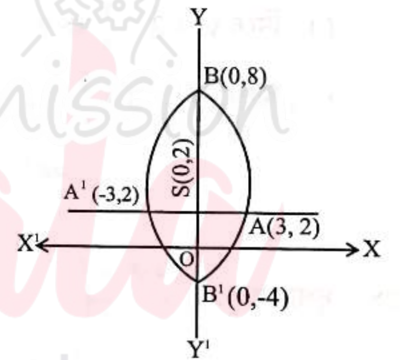
$\therefore$ নিয়ামক রেখারঢাল, $m_2 = \frac{-1}{0}$ $[\because m_1 \times m_2 = -1]$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $y - 2 = \frac{-1}{0}(x - 6) \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x - 6 = 0$

এখন, $SP = PM \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = x^2 - 12x + 36$

$\Rightarrow (y-2)^2 = -12(x-3)$, ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ।

গ. যেহেতু, $OB' = 4$ একক, সেহেতু $SB = 2 + 4 = 6$ একক $\therefore SB = 6$ একক অর্থাৎ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক(0,8)



আবার $AS = A'S$ অর্থাৎ S, AA' এর মধ্যবিন্দু $\therefore$ A' বিন্দুর স্থানাঙ্ক(−3,2)

BB কে বৃহৎ অক্ষ এবং AA' কে ক্ষুদ্র অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^3}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{6^2} = 1$

যেখানে, $a = 3, b = 6 (a < b)$ $\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{36-9}{36}} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$

$\therefore$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $y - 2 = \pm be \Rightarrow y - 2 = \pm 6 \times \frac{3\sqrt{3}}{6}$

$\therefore y - 2 = \pm 3\sqrt{3}$.

27. দৃশ্যকল্প-১: কনিকের উপকেন্দ্র **S(5, 2)**, এবং শীর্ষবিন্দু **A(3, 4)**. **[BB'17]**

দৃশ্যকল্প-২: $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$ একটি সমীকরণ।

(ক) $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ কনিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে সনাক্ত কর। **2**

(খ) $e = 1$ হলে দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত কনিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির উপকেন্দ্র এবং নিয়ামকের সমীকরণ বের কর। **4**

সমাধান

ক. $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 9y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1 \therefore \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$ ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

খ. **01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।**

গ. প্রদত্ত সমীকরণ, $6x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 43 = 0$

$\Rightarrow 6(x^2 - 6x) + 4(y^2 - y) = -43$

$\Rightarrow 6(x^2 - 2.3.x + 9) + 4\left(y^2 - 2.\frac{1}{2}.y + \frac{1}{4}\right)$

$= -43 + 54 + 1 \Rightarrow 6(x-3)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{3} = 1 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ ইহা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ

এখানে, $a = \sqrt{2}$ এবং $b = \sqrt{3} \therefore b > a$

উপকেন্দ্রিকতা, $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ধরি, $x - 3 = X$ এবং $y - \frac{1}{2} = Y$

উপকেন্দ্রের জন্য $X = 0, Y = \pm be \quad \therefore x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

আবার, $y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \pm 1 \quad \therefore y = \frac{3}{2}$ বা, $-\frac{1}{2}$

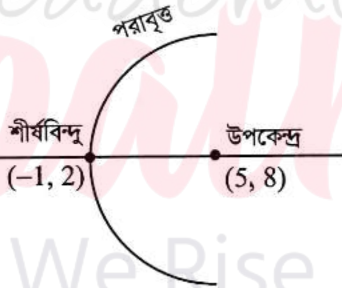
$\therefore$ উপকেন্দ্র দ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(3, -\frac{1}{2}\right)$

নিয়ামকের সমীকরণ, $y - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \pm 3 \quad \therefore y = \pm 3 + \frac{1}{2}$

(+) নিয়ে $y = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2} \therefore 2y - 7 = 0$

(−) নিয়ে $y = -3 + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{-5}{2} \quad \therefore 2y + 5 = 0$

28. দৃশ্যকল্প-১: [JB'17]



দৃশ্যকল্প-২: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি $(6, 1)$ ও $(10, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3.

(ক) $3x^2 + 5y^2 = 1$ এর উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 07 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. ধরি, অধিবৃত্তটির ফোকাসদ্বয় S(6,1) ও S(10,1)

আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a$, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$

এবং উপকেন্দ্রিকতা $= e$ তাহলে ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae$

এখন, ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব $SS' = \sqrt{(6-10)^2+(1-1)^2} \Rightarrow \sqrt{(-4)^2} = 4$

$\therefore 2ae = 4$ বা $ae = 2$ বা $a \times 3 = 2$ $[\because e = 3] \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{9}$

আমরা জানি, $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = a^2e^2 - a^2 = \frac{4}{9} \times 3^2 - \frac{4}{9} = \frac{36-4}{9} \Rightarrow \frac{32}{9}$

আবার ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবিন্দুটি অধিবৃত্তের কেন্দ্র (x,y)

সুতরাং অধিবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{6+10}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (8,1)$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-8)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{32}{9}} = 1$

29. **S এর স্থানাঙ্ক $(7,3)$ এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1,3)$** **[CB'17]**

(ক) **$y^2 = 32x$ পরাবৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব 10; বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** **2**

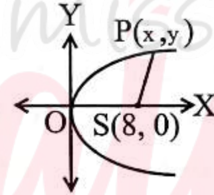
(খ) **উদ্দীপকের S ও A বিন্দুকে যথাক্রমে উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু ধরে একটি কনিকের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা = 1।** **4**

(গ) **উদ্দীপকের SA রেখাংশকে বৃহদাক্ষ ধরে কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$।** **4**

সমাধান

ক. প্রদত্ত পরাবৃত্ত, $y^2 = 32x = 4.8.x \therefore$ উপকেন্দ্র $= S(8,0)$

ধরি, পরাবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু $P(x,y)$



প্রশ্নমতে, $PS = 10 \Rightarrow PS^2 = 100$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (x-8)^2 + y^2 = 100$ $[\because y^2 = 32x] \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 100$

$\Rightarrow (x+8)^2 = 100 \Rightarrow x + 8 = \pm 10 \Rightarrow x = \pm 10 - 8 \therefore x = -18$ or 2

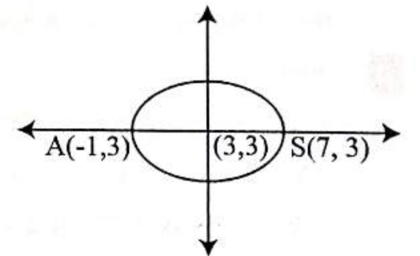
কিন্তু $x = -18$ গ্রহণযোগ্য নয়। অতএব $x = 2 \quad \therefore y = \pm 8$

এখন, $y^2 = 32x = 32 \times 2 = 64 \therefore y = \pm 8 \therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \pm 8)$

খ. **01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।**

গ. এখানে, বৃহদাক্ষ $= SA = 2a = \sqrt{(7+1)^2 + (3-3)^2} \Rightarrow \sqrt{8}^2 = 8 \therefore a = 4$

দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ তাহলে, $e^2 = \frac{3}{4}$ [বর্গ করে]



$\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{16-b^2}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow 64 - 4b^2 = 48 \Rightarrow 4b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 4 \therefore b = 2$

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{7-1}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (3,3)$; উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2-6x+9}{16} + \frac{y^2-6y+9}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2-6x+9+4y^2-24y+36}{16} = 1$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 45 = 16 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 45 - 16 = 0$

$\therefore x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 29 = 0$, যা নির্ণেয় কনিকটির সমীকরণ।

◆ **CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান**

01. $y^2 = 4ax$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

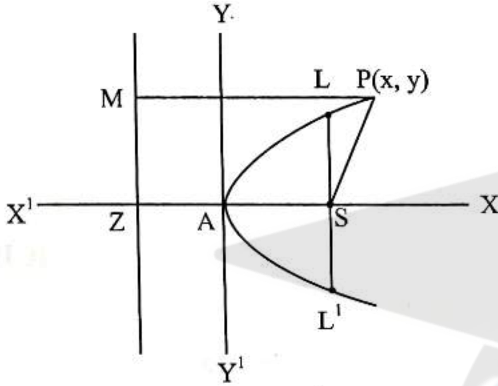
(ক) একটি সরল চিত্রের সাহায্যে পরাবৃত্ত উপস্থাপন কর। 2

(খ) $ln = am^2$ হয় তবে দেখাও যে, $lx + my + n = 0$ রেখা পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করে। 4

(গ) $a = 4$ এবং কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 হলে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

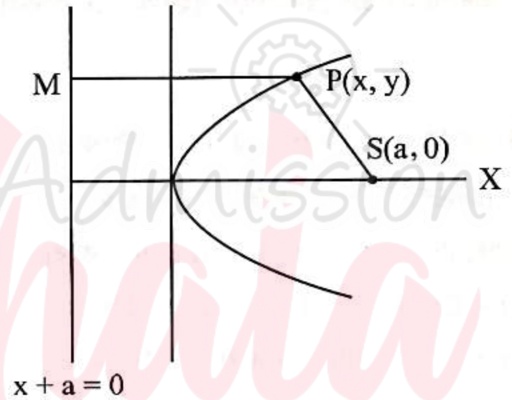
সমাধান

ক.



S = উপকেন্দ্র; A = শীর্ষবিন্দু; MZ = নিয়ামক রেখা; LL′ = উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য

খ. $P(x,y)$ = পরাবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু



দেওয়া আছে, $lx + my + n = 0 \Rightarrow my = -(lx + n)$

$\therefore y = -\frac{lx+n}{m}$ ……… (i) এবং $y^2 = 4ax$ ……… (ii)

(i) ও (ii) হতে প্রাপ্ত y এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{(lx+n)^2}{m^2} = 4ax$

$\Rightarrow l^2x^2 + 2lnx + n^2 = 4am^2x$

$\Rightarrow l^2x^2 + 2(ln - 2am^2)x + n^2 = 0$ …… (iii)

যা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ ∴ x এর দুটি মান পাওয়া যাবে।

∴ (i) নং রেখাটি প্রদত্ত পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক

∴ (iii) এ x এর মান দুটি পরস্পর সমান হবে।

∴ (iii) নং এর নিশ্চায়ক শূন্য হবে

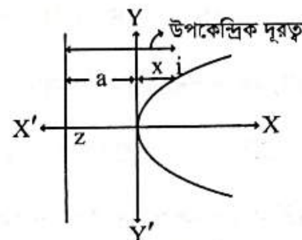
সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $D = 4(ln - 2am^2)^2 - 4l^2n^2$

$= 4(am^2 - 2am^2)^2 - 4(am^2)^2$ $[ln = am^2]$

$= 4(-am^2)^2 - 4(am^2)^2 = 4(am^2)^2 - 4(am^2)^2 = 0$

অর্থাৎ প্রদত্ত রেখাটি পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করবে।

গ. দেওয়া আছে, $a = 4$



আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, $= a + x$

দেয়া আছে, $y^2 = 16x$ ……… (i) $\Rightarrow y^2 = 4.4.x$

একে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$

প্রশ্নমতে, $6 = 4 + x \Rightarrow x = 2$

$\therefore y^2 = 4.4.2$ $\therefore y^2 = \pm 4\sqrt{2}$

∴ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(2, \pm 4\sqrt{2})$ **(Ans.)**

02. $Px^2 + 25y^2 = 25P$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ এবং ইহা $(4, 6)$ বিন্দুগামী।

(ক) $y = mx + c, y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত লেখ। 2

(খ) উপবৃত্তটি $(4, 6)$ বিন্দুগামী হলে এর অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) $P = 16$ হলে প্রমাণ কর যে, একটি উপকেন্দ্র এবং অনুরূপ নিয়ামক রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{16}{3}$। 4

সমাধান

ক. $C = \frac{a}{m}$; $y = mx + \frac{a}{m}$ হতে হবে।

খ. দেওয়া আছে, $Px^2 + 25y^2 = 25P$; যেহেতু (i) নং উপবৃত্তটি $(4, 6)$ বিন্দুগামী

$P.4^2 + 25.6^2 = 25P \Rightarrow 16P - 25P = -25 \times 36 \Rightarrow -9P = -25 \times 36 \Rightarrow P = \frac{25\times36}{9} = 100$

(i) এ $P = 100$ বসিয়ে $\Rightarrow 100x^2 + 25y^2 = 25 \times 100 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$

ইহা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকৃতিতে প্রকাশিত। $\therefore a = 5, b = 10 \therefore a < b$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times 10 = 20$ $\therefore$ ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 5 = 10$ **(Ans.)**

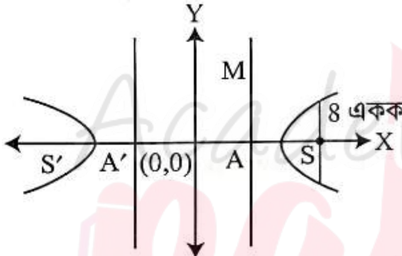
গ. $Px^2 + 25y^2 = 25P \Rightarrow \frac{Px^2}{25P} + \frac{25\ ^2}{25P} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{P} = 1$; যখন, $P = 16$; $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = 5, b = 4 \therefore a > b$

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

উপকেন্দ্র ও নিয়ামক রেখার দূরত্ব $= \frac{a}{e} - ae = \frac{5}{\left(\frac{3}{5}\right)} - 5 \times \frac{3}{5} = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}$ একক **(Proved)**

03. একটি অধিবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে অবস্থিত।



(ক) কোন অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে **8** এবং **10** একক হলে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আড় অক্ষ **X** অক্ষ বরাবর এবং উৎকেন্দ্রিকতা **3** হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের আড় অক্ষ **Y** অক্ষ বরাবর এবং যা $(2, 3)$ ও $(1, -2)$ বিন্দুগামী হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, আড় অক্ষ, $2a = 8, \therefore a = 4$; অনুবন্ধী অক্ষ, $2b = 10 \therefore b = 5 \therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a} = 8 \Rightarrow 2b^2 = 8a \Rightarrow b^2 = 4a$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 3 \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} = 9 \Rightarrow b^2 = 8a^2 \Rightarrow 4a = 8a^2 \Rightarrow (2a^2 - a) = 0 \Rightarrow a(2a - 1) = 0$ $[\because a \neq 0]$

$\therefore 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $\therefore b^2 = 4.\frac{1}{2} = 2$ $\therefore b = \sqrt{2}$ $\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{y^2}{2} = 1 \therefore 8x^2 - y^2 = 2$ **(Ans.)**

গ. মনে করি অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

ইহা $(2, 3)$ ও $(1, -2)$ বিন্দুগামী $\therefore \frac{3^2}{b^2} - \frac{2^2}{a^2} = 1 \cdots\cdots$ (i) এবং $\frac{(-2)^2}{b^2} - \frac{1^2}{a^2} = 1 \cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) নং সমাধান করে পাই, $\frac{1}{b^2} = \frac{3}{7}$; $\frac{1}{a^2} = \frac{5}{7}$ $\therefore$ সমীকরণ, $y^2 \times \frac{3}{7} - x^2 \times \frac{5}{7} = 1 \Rightarrow 3y^2 - 5x^2 = 7$ **(Ans.)**

04. $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ একটি কনিকের সমীকরণ।

(ক) উৎকেন্দ্রিকতা $e=2\pi+3$ হলে π এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে কনিকটি উপবৃত্ত হবে। 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত কনিকটি $(6,4)$ বিন্দুগামী উপবৃত্ত হলে উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। 4

(গ) একটি অধিবৃত্তের অণুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $(0,\pm13)$ হলে দেখাও যে, $p^2=-144$। 4

সমাধান

ক. কনিকটি উপবৃত্ত হবে যদি $0<e<1$ হয়।

$\therefore 0<e<1 \Rightarrow 0<2\pi+3<1 \Rightarrow 0-3<2\pi+3-3<1-3 \Rightarrow -3<2\pi<-2 \therefore \frac{-3}{2}<\pi<-1$

খ. $\frac{x^2}{P}+\frac{y^2}{5^2}=1$ উপবৃত্তটি (6,4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$\therefore \frac{6^2}{P}+\frac{4^2}{5^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{P}+\frac{16}{24}=1 \Rightarrow \frac{36}{P}=-\frac{16}{25} \Rightarrow P=\frac{36\times25}{9} \therefore P=100$

সমীকরণটি দাঁড়ায়, $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$; এখানে, $a=10$ এবং $b=5$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{25}{100}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক, $(\pm ae,0)\equiv\left(\pm10\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\equiv(\pm5\sqrt{3},0)$ **(Ans.)**

গ. মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \cdots\cdots\cdots$ (i)

$\therefore$ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a=24 \quad \therefore a=\frac{24}{2}=12$

এখানে, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক (0,13) এবং (0, −13)

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\sqrt{(0-0)^2+(13+13)^2}=\sqrt{(26)^2}=26 \therefore 2be=26 \therefore e=\frac{13}{b}$

আমরা পাই, $e^2=1+\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \left(\frac{13}{b}\right)^2=1+\left(\frac{12}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{13^2}{b^2}-\frac{12^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=169-144 \Rightarrow b^2=25 \therefore b=5$

a ও b এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $\frac{y^2}{5^2}-\frac{x^2}{(12)^2}=1 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$\therefore \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1 \Rightarrow -\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$

উদ্দীপকের প্রদত্ত সমীকরণ $\frac{x^2}{P^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$; সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $P^2=-144$ **(Showed)**

05. $4x^2+Py^2=80 \cdots\cdots\cdots$ (i)

$5x^2-4y^2=20 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

(ক) উৎকেন্দ্রিকতা e এর মানের উপর কনিকের আকৃতি নির্ভর করে। ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) (i) উপবৃত্তটি $(0,\pm4)$ বিন্দুগামী হলে P নির্ণয় করে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 4

(গ) (ii) এর উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় করে দেখাও যে, কনিকটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। 4

সমাধান

ক. e এর বিভিন্ন মানের উপর উত্তর ভিত্তি করে কনিকের আকৃতি ভিন্ন হয়। যেমন $e=0$ হলে বৃত্ত $e=1$ হলে পরাবৃত্ত $0<e<1$ হলে উপবৃত্ত এবং $e>1$ হলে অধিবৃত্ত হয়।

খ. $4x^2+Py^2=80$ উপবৃত্তটি $(0,\pm4)$ বিন্দুগামী $\therefore 4\times0^2+P\times(\pm4)^2=80 \Rightarrow 0+16P=80 \Rightarrow 16P=80$

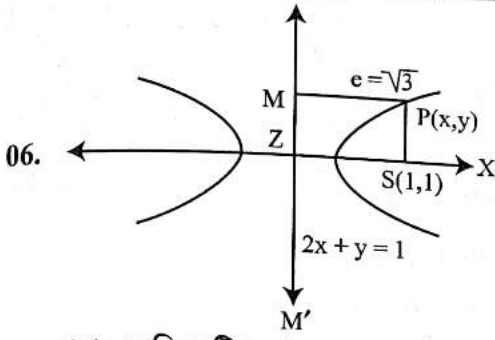
$\therefore P=5 \therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ $4x^2+5y^2=80 \Rightarrow \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{20-16}{20}} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{20}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

গ. $5x^2-4y^2=20 \Rightarrow \frac{5x^2}{20}-\frac{4y^2}{20}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{2^2+(\sqrt{5})^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{4+5}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

যেহেতু $e>1 \therefore$ উক্ত কনিকটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে (দেখানো হলো)

06. 

(ক) অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ অনুবন্ধী অক্ষের কতগুণ? 2
(খ) Z বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। 4
(গ) অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. মনে করি, আড় অক্ষ 2a এবং অনুবন্ধী অক্ষ 2b

আমরা জানি, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ [$\therefore e = \sqrt{3}$]

$\Rightarrow 3 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (2a) = (2b)\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ আড় অক্ষ অনুবন্ধী অক্ষের $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গুণ।

খ. মনে করি, $2x + y - 1 = 0$ রেখার উপর লম্বের সমীকরণ, $x - 2y + k = 0$ ……………… (i)

যেহেতু (i) রেখাটি S(1,1) বিন্দুগামী $\therefore 1 - 2.1 + k = 0 \Rightarrow k = 1$

(i) এ $k = 1$ বসিয়ে, $x - 2y + 1 = 0$

এখানে, $2x + y - 1 = 0$ এবং $x - 2y + 1 = 0$

বজ্রগুণনের সাহায্যে, $\frac{x}{1-2} = \frac{y}{-1-2} = \frac{1}{-4-1} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{1}{-5} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{Y}{3} = \frac{1}{5}$

$\therefore x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}$ $\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, P(x, y), S(1,1) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $2x + y = 1$

$SP = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$

P(x, y) বিন্দু হতে $2x + y = 1 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব দূরত্ব PM হলে, $PM = \frac{2x+y-1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2x+y-}{\sqrt{5}}$

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, $SP = e.PM$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2} = \sqrt{3}.\frac{2x+y-}{\sqrt{5}} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = \frac{3}{5}(2x + y - 1)^2$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 10 = 3(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y)$

$\Rightarrow 12x^2 + 3y^2 + 3 + 12xy - 12x - 6y = 5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 10$

$\therefore 7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$ **(Ans.)**

07. একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (2, 5) এবং $x = 4$ রেখাটি পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুতে অক্ষের উপর লম্ব।

(ক) $7x^2 + 16y^2 = 112$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপকের পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $7x^2 + 16y^2 = 112 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$; $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{7} = 1$ $\therefore \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$; $a = 4, b = \sqrt{7}$ $\therefore a > b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{16-}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(\pm ae, 0) \equiv \left(\pm 4 \times \frac{3}{4}, 0\right) \equiv (\pm 3, 0)$ **(Ans.)**

খ. বোর্ড প্রশ্ন 01 (গ) এর অনুরূপ।

গ. পরাবৃত্তটির সমীকরণ, $y^2 - 10y + 8x - 7 = 0 \Rightarrow y^2 - 2.y.5 + 5^2 - 25 + 8x - 7 = 0$

$\Rightarrow (y-5)^2 = 32 - 8x \;\; \Rightarrow (y-5)^2 = -4.2(x-4)$

সমীকরণটিকে, $y^2 = -4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই $Y = y - 5$; $X = x - 4$ এবং $a = 2$

শীর্ষবিন্দুর ক্ষেত্রে $X = 0, Y = 0; x - 4 = 0; y - 5 = 0 \therefore x = 4; y = 5 \therefore$ শীর্ষবিন্দু $(4,5)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |-8| = 8$; অক্ষরেখার সমীকরণ, $Y = 0 \;\therefore y - 5 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $X = -a \;\; \Rightarrow x - 4 = -2 \Rightarrow x - 2 = 0$ **(Ans.)**

08. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ $(y-4)^2 = 5(x-2)$ যার অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল।

(ক) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-6,-3)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-2,1)$ বিন্দুতে অবস্থিত। 2

(খ) উদ্দীপকের সমীকরণ হতে শীর্ষবিন্দু উপকেন্দ্র অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের পরাবৃত্তের উপস্থিত কোন বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব $\frac{25}{4}$ । উক্ত বিন্দুর স্থানাংক, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ ও লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $S(-6,-3)$ উপকেন্দ্র এবং $A(-2,1)$

শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ, $\frac{x+6}{-6+2} = \frac{y+3}{-3-1} \;\; \therefore x - y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

ধরি, Z বিন্দুর স্থানাংক $(\alpha, \beta) \therefore -2 = \frac{\alpha-6}{2} \;\; \therefore \alpha = 2$ এবং $1 = \frac{\beta-3}{2} \therefore \beta = 5 \;\therefore Z(2,5)$

$\therefore$ লম্বরেখার সমীকরণ, $x + y + k = 0 \cdots\cdots\cdots (ii)$

(ii) নং সমীকরণ $Z(2,5)$ বিন্দু দিয়ে যায় $\therefore 2 + 5 + k = 0 \therefore k = -7$

k এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাই। $x + y - 7 = 0$ **(Ans.)**

খ. উদ্দীপক হতে পাই, $(y-4)^2 = 5(x-2) \Rightarrow Y^2 = 5X$ [Let, $y - 4 = Y, x - 2 = X$]

$\Rightarrow Y^2 = 4.\frac{5}{4}.X$

এখানে, $a = \frac{5}{4}$; শীর্ষবিন্দু $(0,0)$; অর্থাৎ, $X = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ এবং $Y = 0 \Rightarrow y - 4 = 0 \;\therefore y = 4$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(2,4)$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(a,0)$

অর্থাৎ $X = a \Rightarrow x - 2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{4} + 2 \;\therefore x = \frac{13}{4}$

এবং $Y = 0 \Rightarrow y - 4 = 0 \;\therefore y - 4 = 0 \;\therefore y = 4 \therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{13}{4}, 4\right)$

অক্ষরেখার সমীকরণ $Y = 0 \Rightarrow y - 4 = 0 \;\therefore y = 4$; দিকাক্ষের সমীকরণ $X = -a$

$\Rightarrow x - 2 = -\frac{5}{4} \Rightarrow x = 2 - \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \;\therefore 4x - 3 = 0$ **(Ans.)**

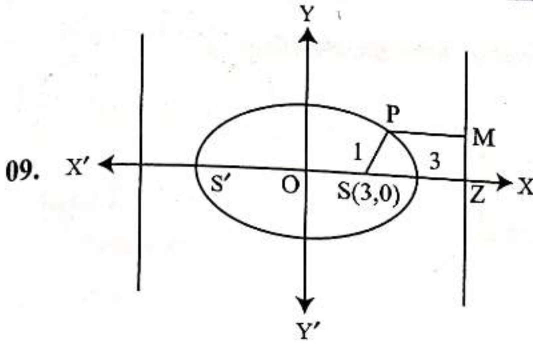
গ. $(y-4)^2 = 5(x-2) \cdots\cdots\cdots (i)$

$\Rightarrow Y^2 = 5X$ [Let; $y - 4 = Y, x - 2 = X$] $\therefore a = \frac{5}{4}$ $\therefore$ ফোকাস দূরত্ব $= a + X \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{5}{4} + x - 2 \;\therefore x = 7$

(i) নং এ $x = 7$ বসিয়ে পাই, $(y-4)^2 = 5(7-2)$

$\Rightarrow (y-4)^2 = 25 \Rightarrow Y - 4 = \pm 5 \;\therefore y = 9, -1 \therefore$ বিন্দুটির স্থানাংক $(7,-1)$ ও $(7,9)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $X = a \;\therefore x - 2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{13}{4} \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য$= 4a = 4 \times \frac{5}{4} \; = 5$ **(Ans.)**

09. 

(ক) $y^2 = 4(x-2)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের উপবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) SS' আড় অক্ষ এবং 9 উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $y^2 = 4(x-2) \Rightarrow y^2 = 4.1(x-2)$

$\therefore$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক $x-2=a \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(3,0)$ **(Ans.)**

খ. উদ্দীপক হতে পাই, উপকেন্দ্রটির বৃহৎ অক্ষ x অক্ষে অবস্থিত এবং উপকেন্দ্র $S(3,0)$ এবং কেন্দ্র $O(0,0)$

$\therefore$ অপর উপকেন্দ্র $S'(-3,0)$

এখন, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{SP}{PM} = \frac{1}{3}$ $\therefore$ উপকেন্দ্র দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

প্রশ্নমতে, $2ae = \sqrt{\{3-(-3)^2\} + (0-0)^2} \Rightarrow 2ae = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow ae = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{e} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{9}{\frac{1}{3}}$ $[\because a = 9]$ $\therefore x = \pm 27$ **(Ans.)**

গ. SS' আড় অক্ষ হলে অধিবৃত্তটির শীর্ষদ্বয় হবে $S(-3,0)$ এবং $S'(3,0)$ এবং কেন্দ্র $(0,0)$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ যার আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 3+3 = 6 \Rightarrow a = 3$

আবার, $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = a^2(e^2-1) = (3)^2(9^2-1) = 9 \times 80 = 720$

$\therefore$ অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{(3)^2} - \frac{y^2}{720} = 1$ $\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{720} = 1$ **(Ans.)**

10. (i) একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটি $(10,5), (8,3)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

(ii) একটি উপবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ $2x + y = 3$

(ক) $y^2 = 12Px$ পরাবৃত্তটি $(2,-1)$ বিন্দুগামী হলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প (i) এর অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উপকেন্দ্র $(3,2)$ উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{8}}$ এবং (ii) এ বর্ণিত নিয়ামক বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $y^2 = 12Px \cdots\cdots\cdots (i)$

পরাবৃত্তটি $(2,-1)$ বিন্দুগামী $\therefore (-1)^2 = 12P(2) \Rightarrow 1 = 24P$ $\therefore P = \frac{1}{24}$

(i) এ $P = \frac{1}{24}$ বসিয়ে পাই, $y^2 = 12 \times \frac{1}{24}x = \frac{x}{2} \Rightarrow y^2 = 4.\frac{1}{8}.x$ $\therefore a = \frac{1}{8}$

$\therefore$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 4.\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. $2ae = \sqrt{(10-8)^2+(5-3)^2}$

$\Rightarrow 2ae = \sqrt{4+4} \Rightarrow 2ae = \sqrt{8} \Rightarrow 2a \times \sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$ $[\because e = \sqrt{2}]$

$\Rightarrow 2a = 2 \therefore a = 1 \therefore e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{1+b^2} \Rightarrow b^2 = 1 \therefore b = 1$

অধিবৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{10+8}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (9,4) \therefore$ অসীমতটের সমীরকণ, $(y-4) = \pm\frac{1}{1}(x-9) \Rightarrow y-4 = \pm(x-9)$ **(Ans.)**

গ. উপকেন্দ্র $(3,2)$, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{\sqrt{8}}$ এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $2x+y=3$

মনে করি, $P(x,y)$ উপবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু।

আমরা জানি, $SP = e.PM \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \frac{1}{\sqrt{8}}.\frac{|2x+y-\ |}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2 = \frac{1}{8}.\frac{(2x+y-\ )^2}{5} \Rightarrow 40(x^2+y^2-6x-4y+13) = (2x+y-3)^2$

$\Rightarrow 36x^2+39y^2-228x-154y-4xy+511 = 0$ **(Ans.)**

11. $9(x-2)^2+25(y-3)^2 = 225$ **উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাংক বরাবর অবস্থিত।**

(ক) $(4,5)$ **বিন্দুতে** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ **উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু নির্ণয় কর।** 2

(খ) **যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি উদ্দীপকের উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূলবিন্দু সেই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** 4

(গ) **উদ্দীপকের উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ দিকাক্ষের সমীকরণ, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের দূরত্ব নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

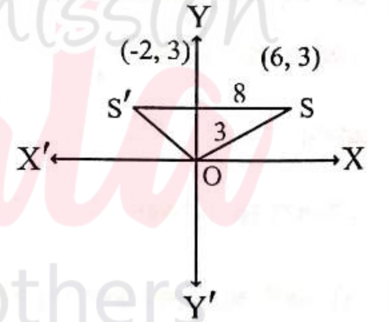
ক. $(4,5)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$; উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x.4}{9}+\frac{y.5}{4} = 1 \Rightarrow \frac{4x}{9}+\frac{5y}{4} = 1$

$\therefore$ ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b$; এখানে $b = 2 \therefore$ ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্তবিন্দু $(0, \pm 2)$ **(Ans.)**

খ. উদ্দীপক থেকে পাই, $9(x-2)^2+25(y-3)^2 = 225$

$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{225}+\frac{25(y-3)^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{3^2} = 1$

$\therefore e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{9}{25}} \Rightarrow \sqrt{\frac{25-9}{25}} \Rightarrow \frac{4}{5}$



অর্থাৎ, $X = \pm ae \Rightarrow x-2 = \pm 5.\frac{4}{5} \Rightarrow x = 2 \pm 4 \therefore x = 6, -2$

এখন, $Y = 0 \Rightarrow y-3 = 0 \therefore y = 3$; উপকেন্দ্রদ্বয় $(6,3), (-2,3)$

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(6,3), (-2,3), (0,0)$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{6(3-0)+2(3-0)+0\} = \frac{1}{2}(18+6) = 12$ বর্গ একক

গ. উদ্দীপক থেকে পাই, $9(x-2)^2+25(y-3)^2 = 225 \Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{225}+\frac{25(y-3)^2}{225} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{3^2} = 1$ [Let, $x-2 = X, y-3 = Y$]

এখানে, $a = 5, b = 3$; ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ, $X = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \therefore x = 2$

$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$; দিকাক্ষের সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x-2 = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} \Rightarrow x-2 = \pm\frac{25}{4}$

$\Rightarrow 4x-8 = \pm 25 \Rightarrow 4x = 8 \pm 25 \Rightarrow 4x = 33$ [+ চিহ্ন নিয়ে]

$\therefore x = \frac{33}{4}$ এবং $4x = 8-25$ [– চিহ্ন নিয়ে]

$\therefore x = -\frac{17}{4}$; উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 9}{5} = \frac{18}{5}$

উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{a}{e} - ae \Rightarrow \frac{5}{\frac{4}{5}} - 5.\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

অধ্যায় ০৭ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3	1	1	1	2	1	1	1	3
রাজশাহী	1	1	1	6	2	2	2	6	1	1	1	1					1	1	1	3
চট্টগ্রাম	1	1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	2					1	1	1	2
সিলেট	1	1	1	5	2	2	2	7				3					1	1	1	3
বরিশাল	1	1	1	7	2	2	2	6	1	1	1	1		সকল বোর্ড			1	1	1	3
যশোর	1	1	1	4	2	2	2	6	1	1	1	2					1	1	1	2
কুমিল্লা	1	1	1	3	2	2	2	7	1	1	1	2					1	1	1	3
দিনাজপুর	1	1	1	4	2	2	2	8	1	1	1	3					1	1	1	3
ময়মনসিংহ	1	1	1	4	2	2	2	5												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ মুখ্যমান: একটি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত ফাংশনের মুখ্যমান হল সেই মান (ধনাত্মক/ঋণাত্মক) যার সাংখ্যিক মান সব সাংখ্যিক মানের মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

যদি কোন বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম মানটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হয় যাদের সাংখ্যমান সমান সেক্ষেত্রে ধনাত্মক মানটিকে মুখ্যমান ধরা হয়।

যেমন: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ এবং $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ সুতরাং $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান হবে $= \frac{\pi}{3}$

◈ মুখ্য মানগুলোর সীমা হচ্ছে:

(i) কোন বাস্তব সংখ্যা, x, $-1 \leq x \leq 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $\sin^{-1}x$ বা $\arcsin x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{6}$ এবং $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $\frac{-\pi}{6}$

(ii) কোন বাস্তব সংখ্যা, x, $-1 \leq x \leq 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $[0, \pi]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $\cos^{-1}x$ বা $\arccos x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\cos^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ এবং $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $\frac{2\pi}{3}$.

(iii) কোন বাস্তব সংখ্যা, x, $-\infty < x < \infty$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে $\tan^{-1}x$ বা $\arctan x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\tan^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\tan^{-1}1$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$ এবং $\tan^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$

(iv) কোন বাস্তব সংখ্যা x, $x \leq -1$ বা, $x \geq 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $\text{cosec}^{-1}x$ বা $\text{arc cosec}\, x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\text{cosec}^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\text{cosec}^{-1}(2)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ এবং $\text{cosec}^{-1}(-2)$ এর মুখ্যমান $\frac{-\pi}{3}$.

(v) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, x \leq -1$ বা, $x \geq 1$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[0, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 0\right]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $\sec^{-1} x$ বা $\text{arc}\sec x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\sec^{-1} x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\sec^{-1}(2)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{3}$ এবং $\sec^{-1}(-2)$ এর মুখ্যমান $\frac{2\pi}{3}$.

(vi) কোন বাস্তব সংখ্যা $x, -\infty < x < \infty$ শর্ত সিদ্ধ করলে $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $\cot^{-1} x$ বা $\text{arc}\cot x$ এর যে মান বিদ্যমান তাকে $\cot^{-1}x$ এর মুখ্যমান বলে। যেমন: $\cot^{-1}(1)$ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$ এবং $\cot^{-1}(-1)$ এর মুখ্যমান $-\frac{\pi}{4}$

Tips: যদি $\sin^{-1} x$ এর মুখ্য মান α হয় তবে $\sin^{-1} x$ এর সাধারণ মান হবে $n\pi + (-1)^n\alpha$।

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

(i) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে সরলীকরণের মাধ্যমে tan কিংবা cot কিংবা cos নেওয়া সুবিধাজনক।

(ii) সমীকরণের উভয়পক্ষকে বর্গ করে সমাধান এড়িয়ে যাওয়া ভাল। একান্ত সম্ভব না হলে দেখতে হবে প্রাপ্ত উত্তরগুলো যথাযথ কিনা অর্থাৎ শুদ্ধি পরীক্ষা করতে হবে এবং অবান্তর মূলগুলো বাদ দিতে হবে।

(iii) উর্ধ্বঘাতগুলোকে গুণিতক কোণে প্রকাশ করার চেষ্টা করতে হবে।

(iv) গুণফলগুলোকে যোগফল বা যোগফলগুলোকে গুণফলে নিয়ে যাওয়া অনেক ক্ষেত্রে সুবিধাজনক।

(v) $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ কিংবা n যে কোন পূর্ণ সংখ্যা কিংবা $n \in \mathbb{Z}$ লিখতে যেন ভুল না হয় এবং প্রশ্নে n থাকলে n এর পরিবর্তে m, k ইত্যাদি ব্যবহার করতে হবে।

(vi) যেহেতু সাধারণ সূত্রটিতে π ব্যবহৃত হয় সুতরাং সমীকরণের বিশেষ সমাধান π এর মাধ্যমে নির্ণয় করা হয়। অর্থাৎ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\sin 30°$ না লিখে $\sin\frac{\pi}{6}$ লেখাই শ্রেয়।

(vii) সীমা রেডিয়ানে অর্থাৎ π এর মাধ্যমে দেয়া থাকলে উত্তরগুলো π এর মাধ্যমে দিতে হবে।

(viii) সমীকরণের উভয় পক্ষের লবে $\sin x, \cos x$ জাতীয় উৎপাদক থাকলে সেটিকে অপসারণ করা (অর্থাৎ ঐ উৎপাদক দিয়ে উভয় পক্ষকে ভাগ করা) যাবে না। কিন্তু উভয় পক্ষের হরে থাকলে সেটিকে অপসারণ করা যাবে। কারণ সমীকরণের হর 0 (শূন্য) হতে পারে না।

(ix) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ [যেখানে $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$] আকৃতির ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত অঙ্ক উভয়পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করে $\cos(A \pm B)$ এর সূত্র প্রয়োগ করাই উত্তম।

➲ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ: (সকল ক্ষেত্রে $n \in \mathbb{Z}$ হবে।)

01. $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$	06. $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$
02. $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$	07. $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
03. $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$	08. $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$
04. $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$	09. $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi$
05. $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$	10. $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n+1)\pi$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

১ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন:

01. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$	02. $\cot^{-1}x + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
03. $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$	04. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$
05. $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]$	06. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$
07. $\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$	08. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$
09. $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$	10. $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \text{cosec}^{-1}x$
11. $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}x$	12. $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1}x$
13. $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$	14. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$
15. $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$	16. $\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}x$
17. $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$	18. $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}x$
19. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$	20. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left[2x\sqrt{1-x^2}\right]$; $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$
21. $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$; $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$; $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$	22. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $\frac{1}{2}\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\frac{1}{2}\cos^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
23. $\tan^{-1}\frac{ax+by}{ax-by} = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{by}{ax}$, $\tan^{-1}\frac{ax+by}{bx-ay} = \tan^{-1}\frac{a}{b} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$; $\tan^{-1}\frac{ax-by}{bx+ay} = \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}\frac{y}{x}$	24. $\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x$, $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x$ জ্যামিতিক প্রক্রিয়ায় সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে বিভিন্ন বৃত্তীয় ফাংশনের রূপান্তর পাওয়া যায়। $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$ $\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

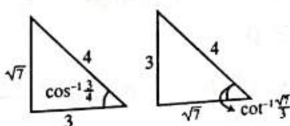
◆ **MCQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4} =$ কত? **[DB, RB, SB'22]**

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

সমাধান: (a); $\frac{3}{4}$; $\sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3}$

$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} = \sin\sin^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$



Shortcut: $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = x$

02. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? **[DB, SB, MB, BB'22]**

(a) $(6n-1)\frac{\pi}{9}$ (b) $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{6}$

সমাধান:(c); $\cos 3\theta = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 3\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2n}{3} \pm \frac{\pi}{9}$

03. $\sec x = \sec(x+\pi)$ এর সাধারণ সমাধান: **[DB'22]**

(a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (d) $n\pi + \frac{3\pi}{4}$

সমাধান: (a); $x = 2n\pi \pm (x+\pi)$; '$-$' নিয়ে

$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

04. $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\tan^{-1}x=\frac{\pi}{4}$ হলে x এর মান— [DB'22]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{-1}{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

সমাধান: (b); 2, $\sqrt{5}$, 3, $\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\therefore$ ভূমি $=1$,

$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan^{-1}2+\tan^{-1}2=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\tan^{-1}\frac{2+x}{1-2x}=\frac{\pi}{4}\therefore 2+x=1-2x\ x=-\frac{1}{3}$

05. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান কত? [DB'22] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{-2}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

06. $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)-\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ এর মান- [Ctg.B'22]

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: (c); $\sin^2\sin^{-1}\frac{\sqrt{2^2-1}}{2}-$

$\cos^2\cos^{-1}\frac{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{(\sqrt{1})^2}{2^2}=\frac{1}{2}$

or, **Use Calculator.**

07. $-\pi\le x\le\pi$ ব্যবধিতে $\sin x=-\frac{1}{2}$ সমীকরণের সমাধান— [Ctg.B'22]

(a) $-\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

সমাধান: (a); **Calculator test**

08. $\mathrm{cosec}^2(\sec^{-1}\sqrt{5})$ এর মান— [Ctg.B'22; CB'21]

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (a); 2, $\sqrt{5}$, 1, $\sec^{-1}\sqrt{5}$ $\mathrm{cosec}^2\left(\mathrm{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5}{4}$

09. $\cos 2\theta=-1$ হলে [Ctg.B'22]

(a) $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in z$

(b) $\theta=(2n+1)\pi, n\in z$

(c) $\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}, n\in z$

(d) $\theta=(4n+1)\frac{\pi}{2}, n\in z$

সমাধান: (a); $\cos 2\theta=\cos\pi\Rightarrow 2\theta=2n\pi\pm\pi$

$\Rightarrow\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}(2n\pm1)$

10. $\tan^{-1}\frac{5}{4}+\cot^{-1}\frac{5}{4}$ এর মান- [RB, Ctg.B, JB, CB, MB'22; DB'21]

(a) 0 (b) π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\tan^{-1}\frac{9}{40}$

সমাধান: (c); $\tan^{-1}\frac{5}{4}+\tan^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{4}+\frac{4}{5}}{1-\frac{5}{4}\frac{4}{5}}=\frac{\pi}{2}$

11. যদি $\sec\theta=-2$ এবং $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ হয়, তবে θ এর মান কত? [RB'22]

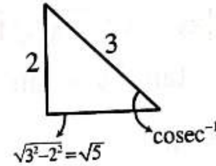
(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\pi$ (d) π

সমাধান: (b); $\sec\theta=-2\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$

12. $\cot^{-1}p=\mathrm{cosec}^{-1}\frac{3}{2}$ হলে $p=?$ [RB'22]

(a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

সমাধান: (d); $\tan^{-1}\frac{1}{P}=\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\therefore P=\frac{\sqrt{5}}{2}$



13. $\tan 3\theta=1$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [RB'22]

(a) $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{3n\pi}{12}$ (d) $n\pi$

সমাধান: (a); $\tan 3\theta=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow 3\theta$

$=n\pi+\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\theta=\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}}$

14. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে— [SB'22; CB'21] [Ans: d]

(i) $\sin^{-1}x$ এর ডোমেন $[-1,1]$

(ii) $\cos^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[0,\pi]$

(iii) $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন $(-\infty,\infty)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

15. $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}$ হলে θ মান— [SB'22]

(a) $2n\pi$ (b) $(2n+1)\pi$

(c) $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (d) $(2n-1)\pi$

সমাধান: (c); $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=1;$

$\Rightarrow\cos\theta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=1$

$\Rightarrow\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta$

$\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi$ $\boxed{\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}}$

16. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে— [SB'22] [Ans: d]

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$ যেখানে $-1\le x,y\le1$ এবং $x^2+y^2\le1$

(ii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$ যেখানে$-1\le x,y\le1$ এবং $x+y\ge0$

(iii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যেখানে $x>0, y>0$ এবং $0\le xy\le1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

17. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত? [BB'22; Din.B'21; SB'17]

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) 5

সমাধান: (b); $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$=\tan\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\tan\left(\tan^{-1}\frac{2+3}{5}\right)$

$=\tan(\tan^{-1}1)=1$

18. $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)$ হলে x এর মান কত? [BB'22]

(a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (a); $\tan\left(\cos^{-1}\frac{x}{1}\right)=\sin(\tan^{-1}2)$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{2}{\sqrt{1+4}}\Rightarrow 2x=\sqrt{5(1-x^2)}$

$\Rightarrow 4x^2=5-5x^2\Rightarrow 9x^2=5\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

19. $\arctan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ এর মান কত? [BB'22]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: (d); $\arctan\left\{\sin\left(\arccos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

$=\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right\}=\tan^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}=\frac{\pi}{6}$

20. $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$ হলে, θ এর মান কত? $(0<\theta<2\pi)$ [BB'22]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: (c); $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$

$\therefore\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\theta}{2}=n\pi+\frac{\pi}{6}$

$\boxed{\therefore\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}}$; n = 0 হলে, $\theta=\frac{\pi}{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x)=\tan x$ এবং $g(x)=\sin^{-1}x$

21. $g(y)+g(\sqrt{1-y^2})$ এর মান কোনটি? [BB'22; Din.B'21]

(a) π (b) 2π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: (c); $\sin^{-1}y+\sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$

$=\sin^{-1}y+\cos^{-1}y=\frac{\pi}{2}$

22. $f(x)f(2x)=1$ হলে, x এর মান কত? [CB, BB'22]

(a) $n\pi\pm\frac{\pi}{6}, n\in z$ (b) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}, n\in z$

(c) $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}, n\in z$ (d) $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}, n\in z$

সমাধান: (a); $\tan x\tan 2x=\frac{2\tan^2x}{1-\tan^2x}=1;$

$\tan^2x=\frac{1}{3}$ $\boxed{\therefore x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}}$

23. $\tan\theta+1=0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি? [JB'22]

(a) $(4n-1)\frac{\pi}{4}; n\in\mathbb{Z}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{4}; n\in\mathbb{Z}$

(c) $(8n-1)\frac{\pi}{4}; n\in\mathbb{Z}$ (d) $(8n+1)\frac{\pi}{4}; n\in\mathbb{Z}$

সমাধান: (a); $\tan\theta=-1=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow\theta=n\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}(4n-1)$

24. $\cos\cot^{-1}2$ এর মান কত? [JB, MB'22; DB, JB'21]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (b); $\cos\cot^{-1}2=\cos\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

25. $\tan^{-1}2+\tan^{-1}3$ এর মান কত? [RB, JB'22]

(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

সমাধান: (c); $\tan^{-1}\frac{2+3}{1-2.3}=\tan^{-1}\frac{5}{-5}=\frac{3\pi}{4}$

26. $\sin2\theta+3\sin\theta=0$ হলে θ এর মান কোনটি? [CB'22]

(a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$

(c) $(2n+1)\pi$ (d) $n\pi$

সমাধান: (d); $2\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta=0\Rightarrow$

$\sin\theta(2\cos\theta+3)=0\therefore\sin\theta=0$ $\boxed{\theta=n\pi}$

27. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x\right)=$ কত? [Din.B'22]

(a) sin x (b) x (c) 1 − x (d) 1 + x

সমাধান: (b); $\cos\cos^{-1}x=x$

28. $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}y$ সমীকরণে $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে y এর মান কত? [Din.B'22]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

সমাধান: (c); $2.\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin^{-1}y$

$\Rightarrow 2.\frac{\pi}{3}=\sin^{-1}y\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cot\theta=k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta=n\pi+\alpha$

29. $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে α = কত? [Din.B'22]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (c); $\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan\theta=\tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow\theta=n\pi+\boxed{\overset{\alpha}{\frac{\pi}{3}}}$

30. $k=1$ এবং $\frac{\pi}{4}<\theta<2\pi$ হলে θ এর মান কত? [Din.B'22] [Ans: b]

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (b); $\cot\theta=1\Rightarrow\tan\theta=\tan\frac{\pi}{4}\ \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$

n = 1 হলে $\boxed{\theta=\frac{5\pi}{4}}$

31. অবান্তর মূল ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে- [MB'22] [Ans: a]
(i) সিদ্ধ করে না (ii) বর্গ করলে পাওয়া যায়
(iii) বর্গমূল করলে পাওয়া যায়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i ও ii (b) i ও iii (c) ii ও iii (d) i, ii ও iii

32. $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ হবে যখন- [DB'21] [Ans: a]
(a) $\cos\theta = 0$ (b) $\sin\theta = 0$
(c) $\cos\theta = 1$ (d) $\sin\theta = 1$

33. $2\tan^{-1}\sqrt{2} = \theta$ হলে- [DB'21]
(i) $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ (ii) $\cot\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
(iii) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $\tan^{-1}\sqrt{2} = \frac{\theta}{2} \therefore \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$
$\therefore \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -2\sqrt{2}$
$\therefore \cot\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \therefore \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\times\sqrt{2}}{1+2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

34. $x = \sin\cos^{-1}y$ হলে, x^2+y^2 এর মান হবে- [DB'21]
(a) π (b) 1 (c) -1 (d) 0
সমাধান: (b); $\sin^{-1}x = \sin^{-1}(\sin(\cos^{-1}y))$
$= \sin^{-1}x = \cos^{-1}y = \sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$
$\therefore x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \therefore x^2+y^2 = 1$

35. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)$ এর মান কোনটি? [DB'21]
(a) $2\tan^{-1}x$ (b) $\tan^{-1}x$
(c) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x$ (d) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x$
সমাধান: (b); $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+x^2}{2x}\right) = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$
$= \frac{1}{2}\times 2\tan^{-1}x \therefore \tan^{-1}x$

36. নিচের কোনটি সঠিক? [RB'21]
(a) $\cos^{-1}\frac{4}{5} = \tan^{-1}\frac{5}{4}$ (b) $\cos^{-1}\frac{4}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$
(c) $\cos^{-1}\frac{4}{5} = \frac{\operatorname{cosec}^{-1}3}{5}$ (d) $\cos^{-1}\frac{4}{5} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$
সমাধান: (b); (ত্রিভুজ: বাহু 5, 3, 4) $\therefore \cos^{-1}\frac{4}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

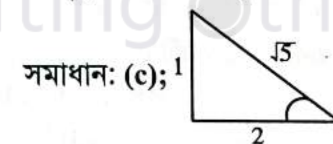
37. $\tan^2\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ এর মান কত?
[RB, SB'21; SB, CB'19]
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{3}$
সমাধান: (d); $\{\tan 30\}^2 = \frac{1}{3}$

38. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর: [RB'21]
(i) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi$
(ii) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(iii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$
$= \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}\right\}$
উপরের তথ্যের প্রেক্ষিতে নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

39. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, $\theta =$ কত? [RB'21]
(a) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$
(b) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$
(c) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$
(d) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (c); $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$
$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

40. $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\theta =$ কত? [RB'21] [Ans: b]
(a) $2n\pi + \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$
(c) $2n\pi - \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

41. $\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা নিচের কোনটি?
[RB'21] [Ans: c]
(a) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (b) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
(c) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (d) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

42. $f(x) = \operatorname{cosec}(\cot^{-1}x)$ হলে $f(2)$ এর মান কত?
[Ctg.B'21]
(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\sqrt{5}$ (d) 3
সমাধান: (c);


$F(x) = \operatorname{cosec}(\cot^{-1}x);\ f(2) = \operatorname{cosec}(\cot^{-1}2)$
$= \operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$

43. নিচের কোনটি $\sin(2\sin^{-1}x)$ এর মান? [Ctg.B'21]
(a) $2x\sqrt{x^2-1}$ (b) $2x\sqrt{1-x^2}$
(c) $\frac{2x}{1-x^2}$ (d) $\frac{2x}{1+x^2}$
সমাধান: (b); $\sin(2\sin^{-1}x) = \sin 2\theta$
$= 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$
$\sin^{-1}x = \theta \Rightarrow x = \sin\theta \therefore \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

44. $2\cos\theta + 1 = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি? **[Ctg.B'21]**
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$
(c) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (c); $2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$
$= \cos\frac{2\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

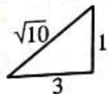
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$$p = \cos\theta, q = \sin\theta$$

45. $\sec\theta$ এর মান কোনটি? **[Ctg.B'21]**
(a) $\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$ (b) $\sqrt{1-q^2}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{q^2-1}}$ (d) $\sqrt{q^2-1}$
সমাধান: (a); $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$

46. $p - \sqrt{3}\,q = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি? **[Ctg.B, BB'21]**
(a) $n\pi - \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (c); $p - \sqrt{3}q = 0 \Rightarrow \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$
$= 0 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$
$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

47. যদি $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে- B'21] [Ans: c]
(i) $x \le -1$ (ii) $x = 0$ (iii) $x > 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

48. $\cot^{-1}3 = ?$ **[SB'21]**
(a) $\sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$ (b) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$
(c) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{5}$ (d) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$
সমাধান: (d); $\cot^{-1}3 = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$
$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\sin^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}$
$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}\times\frac{9}{10} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$



49. $[0°, 180°]$ ব্যবধিতে $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? **[SB'21]**
(a) 30° (b) 60° (c) 120° (d) 150°
সমাধান: (d); $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \therefore x = \frac{5\pi}{6}$

50. $\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta = -1$ হলে, নিচের কোনটি সত্য? **[SB'21]**
(a) $\theta = n\pi$ (b) $\theta = (2n+1)\pi$
(c) $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$ (d) $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$
সমাধান: (c); $\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -1$
$\Rightarrow \sin\theta = -1 \therefore \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$

51. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ হলে, x =? **[SB'21]**
(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $-\sqrt{3}$
সমাধান: (c); $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$
$\Rightarrow \cot^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x \Rightarrow \sqrt{3} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)$
$= \tan\tan^{-1}x \therefore x = \sqrt{3}$
বিকল্প: $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
$\therefore \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$
$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} \therefore x = \sqrt{3}$

52. $-2(\cos^2x - \sin^2x) = 1$ এর সমাধান নিচের কোনটি? **[SB'21]**
(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
সমাধান: (a); $\cos 2x = -\frac{1}{2} \therefore 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

53. $\cot k = \frac{1}{2}$ হলে $\cot\tan^{-1}\sec\sin^{-1}\cot k$ এর মান কত? **[BB'21]**
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 2
সমাধান: (c); $\cot\tan^{-1}\sec\sin^{-1}\frac{1}{2}$
$= \cot\tan^{-1}\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = \cot\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$= \frac{1}{\tan\left(\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

54. $\sec^2(\tan^{-1}2) - \mathrm{cosec}^2(\cot^{-1}3)$ এর মান কত? **[BB'21; DB'17]**
(a) 5 (b) 15 (c) $\sqrt{5} - \sqrt{10}$ (d) −5
সমাধান: (d); $\sec^2(\tan^{-1}2) - \mathrm{cosec}^2(\cot^{-1}3)$
$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}2) - 1 - \cot^2(\cot^{-1}3)$
$= 4 - 9 = -5$

55. $2\sin\frac{\theta}{2} - 1 = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি? **[BB'21]**
(a) $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ (d) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$
সমাধান: (c); $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6};\ \frac{\theta}{2} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

56. $f(x) = \sin^{-1} x$ হলে– [BB, Din.B'21]
(i) $f(x) + f(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$
(ii) $\text{cosec}\{f(x)\} = \frac{1}{x}$ (iii) $f(1) = \frac{\pi}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$
$= \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
(ii) $\text{cosec}(\sin^{-1} x) = \text{cosec}\left(\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$
(iii) $\sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$

57. $\cot\theta . \cot 2\theta = 1$ সমীকরণের সমাধান- [Din.B, BB'21]
(a) $2n\pi$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{2n}{3}$ (d) $(2n-1)\frac{\pi}{3}$
সমাধান: (উত্তর নেই); $\frac{\cos\theta\cos 2\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} = 1$
$\Rightarrow \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta = 0$
$\Rightarrow \cos(2\theta+\theta) = 0$
$\therefore 3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$

58. $\sin x = \cos x$ হয় তবে x এর মান কত? [JB'21]
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$
সমাধান: (b); $\tan x = 1, x = n\pi + \frac{\pi}{4} [n = 1]$

59. $\sin^{-1}\frac{2}{5} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{21}}{5}$ এর মান কত? [JB'21]
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2π (d) $\frac{\pi}{4}$
সমাধান: (b); Use Calculator

60. $3\sec^{-1}(2) = \cos^{-1} x$ হলে x এর মান কত? [JB'21]
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1
সমাধান: (d); $3.\frac{\pi}{3} = \cos^{-1} x \Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{\pi}{3}.3$
$\Rightarrow x = \cos\pi \Rightarrow x = -1$

61. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে– [JB'21]
(i) $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর পূরক কোণ $\cos^{-1}\frac{1}{2}$
(ii) $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(iii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $xy > 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (ii) [ত্রিভুজ: অতিভুজ 1, লম্ব x, ভূমি $\sqrt{1-x^2}$, কোণ θ] ; $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\tan^{-1} 3 = A, \tan^{-1} 2 = B$ এবং $A + B + C = \pi$

62. নিচের কোন সম্পর্কটি সত্য? [JB'21]
(a) $A - B = \frac{\pi}{4}$ (b) $\cot B = 2$
(c) $\cot^{-1} 2 = \frac{\pi}{2} + B$ (d) $\cot^{-1} 2 = \frac{\pi}{2} - B$
সমাধান: (d); $\cot^{-1} 2 = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} 2$
$= \frac{\pi}{2} - B\left[\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right]$

63. কোন সম্পর্কটি সঠিক? [CB'21] [Ans: d]
(a) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
(b) $3\tan^{-1} x = \tan^{-1}\frac{x^3-3}{1-3x^2}$
(c) $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(1-2x^2)$
(d) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

64. $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$ যদি– [CB'21]
(a) $\cot\theta = 0°$ (b) $\cos\theta + 1 = 0$
(c) $\sin\theta = 1$ (d) $\cos\theta = 1$
সমাধান: (a); $\cot\theta = 0$; $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$

65. $2x^3 - 3x - 5 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় p, q, r।
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ এর মান কত? [CB'21]
(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $-\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{5}$
সমাধান: (a); $\sum pq = -\frac{3}{2}, pqr = \frac{5}{2}$
$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{\sum pq}{pqr} = -\frac{3}{5}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$4(\cos^2 x + \sin x) = 5$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

66. x এর মান কত? [CB'21]
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$
(b) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$
(c) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$
(d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (c); $4 - 4\sin^2 x + 4\sin x = 5$
$\Rightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$
$\Rightarrow (2\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$
$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

67. x এর মান কত, যখন $0 < x < 2\pi$. [CB'21]
(a) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
সমাধান: (b);

n	$n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$
0	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}$
2	×

68. $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? (n একটি পূর্ণ সংখ্যা) [Din.B'21]
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
সমাধান: (c); $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

69. যদি $f(x) = \tan^{-1} x$ হলে- [Din.B'21]
(i) $2f(x) = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ (ii) $2f(x) = \sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
(iii) $2f(x) = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

70. $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \mathrm{cosec}^2(\cot^{-1} 3) =$ কত? [Din.B'21; All.B'18]
(a) 5 (b) 7 (c) 11 (d) 15
সমাধান: (d); $1 + 4 + 1 + 9 = 15$
$\Rightarrow 1 + \tan^2(\tan^{-1} 2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1} 3)$
$= 1 + 2^2 + 1 + 3^2 = 15$

71. $f(\theta) = \cos\theta, f(\theta) = f(\alpha)$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে, θ এর মান- [MB'21]
(a) $2n\pi \pm \alpha$ (b) $n\pi \pm \alpha$
(c) $n\pi + (-1)^n\alpha$ (d) $n\pi - (-1)^n\alpha$
সমাধান: (a); $\cos\theta = \cos\alpha \therefore \theta = 2n\pi \pm \alpha; n \in \mathbb{Z}$

72. $2\sin 2\theta = 1$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান- [MB'21]
(a) $n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$
(b) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$
(c) $\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$
(d) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (d); $\sin 2\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$

73. $f(x) = \cos^{-1} x$ এর ডোমেন- [MB'21] [Ans: a]
(a) $[-1, 1]$ (b) $(-1, 1]$ (c) $(-1, 1)$ (d) $[-1, 1)$

74. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে- [MB'21]
(i) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}$
(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
(iii) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); কারণ $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

75. $(\tan^{-1}\sqrt{3})$ এর মান নিচের কোনটি? [DB'19]
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); Right answer: $60° \Rightarrow \frac{\pi^c}{3}$

76. $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, θ এর মান কত হবে? যখন $180° < \theta < 360°$. [DB'19] [Ans: c]
(a) 210° (b) 240° (c) 300° (d) 330°

77. (i) $\mathrm{cosec}^{-1}x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ [DB'19]
(ii) $2\cot^{-1} x = \cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x}$
(iii) $\cos^{-1} x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); (ii) $2\cot^{-1} x = 2\tan^{-1}\frac{1}{x}$
$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1} = \cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x}$
(iii) [triangle: 1, $\sqrt{1-x^2}$, x] $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

78. $\sin\theta + 1 = 0$ হলে, θ =? [RB'19]
(a) $(4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
(c) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $(2n-1)\pi, n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (a); $\sin\theta + 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = -1$
$\therefore \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

79. $\sin\tan^{-1}\frac{a}{b}$ এর মান- [Ctg.B'19]
(a) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (b) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ (c) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (d) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$
সমাধান: (a); $\sin\sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ [triangle: $\sqrt{a^2+b^2}$, a, b]
$\tan^{-1}\frac{a}{b} = \sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

80. $\sin^{-1} x$ এর ডোমেন- [Ctg.B'19] [Ans: c]
(a) $[-\pi, \pi]$ (b) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (c) $[-1, 1]$ (d) $(-\infty, \infty)$

81. $\cos x + \sec x = 2$ হলে, x এর মান কত? **[SB'19]**

(a) $(2n+1)\pi$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) $2n\pi$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$

সমাধান: **(c)**; $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x + 1 = 2\cos x \Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$
$\Rightarrow (\cos x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos x = 1$
$\therefore x = 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$

82. $\sin(2\tan^{-1}x)$ এর সমান কোনটি? **[MB'21; SB'19]**

(a) $\frac{2x}{1-x^2}$ (b) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (c) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ (d) $\frac{2x}{1+x^2}$

সমাধান: **(d)**; $\sin(2\tan^{-1}x) = \sin\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$

83. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? **[Din.B, BB'19]**

(a) $n\pi + \frac{\pi}{12}$ (b) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$
(c) $n\pi - \frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

সমাধান: **(d)**; $\sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{6} \therefore 2\theta = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$
$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$

84. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ হলে x এর মান কত? **[JB'19]**

(a) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ (b) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{12}$
(c) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

সমাধান: **(a)**; $2\sin x\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$
$\therefore 2x = n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{6} \therefore x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n.\frac{\pi}{12}$

85. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} =$ কত? **[JB'19]**

(a) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (b) $\tan^{-1}2$
(c) $2\cos^{-1}\frac{4}{5}$ (d) $\sin^{-1}\frac{1}{10}$

সমাধান: **(a)**; $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3}{5}$
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{3} \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

86. $2\cos\theta = 1$ সমীকরণের সমাধান- **[CB'19]**

(i) $\theta = \frac{\pi}{3}$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
(ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$
(iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $n \in Z$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(a)**; $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

87. যদি $\sin^{-1}x = 2\theta$ হয়, তবে $\cos 2\theta$ এর মান কত? **[Din.B'19]**

(a) $1-x^2$ (b) $2x^2-1$ (c) $1-2x^2$ (d) $\sqrt{1-x^2}$

সমাধান: **(d)**; $x = \sin 2\theta \Rightarrow x^2 = 1-\cos^2 2\theta$
$\Rightarrow \cos^2 2\theta = 1-x^2 \Rightarrow \cos 2\theta = \sqrt{1-x^2}$

88. $\cos\left\{2\left(\sin^{-1}\frac{3x}{2} + \cos^{-1}\frac{3x}{2}\right)\right\} = p$ হলে p এর মান কত? **[Din.B'19]**

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: **(c)**; $\cos\left\{2\left(\sin^{-1}\frac{3x}{2} + \cos^{-1}\frac{3x}{2}\right)\right\} = p$
$\Rightarrow \cos\left\{2.\frac{\pi}{2}\right\} = p \Rightarrow p = \cos\pi = -1$

89. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0, n \in \mathbb{Z}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? **[All.B'18]**

(a) $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$
(c) $n\pi - \frac{\pi}{2}$ (d) $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

সমাধান: **(a)**; $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$
$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$

বিকল্প সমাধান: $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} = n\pi$
$\Rightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{2}$

90. ΔABC এ $A = \sin^{-1}\frac{1}{2}, B = \cos^{-1}\frac{1}{2}$ এবং C এর বহিঃস্থ কোণ θ হলে, $2\sin\theta - \sin C$ এর মান কোনটি? **[All.B'18]**

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: **(b)**; $A + B = \sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$
$\therefore C = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2} \therefore 2\sin\theta - \sin C = 2 \times 1 - 1 = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$.

91. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\alpha =$ কত? **[DB'17] [Ans: c]**

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

92. $k = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান কত? **[DB'17]**

(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: **(b)**; $\cot\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ [n = 1]

93. $\sin x + \cos x = 0$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে x এর মান কোনটি? **[RB'17]**

(a) $n\pi$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{4}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{4}$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

সমাধান: **(b)**; $\sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$
$\Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

94. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{9}{41}\right) = ?$ **[RB'17]**

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{40}{41}\right)$ (b) $\sec^{-1}\left(\frac{9}{41}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

সমাধান: (c); $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{9}{41}\right) = \theta \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{9}{41}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\text{si}}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$

$= \frac{\sin 2\theta}{1+\cos} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}{1+\cos} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}}{1+\frac{9}{41}} = \frac{4}{5}$

95. $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ হলে, x এর মান কোনটি? **[RB'17]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) $\sqrt{5}$

সমাধান: (b); $\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} \therefore \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \tan^{-1} x \Rightarrow \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1} x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

96. $\theta = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$ হবে যখন– **[Ctg.B'17] [Ans: d]**

(a) $\sin\theta = 1$ (b) $\cos\theta = 1$

(c) $\sin\theta = -1$ (d) $\cos\theta = -1$

97. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে- **[Ctg.B'17] [Ans: c]**

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(iii) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

98. $\tan^{-1} x$ ফাংশনের রেঞ্জ কোনটি? **[SB'17] [Ans: a]**

(a) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (d) $(0, \pi)$

99. $f(x) = \sin x$ এর মুখ্য সমাধান নিচের কোনটি? **[SB'17] [Ans: a]**

(a) [0, 1] (b) [1, 0] (c) [1, 1] (d) [−1, 1]

100. $2\cos\theta - 1 = 0$ হলে $\theta = ?$ **[BB'17]**

(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (b) $\eta\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(c) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

সমাধান: (d); $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

101. $f(x) = \tan^{-1} x$ হলে– **[BB'17]**

(i) $f(1) = \frac{\pi}{4}$ (ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

(iii) $f(2x) = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

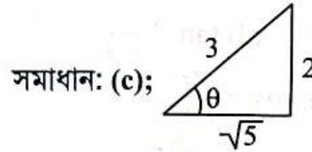
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

102. $\cot^{-1} p = \text{cosec}^{-1}\frac{3}{2}$ হলে $p = ?$ **[BB'17]**

(a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (c);



$\text{cosec}^{-1}\frac{3}{2} = \sin^{-1}\frac{2}{3} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2}$

103. $\sec^{-1}\left(\frac{25}{24}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$ এর মান কত? **[JB'17]**

(a) $-\pi$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

সমাধান: (c); $\sec^{-1}\left(\frac{25}{24}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{24}{25}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right) = \frac{\pi}{2}$ or, **Use Calculator**

104. $2\cos\frac{\theta}{5} + 1 = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি? **[JB'17]**

(a) $(2n+1)\frac{5\pi}{3}$ (b) $(2n+1)\frac{10\pi}{3}$

(c) $10n\pi \pm \frac{10\pi}{3}$ (d) $10n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$

সমাধান: (c); $2\cos\frac{\theta}{5} + 1 = 0 \therefore \cos\frac{\theta}{5} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\theta}{5} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \therefore \theta = 10n\pi \pm \frac{10\pi}{3}$

105. $2(\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x)$ এর মান কত? **[CB'17] [Ans: a]**

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) 2π

106. $f(x) = \text{cosec}(\cot^{-1} x)$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলে f(2) এর মান কোনটি? **[CB'17]**

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (a); $\text{cosec}(\cot^{-1} 2)$

$= \sqrt{1 + \cot^2(\cot^{-1} 2)} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

107. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে- **[CB'17]**

(i) θ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$

(ii) $\theta = \frac{\{4n+(-1)^n\}\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\theta = \frac{\{4n+1\}\pi}{2}$, যখন, $n \in \mathbb{Z}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$= n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} = \frac{\{4n+(-1)^n\}\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1} x$ সমীকরণে–

108. $y = 90°$ হলে x এর মান কোনটি? **[Din.B'17] [Ans: c]**

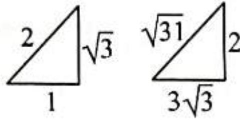
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

109. $x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$ হলে y- এর মান কোনটি? [Din.B'17]

(a) $\tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{-7}$ (b) $\tan^{-1}\frac{11}{\sqrt{3}}$
(c) $\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{11}$ (d) $\tan^{-1}\frac{7}{5\sqrt{3}}$

সমাধান: (b); $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$

$\tan^{-1}\sqrt{3} + \tan^{-1}\frac{2}{3\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}.\frac{2}{3\sqrt{3}}}$



110. $\sin 2\theta + 3\sin\theta = 0$ হলে, θ এর মান কোনটি? [Din.B'17]

(a) $(2n+1)\pi$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (d) $n\pi$

সমাধান: (d); $\sin 2\theta + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \sin\theta(2\cos\theta + 3) = 0$

$\text{Sin}\,\theta = 0, \cos\theta = -\frac{3}{2}$

$\therefore \theta = n\pi$ কারণ $\cos\theta \neq -\frac{3}{2}$

◆ MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. $f(x) = \sin^{-1}x$ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলে- [Ans: d]

(i) এর ডোমেন $[-1, 1]$ (ii) এর রেঞ্জ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
(iii) এর বিপরীত ফাংশন একটি অনুপাত
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

02. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে θ এর মান কোনটি?

(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

সমাধান: (c); $\cos\theta = \cos\alpha$

$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$; যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$

03. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = \sec x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sec^{-1}x$ হবে?

(a) $x \in [0, \pi]$ (b) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
(c) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (d) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

সমাধান: (c); $K = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য $\sec^{-1}x$ অসংজ্ঞায়িত

04. নিম্নের কোন সম্পর্কটি সত্য? [Ans: c]

(a) $\sin^{-1}(\sin x) = x$, যখন $-1 \leq x \leq 1$
(b) $\cos(\cos^{-1}x) = x$, যখন $0 \leq x \leq \pi$
(c) $\sin(\sin^{-1}x) = x$, যখন $-1 \leq x \leq 1$
(d) $\cos^{-1}(\cos x) = x$, যখন $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

05. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান হবে-

(a) $-\frac{1}{7}$ (b) 1 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{1}{7}$

সমাধান: (b); $\tan(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}\right) = \tan(\tan^{-1}1) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

06. যদি $\cot^2\theta + \text{cosec}\theta - 5 = 0$ হয়, তবে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর জন্য θ এর মান হবে-

(i) 30° (ii) 60° (iii) $\text{cosec}^{-1}(3)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) iii (d) i, iii

সমাধান: (a); $\cot^2\theta + \text{cosec}\,\theta - 5 = 0$

$\Rightarrow \text{cosec}^2\theta - 1 + \text{cosec}\,\theta - 5 = 0$

$\Rightarrow \text{cosec}^2\theta + 3\text{cosec}\,\theta - 2\text{cosec}\,\theta - 6 = 0$

$\Rightarrow \text{cosec}\,\theta(\text{cosec}\,\theta + 3) - 2(\text{cosec}\,\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow (\text{cosec}\,\theta - 2)(\text{cosec}\,\theta + 3) = 0 \therefore \text{cosec}\,\theta = 2$

অথবা $\text{cosec}\,\theta = -3$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\tan^{-1}2 = A, \tan^{-1}3 = B$ এবং $A + B + C = \pi$

07. A + B এর মান নিচের কোনটি?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

সমাধান: (c); $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan}{1 - \tan \quad .\tan B} = \frac{2+3}{1-6}$

$\Rightarrow \tan(A+B) = -1 \Rightarrow A + B = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

08. C এর মান নিচের কোনটি?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

সমাধান: (a); '৭' হতে, $A + B = \frac{3\pi}{4} \therefore C = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

09. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে-

(i) $\tan^{-1}2$ এর পূরক কোণ $\cot^{-1}2$
(ii) C এর পূরক কোণ $\frac{\pi}{4}$
(iii) A − B এর পূরক কোণ $\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $A - B = \tan^{-1}2 - \tan^{-1}3$

$= \tan^{-1}\frac{2-3}{1+2\cdot3} = -\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$\therefore$ পূরক কোণ $= \frac{\pi}{2} - \tan\frac{-11}{7} = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

10. $2\tan^{-1}x$ এর সমান কোনটি? **[Ans: a]**

(a) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (b) $\tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$
(c) $\cos^{-1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$ (d) $\cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x}$

11. $\sin[3(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x)] = a$ হলে, a এর মান কত? **[Ans: c]**

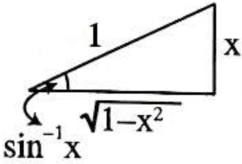
(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 2

12. $\cot(\sin^{-1}x)$ এর মান কত?

(a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\sqrt{1-x^2}$

সমাধান: **(a);** $\sin^{-1}x = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\therefore \cot(\sin^{-1}x) = \cot\left(\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



13. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর মান- **[Ans: b]**

(i) $\sec^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}2\sqrt{2}$
(iii) $\frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) ii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

14. $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ হলে, x এর মান-

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) 1

সমাধান: **(c);** $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2x}{3}$

$\Rightarrow \tan^{-1}x + \cot^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{\pi}{6}$

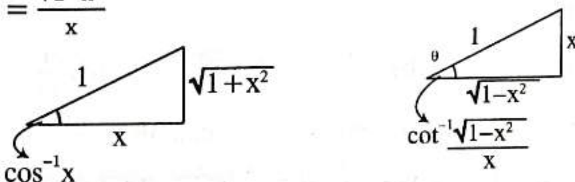
$\therefore x = \cot\left(\frac{x}{6}\right) = \sqrt{3}$

15. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = ?$

(a) $\sqrt{1-x^2}$ (b) x (c) $\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

সমাধান: **(b);** $\tan(\cos^{-1}x) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



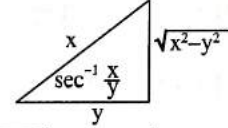
$\sin\left(\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{1}\right) = x$

16. $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y}$ এর সরলকৃত মান কত?

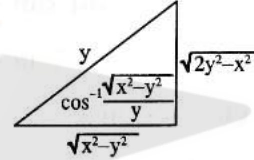
(a) $\frac{\sqrt{x^2-2y^2}}{x}$ (b) $\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{x}$
(c) $\frac{\sqrt{y^2-2x^2}}{y}$ (d) $\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

সমাধান: **(d);** $\tan\left(\sec^{-1}\frac{x}{y}\right)$

$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}\right) = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$



$\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}\right) = \sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}\right) = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$



17. $\arctan\left\{\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ সমান- **[Ans: d]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$
(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

18. $\tan^{-1}6 + \tan^{-1}\frac{7}{5}$ এর মান-

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: **(c);** $\tan^{-1}\frac{6+\frac{7}{5}}{1-6\cdot\frac{4}{5}} = \tan^{-1}\frac{\frac{37}{5}}{-\frac{37}{5}}$

$= \tan^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

19. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ সমান- **[Ans: c]**

(a) $\tan^{-1}\frac{2}{11}$ (b) $\sin^{-1}\frac{11}{2}$
(c) $\tan^{-1}\frac{11}{2}$ (d) $\cos^{-1}\frac{11}{2}$

20. $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$ এর মান-

(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 25

সমাধান: **(d);** $\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}4) + \sec^2(\sec^{-1}3) - 1$

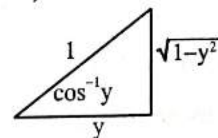
$= 4^2 + 3^2 = 25$

21. $x = \sin\cos^{-1}y$ হলে $x^2 + y^2$ এর মান হবে-

(a) 2 (b) 1 (c) −1 (d) 0

সমাধান: **(b);** $x = \sin\cos^{-1}y \Rightarrow x =$

$\sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{1-y^2}}{1}\right) \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$



22. $\sin(2\sin^{-1}x) = ?$
(a) $2x\sqrt{1+x^2}$ (b) $3x\sqrt{1-x^2}$
(c) $2x\sqrt{1-x^2}$ (d) $4x\sqrt{1-x^2}$
সমাধান: **(c)**; $\sin(2\sin^{-1}x)$
$= \sin(\sin^{-1}2x\sqrt{1-x^2}) = 2x\sqrt{1-x^2}$

23. $\sin\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = ?$
(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
সমাধান: **(c)**; $\sin\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

24. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান-
(a) $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (d) $2n\pi - \frac{\pi}{4}$
সমাধান: **(c)**; $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 1$
$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\theta = 1$
$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0 \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm 0$
$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

25. $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = \sqrt{3}, 0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান- **[Ans: c]**
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

26. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান-
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
সমাধান: **(b)**; $4(1-\cos^2\theta + \cos\theta) = 5$
$\Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$
$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$
$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

27. $\tan 2x \tan x = 1$ এর সমাধান–
(a) $n\pi + \frac{\pi}{6}$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{3}$
(c) a এবং b উভয়ই (d) $n\pi + \frac{\pi}{3}$
সমাধান: **(a)**; $\tan 2x \cdot \tan x = 1$
$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \cdot \tan x = 1$
$\Rightarrow 2\tan^2 x = 1 - \tan^2 x = 3\tan^2 x \Rightarrow 1$
$\Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{6}$ অথবা $x = n\pi - \frac{\pi}{6}$

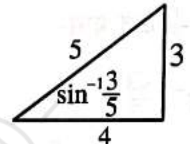
এস ইউ আহাম্মদ স্যার

28. $\sin\theta = 0$ হলে, θ এর সাধারণ মান– **[Ans: b]**
(a) 0 (b) $n\pi$ (c) $(2n+1)\pi$ (d) π

29. $\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos^{-1}\frac{3}{4} =$ কত? **[Ans: b]**
(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{5}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

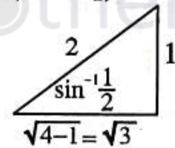
30. $\tan^2\theta + 2\sec^2\theta = 5$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান–
(a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (b) $\theta = \frac{n\pi+\pi}{6}$
(c) $2n\pi$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
সমাধান: **(d)**; $\tan^2\theta + 2\sec^2\theta = 5$
$\Rightarrow \tan^2\theta + 2 + 2\tan^2\theta = 5 \Rightarrow 3\tan^2\theta = 3$
$\Rightarrow \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \pm 1 \therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

31. $\theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ হলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} =$ কত?
(a) $\frac{9}{25}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) $\frac{16}{25}$ (d) $\frac{6}{25}$
সমাধান: (b); $\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$
$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$
$\therefore \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{25}$



32. $2\cos\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান–
(a) $n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
(c) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
সমাধান: **(d)**; $2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

33. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান–
(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
সমাধান: **(c)**; $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = \cot\left(\cot^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \sqrt{3}$



34. $\sin\{2(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)\} = a$ হলে, $a =$ কত? **[Ans: c]**
(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

35. θ এর কোন লঘিষ্ঠ ধনাত্মক মানের জন্য $2\cos 3\theta = \sqrt{3}$ হয়?
(a) $\frac{5\pi}{18}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{18}$
সমাধান: **(d)**; $2\cos 3\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \cos 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow \cos 3\theta = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3\theta = \frac{\pi}{6}$ [লঘিষ্ঠ ধনাত্মক মান]
$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}$

36. $\tan(\cos^{-1}x) = \sin(\tan^{-1}2)$ হলে x এর মান কত?

(a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (a); $\tan(\cos^{-1}x) = \sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow \tan(\cos^{-1}x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \cos^{-1}x = \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3} \therefore x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

37. $\tan^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কোনটি? **[Ans: c]**

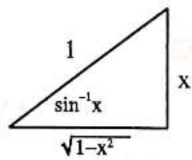
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

38. $\cot(\sin^{-1}x)$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

সমাধান: (a); $\cot(\sin^{-1}x) = \cot\left(\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



39. $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta$ হলে, θ এর মান কোনটি?

(a) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

(b) $2n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

(c) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

(d) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

সমাধান: (c); $\sin 4\theta - \sin 2\theta = \cos 3\theta$

$\Rightarrow 2\cos 3\theta.\sin\theta - \cos 3\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 3\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$

$\text{Cos}\,3\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}$ অথবা $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

40. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$ হলে, α এর মান কোনটি?

(a) $0, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ (c) $0, \frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$

সমাধান: (c); $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha \pm \sin\alpha = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha \pm \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 0, \frac{\pi}{2}$

41. $0 \le x \le 90°$ হলে, $\sin 3x = \cos x$ সমীকরণের সমাধান হবে–

(a) 0°, 45° (b) 0°, 22.5°
(c) 45°, 45° (d) 22.5°, 45°

সমাধান: (d); $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \pm x$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} = 22.5°$ বা $\frac{\pi}{4} = 45°$

42. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{4}\right)$ এর মান কত? **[Ans: d]**

(a) 1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

43. যদি, $\sin^{-1}x = \theta$ হয়, তবে $\cos\theta$ এর মান কত? **[Ans: b]**

(a) $1 - x^2$ (b) $\sqrt{1-x^2}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{-x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$

44. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = ?$ **[Ans: d]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) π (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

45. $y = \sin^{-1}x$ এর জন্য কোনটি সত্য? **[Ans: b]**

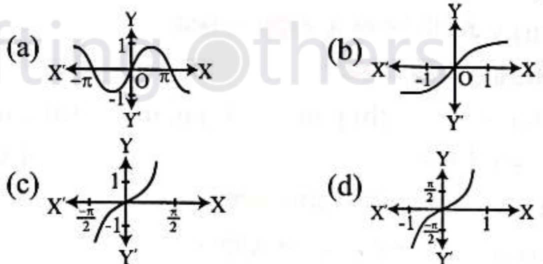
(a) $-1 \ge x$ (b) $-1 \le x \le 1$
(c) $x \in \mathbb{R}$ (d) $x \le 0.5$

46. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? (এখানে n পূর্ণসংখ্যা নির্দেশ করে) **[Ans: a]**

(a) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $n\pi - \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

অসীম কুমার সাহা স্যার

47. $y = \sin^{-1}x$ ফাংশনের লেখচিত্র নিচের কোনটি? **[Ans: d]**



48. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$ সমীকরণে $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে y এর মান কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

49. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ সমীকরণের কোন সমাধানটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত? **[Ans: b]**

(a) 60° (b) 120° (c) 150° (d) 300°

50. কোন মানটি $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে? [Ans: a]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

51. $n\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{nx-x^n}{1-nx^2}$ হলে, n এর মান কোনটি? [Ans: c]
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

52. $y = \text{cosec}^{-1}x$ এর মুখ্যমানের সীমা কোনটি? [Ans: d]
(a) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2} \le y < \frac{\pi}{2}$
(c) $-\frac{\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

53. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\left(A + \frac{9}{25}\right)$ হলে A এর মান কত?
(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{9}{25}$ (d) $\frac{16}{25}$

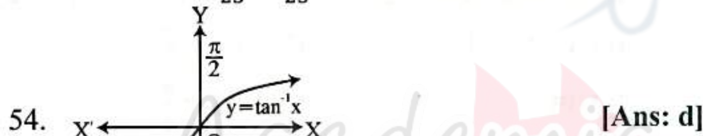
সমাধান: (d); $\sin^{-1}\left(A+\frac{9}{25}\right) = \sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$

$\Rightarrow A + \frac{9}{25} = \sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow A + \frac{9}{25} = \sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow A + \frac{9}{25} = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow A + \frac{9}{25} = \frac{25}{25}$

$\Rightarrow A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

54. 

[Ans: d]
(i) উপরের চিত্রের ফাংশনের ডোমেন $(-\infty, \infty)$
(ii) ফাংশনের রেঞ্জ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে অবস্থিত
(iii) y একটি বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

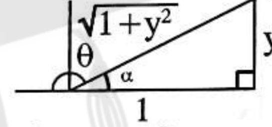
55. $x = \sqrt{3}$ হলে- [Ans: a]
(i) $\sin^{-1}x$ এর মান অসংজ্ঞায়িত
(ii) $\cos^{-1}x$ এর মান অসংজ্ঞায়িত
(iii) $\tan^{-1}x$ এর মান অসংজ্ঞায়িত
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

56. অবান্তর মূল ত্রিকোনমিতিক সমীকরণকে- [Ans: a]
(i) সিদ্ধ করে না (ii) বর্গ করলে পাওয়া যায়
(iii) বর্গমূল করলে পাওয়া যায়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

57. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$ কে প্রকাশ করা যায়- [Ans: d]
(i) $\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $xy < 1$
(ii) $\pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $xy > 1$
(iii) $\frac{\pi}{2}$ যখন $xy = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

58. যদি $\tan^{-1}x$ একটি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন হয় তবে- [Ans: b]
(i) $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$
(ii) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$
(iii) $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



59. α-কোণের মান নিচের কোনটি? [Ans: c]
(a) $\sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
(c) $\tan^{-1}y$ (d) $\text{cosec}^{-1}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

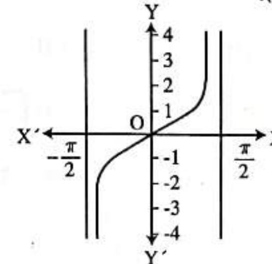
60. θ কোণের মান নিচের কোনটি? [Ans: d]
(a) $\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)$ (b) $\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$
(c) $\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}y$ (d) $\frac{\pi}{2} + \text{cosec}^{-1}\sqrt{1+y^2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$p(x) = \sin^{-1}x$ একটি বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন

61. $p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ এর মান কত? [Ans: d]
(a) 0° (b) 30° (c) 45° (d) 60°

62. p(x) এর মুখ্যমান নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে নিচের কোন শর্তটি প্রযোজ্য? [Ans: d]
(a) $-\infty < x < 0$ (b) $-1 < x < 0$
(c) $-1 < x < 1$ (d) $-1 \le x \le 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



63. উপরের লেখচিত্রটি নিচের কোন ফাংশনের? [Ans: c]
(a) $y = \sin x$ (b) $y = \cos x$
(c) $y = \tan x$ (d) $y = \sec x$

64. ফাংশনটির রেঞ্জ কত? [Ans: c]

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $(-\infty, \infty)$ (d) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$P = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}; R = \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

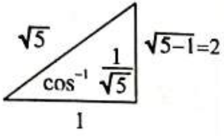
65. P এর tangent এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাত আকারে প্রকাশ কোনটি?

(a) $\tan^{-1} 1$ (b) $\tan^{-1} 2$

(c) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ (d) $\tan^{-1}\sqrt{5}$

সমাধান: (b); $p = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{2}{1} = \tan^{-1} 2$



66. (P + R) নিচের কোনটি?

(a) $\tan^{1} 2$ (b) $\tan^{-1} 3$ (c) $\tan^{-1} 5$ (d) $\tan^{-1} 7$

সমাধান: (d); $P + R = \tan^{-1} 2 + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{2+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\frac{7}{1} = \tan^{-1} 7$

67. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = ?$

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{x+\sqrt{y^2-x^2}}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{y+x}{y-x}\right)}\right)$

সমাধান: (a); $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{y} = \theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{x}{y}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}$

$= \frac{\frac{x}{y}}{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}$

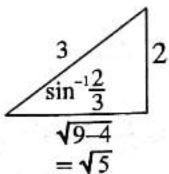
$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{x}{y+\sqrt{y^2-x^2}}$

মোঃ রফিকুল ইসলাম স্যার

68. $\tan^{-1}(P) = \sin^{-1}\frac{2}{3}$ হলে, P এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

সমাধান: (b); $\therefore \sin^{-1}\frac{2}{5} = \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\therefore P = \frac{2}{\sqrt{5}}$



69. $f(x) = \sin^{-1} x$ হলে– [Ans: d]

(i) $f(1) = \frac{\pi}{2}$ (ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \text{cosec}^{-1}x$

(iii) $f(x) - f(y) = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = 1$ হবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

70. $f(x) = \tan^{-1} x$ হলে– [Ans: d]

(i) $f(1) = \frac{\pi}{4}$ (ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

(iii) $2f(x) = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

71. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে- [Ans: c]

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

(iii) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

72. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে– [Ans: a]

(i) θ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$

(ii) $\theta = \{4n + (-1)^n\}\frac{\pi}{4}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, যখন $n \in \mathbb{Z}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$f(x) = \tan^{-1} x$$

73. $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{5}\right)$ এর মান কোনটি?

(a) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (b) $\tan^{-1}\frac{3}{11}$

(c) $\tan^{-1}\frac{7}{11}$ (d) $\tan^{-1}\frac{7}{9}$

সমাধান: (b); $\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{10}}$

$= \tan^{-1}\frac{3}{11}$

74. $f(a) = \frac{\pi}{3}$ হলে a এর মান কোনটি? [Ans: d]

(a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) 1 (d) $\sqrt{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$

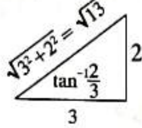
75. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, α = কত? [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

76. $k = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান কত? [Ans: b]
(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

77. $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\frac{2}{3}$ হলে x এর মান কত?
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (c) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (d) $\frac{4}{3}$
সমাধান: (b); $\tan^{-1}\frac{2}{5} = \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\therefore x = \frac{2}{\sqrt{13}}$



78. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে- [Ans: a]
(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}$
(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$
(iii) $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$$p(x) = 2\sin^{-1} x$$

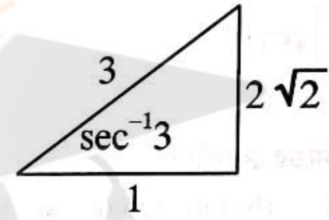
79. $p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এর মান কোনটি? [Ans: d]
(a) 0° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

80. p(x) এর মান কোনটি? [Ans: a]
(a) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ (b) $\sin^{-1}(2\sqrt{1-x^2})$
(c) $\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$ (d) $\sin^{-1}\sqrt{2x(1-x^2)}$

81. $\sin x + \cos x = 1$ এর সমাধান নিচের কোনটি?
(a) $2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$
(c) $2n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ (d) $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (a); $\sin x + \cos x = 1$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $\therefore x = 2n\pi,\ 2n\pi + \frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$

82. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, [Ans: a]
(i) $\theta = \frac{\pi}{3}$, যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
(ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, যখন $n \in \mathbb{Z}$
(iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, যখন $n \in \mathbb{Z}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

83. যদি $\sec^{-1} 3 = \tan^{-1} x$ হয়, তবে x এর মান কত?
(a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$
সমাধান: (d); $\sec^{-1} 3 = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{1}$ $\therefore x = 2\sqrt{2}$



84. $\cot^{-1} x = 0$ হলে, $\tan^{-1} x =$ কত? [Ans: c]
(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) ∞ (d) π

85. $\sin(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x) =$ কত? [Ans: d]
(a) $1 - x$ (b) $1 + x$ (c) $\sin x$ (d) x

86. $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান-
(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (c) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
সমাধান: (a); $\sin^2 2\theta - 3\cos^2\theta = 0$
$\Rightarrow 4\sin^2\theta.\cos^2\theta - 3\cos^2\theta = 0$
$\Rightarrow \cos^2\theta(4\sin^2\theta - 3) = 0;\ \cos^2\theta = 0$
$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $4\sin^2\theta - 3 = 0$
$\Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta - 3 = 0 \Rightarrow 4\cos^2\theta = 1$
$\Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ $\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

87. $\tan\theta = 0$ হলে, θ এর মান কত? [Ans: a]
(a) nπ (b) $\frac{n\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

◆ MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে θ = কত? [Ans: c]
(a) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

02. $\sin 2x = 0$ হলে x =? [$n \in \mathbb{Z}$] [Ans: a]
(a) $\frac{n\pi}{2}$ (b) nπ (c) 2nπ (d) $n\pi + \frac{\pi}{4}$

03. $\frac{1}{2}\sin^{-1} x = \tan^{-1} y$ হলে কোনটি সঠিক? [Ans: b]
(a) $x = \frac{2y}{1-y^2}$ (b) $x = \frac{2y}{1+y^2}$
(c) $x = \frac{1-y^2}{2y}$ (d) $x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\tan x = \sqrt{3}; \frac{\pi}{2} < x < 2\pi$

04. প্রদত্ত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? [Ans: a]

(a) $n\pi + \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{3}$ (c) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (d) $n\pi + \frac{\pi}{6}$

05. প্রদত্ত সীমার মধ্যে সমাধান কত? [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$

06. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে- [Ans: d]

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান $30°$

(ii) $\sin^{-1} x = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. $\sin\theta - \cos\theta = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [যেখানে $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$] [Ans: c]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

08. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin^{-1} x$ হলে, x এর মান কোনটি?

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\sqrt{5}$

সমাধান: (b); $\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sin^{-1} x$

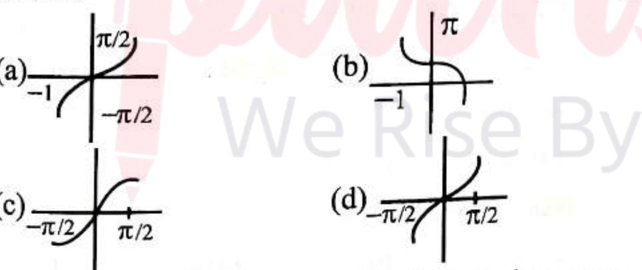
$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{1}{5}} = x \therefore x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

09. $\tan^{-1}(-1) + \cot^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$ এর মান- [Ans: a]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$

সমাধান: (a); Use Calculator

10. $y = \cos^{-1} x$, ($x \in \mathbb{R}$, এবং $-1 \le x < 1$) এর লেখচিত্র- [Ans: b]



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\cos A + \cos B = 0$

11. $A = 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$ এবং $B = \cos^{-1}\left(\frac{4k}{5}\right)$ হলে k এর মান কত?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{16}{25}$ (d) -1

সমাধান: (d); $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) + \cos\left(\cos^{-1}\frac{4k}{5}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{4k}{5} = 0 \therefore k = -1$

12. $B = 3A$ হলে, $A = ?$ [যেখানে $n \in \mathbb{Z}$]

(a) $n\pi$ এবং $\frac{n\pi}{2}$ (b) $n\pi - \frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ এবং $2n\pi$ (d) $n\pi$ এবং $(2n+1)\frac{\pi}{4}$

সমাধান: (b); $\cos 3A + \cos A = 0; 2\cos 2A.\cos A = 0$

$\therefore \cos A = 0 \Rightarrow A = (2n-1).\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2A = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = (2n+1).\frac{\pi}{4}$

13. ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধানের ক্ষেত্রে—

(i) $2\sin\theta - 1 = 0$ হলে $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

(ii) $2\cos\theta - 2 = 0$ হলে $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

(iii) $\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{4}$ হলে $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $2\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$2\cos\theta - 2 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \therefore \theta = 2n\pi$

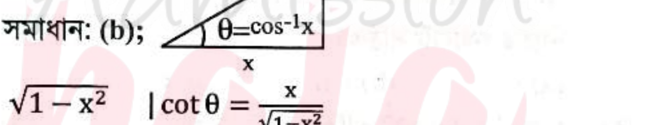
$\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{4} = (4n-1)\frac{\pi}{4}$

14. $\cot(\cos^{-1} x)$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

সমাধান: (b);



$\sqrt{1-x^2}$ | $\cot\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $f(x) = \sin^{-1} x$ হলে- [Ans: c]

(i) $f(x)f(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$ (ii) $\mathrm{cosec}\{f(x)\} = \frac{1}{x}$

(iii) $f(1) = \frac{\pi}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

16. $\sin\theta = \sin\alpha$ হলে θ এর মান কোনটি? [$n \in \mathbb{Z}$] [Ans: d]

(a) $2n\pi \pm \alpha$ (b) $n\pi + \alpha$

(c) $2n\pi + (-1)^n a$ (d) $n\pi + (-1)^n\alpha$

17. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} + \cot^{-1} x$ এর মান কত?

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) $\pm\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

সমাধান: (a); ধরি, $x = \tan\alpha \therefore \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \alpha$

$= \tan^{-1} x \therefore \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

18. $\sin\{2(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x)\}=a$ হলে $a=$ কত? [Ans: d]
(a) 1 (b) −1 (c) 2 (d) 0

19. $\tan\theta$ অসংজ্ঞায়িত হলে θ এর মান– [Ans: b]
(a) $(2n+1)\pi$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) $2n\pi$ (d) $(2n-1)\pi$

20. $\cos(2\tan^{-1}x)$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{2x}{1-x^2}$ (b) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (c) $\frac{2x}{1+x^2}$ (d) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$
সমাধান: **(b)**; $\cos(2\tan^{-1}x)$
$=\cos\left(\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

21. $\tan^2\theta+2\sec^2\theta=5$ সমীকরণটির সমাধান কত? $[n\in\mathbb{Z}]$
(a) $\theta=\frac{\pi}{4}(2n+1)$ (b) $\theta=\frac{n\pi+\pi}{6}$
(c) $2n\pi$ (d) $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$
সমাধান: **(d)**; $\tan^2\theta+2\sec^2\theta=5 \Rightarrow \sec^2\theta=2$
$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ \therefore \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

22. $\sin x+2=3$ হলে $0°<x<360°$ ব্যবধিতে x এর মান কত? [Ans: b]
(a) 30° (b) 90° (c) 45° (d) −90°

23. $\cos x=0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে- [Ans: b]
(i) এর সাধারণ সমাধান $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$
(ii) একটি বিশেষ সমাধান হবে $\frac{\pi}{2}$
(iii) এর সাধারণ সমাধান $x=n\pi$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, ii (c) ii, iii (d) ii

24. $\tan^{-1}x$ এর মুখ্য মানের সীমা কোনটি? [Ans: a]
(a) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$
(c) $-\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

25. $n\in\mathbb{Z}$ হলে, $\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি?
(a) $(8n\pm1)\frac{\pi}{8}$ (b) $(8n\pm1)\frac{\pi}{4}$
(c) $(n\pm1)\frac{\pi}{8}$ (d) $(n\pm1)\frac{\pi}{4}$
সমাধান: **(a)**; $\cos 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$; $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow x=n\pi\pm\frac{\pi}{8}\ \therefore x=(8n\pm1)\frac{\pi}{8}$

26. $\tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+3=0$ এর সমাধান কোনটি? [যেখানে $0<\theta<\pi$] [Ans: b]
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

27. $\sec^{-1}x+\text{cosec}^{-1}x=$ কত? [Ans: d]
(a) π (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

28. নিচের ফাংশন গুলোর ক্ষেত্রে— [Ans: c]
(i) $\sin^{-1}x=\text{cosce}^{-1}\frac{1}{x}\ -1\le x\le 1$
(ii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
(iii) $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন $(-\infty,\infty)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

29. যদি $\cot^2\theta+\text{cosec}\,\theta-5=0$ হয় তবে $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ এর জন্য θ এর মান কত?
(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 0°
সমাধান: **(c)**; $\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta-1$
$\therefore \text{cosec}^2\theta+\text{cosec}\,\theta-6=0$
$\therefore \text{cosec}\,\theta=-3$ অথবা $\text{cosec}\theta=2\ \therefore \theta=\frac{1}{6}\pi=30°$
$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$- এর জন্য $\text{cosec}\theta>0\ \therefore \text{cosec}\theta\neq-3$

30. $2\tan^{-1}x=?\ (0\le x<1)$ [Ans: d]
(i) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (iii) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

31. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=?$ [Ans: c]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

32. কয়েকটি গাণিতিক উক্তি হচ্ছে- [Ans: c]
(i) $\sin^{-1}x=\frac{1}{\sin x}$
(ii) $\cos^{-1}x=\sec^{-1}\frac{1}{x}$
(iii) $\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

33. কয়েকটি গাণিতিক উক্তি হচ্ছে-
(i) $\sin^{-1}(\cos\theta)$ একটি অনুপাত
(ii) $\tan(\cos^{-1}x)$ একটি কোণ
(iii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(c)**; $\sin^{-1}(\cos\theta)$ একটি কোণ।
$\tan(\cos^{-1}x)$ একটি অনুপাত।

34. $\sin^{-1}x$ ও $\cos^{-1}x$ প্রতিটি এক একটি কোণ হলে- [Ans: b]
(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$
(ii) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(4x^3-3x)$
(iii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \cos^{-1}x, \quad B = \cos^{-1}y$

35. $A = 0$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? [Ans: a]
(a) $x = 1$ (b) $x = 2$ (c) $x = 3$ (d) $x = 4$

36. $A - B = \frac{\pi}{2}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? [Ans: c]
(a) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$
(b) $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = 1$
(c) $xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = 0$
(d) $xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = 0$

37. $\frac{1}{2}\cos ec^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$ এর মান কত? [Ans: b]
(a) $2\tan^{-1}x$ (b) $\tan^{-1}x$ (c) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x$ (d) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

38. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ হলে θ এর মান কোনটি?
(a) $2n\pi, \frac{2}{5}n\pi; n \in \mathbb{Z}$ (b) 0
(c) $n\pi, ; n \in \mathbb{Z}$ (d) $n\pi, \frac{5}{2}n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

সমাধান: (a); $\cos3\theta = \cos2\theta \Rightarrow \cos3\theta - \cos2\theta = 0$
$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right).\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$
$\Rightarrow \sin\frac{1}{2}\theta = 0$ or, $\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right) = 0$; $\sin\frac{5}{2}\theta = \sin\pi$
$\Rightarrow \theta = \frac{2}{5}n\pi; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin\frac{1}{2}\theta = \sin(n\pi)$
$\therefore \frac{1}{2}\theta = n\pi; [n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \theta = 2n\pi; [n \in \mathbb{Z}]$

39. $\tan\left\{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right\} =$ কত? [Ans: b]
(a) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (b) $\frac{2x}{1-x^2}$ (c) $\frac{2x}{1+x^2}$ (d) 0

40. $\text{arc}\ \tan\left\{\sin\left(\text{arc}\ \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ এর মান কত? [Ans: d]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

41. $\sin 4\theta = \sin 2\theta$ (যেখানে $0 < \theta < 90°$); $\theta = ?$
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{12}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

সমাধান: (b); $\sin4\theta = \sin2\theta \Rightarrow 2\sin2\theta\cos2\theta = \sin2\theta$
$\Rightarrow \cos2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

42. $\tan^{-1}(p) = \sin^{-1}\frac{2}{3}$ হলে, p এর মান কোনটি? [Ans: b]
(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

43. $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$ হলে, x এর মান কত?
(a) $a + b$ (b) $a - b$ (c) $\frac{a-b}{1+ab}$ (d) $\frac{1+ab}{a-b}$

সমাধান: (c); $a = \tan\theta_1$; $b = \tan\theta_2$
$\therefore \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} = 2\theta_1; \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\theta_2$
$\therefore 2(\theta_1 - \theta_2) = 2(\tan^{-1}a - \tan^{-1}b)$
$= 2\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

44. $\cos 3x = -1$ হলে $x =$? [Ans: c]
(a) $(2n+1)\frac{\pi}{12}$ (b) $(2n+1)\frac{\pi}{6}$
(c) $(2n+1)\frac{\pi}{3}$ (d) $(2n+1)\pi$

45. $\tan\left\{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} =$ কত? [Ans: b]
(a) -1 (b) 1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

46. $2\cos x + 1 = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? [যেখানে $n \in \mathbb{Z}$] [Ans: c]
(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
(c) $2\left(n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

47. [চিত্র: সমকোণী ত্রিভুজ; কোণ θ, $\sin^{-1}\frac{4}{5}$] ;θ = কত? [Ans: a]
(a) $\sec^{-1}\frac{5}{4}$ (b) $\sec^{-1}\frac{4}{5}$ (c) $\sec^{-1}\frac{5}{3}$ (d) $\sec^{-1}\frac{3}{5}$

48. $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মূখ্যমান নিচের কোনটি? [Ans: a]
(a) 30° (b) 90° (c) 90° (d) 180°

49. $2\sin^{-1}\frac{1}{5} = \sin^{-1}\frac{2p\sqrt{6}}{5}$ হলে p এর মান কত? [Ans: b]
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$

50. $\tan^{-1}\sin\tan^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি?
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: (b); $\tan^{-1}\sin\tan^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$
$\Rightarrow \tan^{-1}\sin\ \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$
$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow 3x^2 - 2 + 2x^2 \therefore x = \sqrt{2}$

51. $\sin\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান— [Ans: d]
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

52. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = \sec x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \sec^{-1}x$ হবে? [Ans: c]
(a) $x \in [0, \pi]$ (b) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
(c) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (d) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

53. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x =$? [Ans: b]
(a) $\sqrt{1-x^2}$ (b) x (c) $\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

54. $\tan^{-1}6 + \tan^{-1}\frac{7}{5}$ এর মান- [Ans: c]
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

55. $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ এর মান– [Ans: c]
(a) 0 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) 2π

56. যদি $A+B+C=\pi, \tan^{-1}2 = A$ এবং $\tan^{-1}3 = B$ হয় তবে $C=?$ [Ans: c]

(a) 2 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

57. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান- [Ans: b]

(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

58. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এবং $5\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে $\sin 2\theta$ এবং $\sin 3\theta$ এর মান হবে যথাক্রমে– [Ans: b]

(a) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $-1, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $-1, \sqrt{2}$ (d) $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}$

59. $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right) = ?$ [Ans: a]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান**

01. উদ্দীপক-১: $M = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ **[DB'22]**

উদ্দীপক-২: $f(x) = \sin x$ ও $g(x) = \cos x$

(ক) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = 1$ হলে, দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$ 2

(খ) উদ্দীপকে-১ হতে দেখাও যে, M এর মান $\cot^{-1}\frac{1}{2}$ 4

(গ) $f(x) + g(x) = g(2x) + f(2x)$ সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

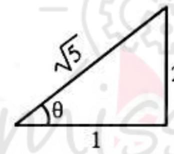
ক. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow xy - \sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2} = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow xy = \sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ **[Showed]**

খ. এখানে, $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1}\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$M = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$



$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}2 = \cot^{-1}\frac{1}{2}$ (দেখানো হলো)

গ. $f(x) + g(x) = g(2x) + f(2x) \Rightarrow \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x$

$\Rightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x \Rightarrow 2\sin\frac{3x}{2}.\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}$

হয়, $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi\,; n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2n\pi$ অথবা, $\sin\frac{3x}{2} = \cos\frac{3x}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{3x}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4} = (4n+1)\frac{\pi}{4} \therefore x = (4n+1)\frac{\pi}{6}$

02. দৃশ্যকল্প-১: $A = 3\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$. **[Ctg.B'22]**

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

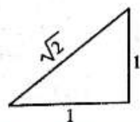
(ক) $\cos^{-1}\sin\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর মূখ্য মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $A = \tan^{-1}3$ · 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $2\{f(x)\}^2 - 11f(x) + 5 = 0$, সমীকরণটির সমাধান কর। যেখানে $0° \le x \le 2\pi$ · 4

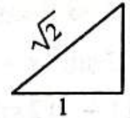
সমাধান

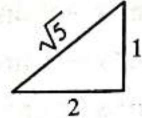
ক. $\cos^{-1}\sin\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$



খ. $A = 3\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{3}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right\} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ [$\because 3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$]





$= \sin^{-1}\left\{\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}}\right\} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan^{-1}3$

গ. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ এখন, $2\sin^2 x - 11\sin x + 5 = 0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x - 10\sin x - \sin x + 5 = 0 \Rightarrow 2\sin x(\sin x - 5) - 1(\sin x - 5) = 0$

$\Rightarrow 2\sin x = 1$ [$\sin x - 5 \neq 0$] $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$; $n \in \mathbb{Z}$

এখন,

n এর মান	$x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$	গ্রহণযোগ্য মান
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	$\frac{13\pi}{6}$	
3	$\frac{17\pi}{6}$	

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{\pi}{6}$ এবং $\frac{5\pi}{6}$

03. $\mathbf{A = \sec^{-1}\sqrt{5}}$, $\mathbf{B = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{p}{q}}$, $\mathbf{C = \sin^{-1} r}$ **[RB'22]**

$\mathbf{f(x) = \sin\alpha x}$, $\mathbf{g(x) = \sin\beta x}$.

(ক) দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$. 2

(খ) $\mathbf{p = 3, q = 5, r = \frac{1}{\sqrt{10}}}$ **হলে প্রমাণ কর যে,** $\mathbf{A - B + C = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$. 4

(গ) $\mathbf{\alpha = 1, \beta = 3}$ **হলে** $\mathbf{-\pi}$ **হতে** $\mathbf{\pi}$ **ব্যবধির মধ্যে** $\mathbf{2f(x).g(x) = 1}$ **সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. ধরি, $\tan^{-1}x = \theta \Rightarrow x = \tan\theta$

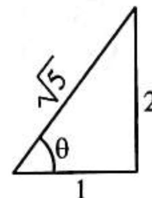
এখন, $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan^{-1}\tan 2\theta = 2\theta = 2\tan^{-1}x \therefore 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ **[Showed]**

খ. $p = 3, q = 5, r = \frac{1}{\sqrt{10}}$

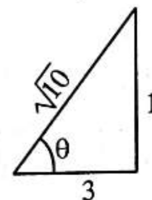
ধরি, $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta \Rightarrow \frac{3}{5} = \sin 2\theta$

এখন, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

$= \frac{\sin 2\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{3} \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$



$L.H.S = A - B + C = \sec^{-1}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$



$= \tan^{-1}2 - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 - \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}2$

$= \cot^{-1}\frac{1}{2} \therefore A - B + C = \cot^{-1}\frac{1}{2}$ (প্রমাণিত)

গ. $2\sin x.\sin 3x = 1 \Rightarrow 2\sin x(3\sin x - 4\sin^3 x) = 1$

$\Rightarrow 6\sin^2 x - 8\sin^4 x = 1 \Rightarrow 8\sin^4 x - 6\sin^2 x + 1 = 0$

$\Rightarrow 8\sin^4 x - 4\sin^2 x - 2\sin^2 x + 1 = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2 x(2\sin^2 x - 1) - 1(2\sin^2 x - 1) = 0$

হয়, $2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{4} = (4n \pm 1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $4\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6} \therefore x = (6n \pm 1)\frac{\pi}{6}$

n এর মান	$x = (4n \pm 1)\frac{\pi}{4}$	$x = (6n \pm 1)\frac{\pi}{6}$	গ্রহণযোগ্য মান
-2	$-\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{3}$	
-1	$-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
0	$\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
1	$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$
2	$\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$	

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$

04. $\mathbf{f(\theta) = \sin\theta}$ **[SB'22]**

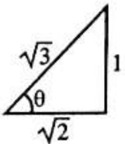
(ক) $\cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$ এর মান বের কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}(\sqrt{2}f(\theta)) + \sin^{-1}\left(\sqrt{f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}\right) = \frac{\pi}{2}$. 4

(গ) সমাধান কর: $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sqrt{3}f(\theta) = \sqrt{2}$ । 4

সমাধান

ক. $\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cos^2\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}$



খ. $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}\left(\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}\right) = \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \cos^{-1}\sqrt{1 - (\sqrt{\cos 2\theta})^2}$ $[\because \sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1 - x^2}]$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \cos^{-1}\sqrt{2\sin^2\theta} = \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \cos^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) = \frac{\pi}{2}$ **(Proved)**

গ. $f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sqrt{3}f(\theta)=\sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2\right.$ দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে$\left.\right]$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\sin\theta.\cos\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow 2\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{\theta+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$\therefore$ হয়, $\sin\frac{\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}}{2}=0 \Rightarrow \frac{\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}}{2}=n\pi; n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \theta-\frac{\pi}{12}=2n\pi$

$\Rightarrow \theta=(24n+1)\frac{\pi}{12}$ অথবা, $\cos\frac{\theta+\frac{5\pi}{12}}{2}=0 \Rightarrow \frac{\theta+\frac{5\pi}{12}}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \theta+\frac{5\pi}{12}=(2n+1)\pi \Rightarrow \theta=2n\pi+\frac{7\pi}{12} \therefore \theta=(24n+7)\frac{\pi}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(24n+1)\frac{\pi}{12}, (24n+7)\frac{\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$

05. দেওয়া আছে $\boldsymbol{\varphi(x)=\cos^{-1}x}$ এবং $\boldsymbol{h(\theta)=\cos\theta-\sin\theta}$ **[BB'22]**

(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)-\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{9}$. **2**

(খ) $\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi((z)=\pi$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. **4**

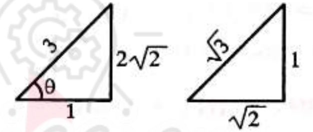
(গ) $(-\pi,\pi)$ ব্যবধিতে $h(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক.

$L.H.S=\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)-\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$=\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\cos^2\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{9}$ **(Proved)**



খ. $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi \Rightarrow \cos^{-1}\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)=\pi-\cos^{-1}z$

$\Rightarrow xy-\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}=-\cos(\cos^{-1}z) \Rightarrow xy+z=\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}$

$\Rightarrow x^2y^2+z^2+2xyz=1-x^2-y^2+x^2y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ **[Showed]**

গ. $h(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2}$ $[\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে পাই$]$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}.\sin\theta=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$(+)$ চিহ্ন নিয়ে, $\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=2n\pi+\frac{\pi}{12} \therefore \theta=(24n+1)\frac{\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$

$(-)$ চিহ্ন নিয়ে, $\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=2n\pi-\frac{7\pi}{12} \therefore \theta=(24n-7)\frac{\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$

n এর মান	$\theta=(24n+1)\frac{\pi}{12}$	$\theta=(24n-7)\frac{\pi}{12}$	গ্রহণযোগ্য মান
-2	$-\frac{47}{12}\pi$	$-\frac{55\pi}{12}$	
-1	$-\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{31\pi}{12}$	
0	$\frac{\pi}{12}$	$-\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$
1	$\frac{25\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	
2	$\frac{49\pi}{12}$	$\frac{41\pi}{12}$	

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$

06. $f(x) = \sin x$ এবং $g(y) = \cos y$. **[JB'22]**

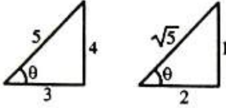
(ক) $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) $f(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + f(3x) = 1 + g(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ সমীকরণটির সমাধান কর। **4**

(গ) প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\frac{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \tan^{-1}\frac{f(\alpha)g(\beta)}{g\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ **4**

সমাধান

ক. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4\times1}{3\times2}} = \tan^{-1}\frac{11}{2}$



খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$ এবং $g(y) = \cos y$

প্রশ্নমতে, $f(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + f(3x) = 1 + g(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin 3x = 1 + \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \sin x + \sin 3x + \sin 2x = 1 + \cos 2x + \cos x$

$\Rightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x$

$\Rightarrow (2\cos x + 1)\sin 2x = (2\cos x + 1)\cos x$

$\Rightarrow (2\cos x + 1)\sin 2x - (2\cos x + 1)\cos x = 0$

$\Rightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$

$\Rightarrow (2\cos x + 1)(2\sin x\cos x - \cos x) = 0$

$\Rightarrow \cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

এবং $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

অথবা, $2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}\ [n \in \mathbb{Z}]$

গ. প্রমাণ করতে হবে যে,

$2\tan^{-1}\frac{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \tan^{-1}\frac{f(\alpha)g(\beta)}{g\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

$2\tan^{-1}\frac{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$

$= 2\tan^{-1}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right\}$

$= 2\tan^{-1}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)} = \tan^{-1}\frac{2\times\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}}{1-\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}} = \tan^{-1}\frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}\times\left\{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\times\left\{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right\}}{\left\{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right\}\left\{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right\}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha\, s\quad\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\beta}{\frac{1}{2}\times2\cos\left\{\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cos\left\{\frac{\alpha}{2}-\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}$

$= \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\left\{\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\alpha}{2}-\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}+\cos\left\{\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}} = \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\sin} = \tan^{-1}\frac{f(\alpha)g(\beta)}{f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+g\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$ **[Proved]**

07. উদ্দীপক-১: $f(x) = \cos x$. **[CB'22]**

উদ্দীপক-২: $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right) + \frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right) = \pi$.

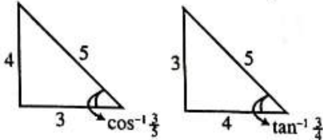
(ক) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $(-2\pi, 2\pi)$ ব্যবধিতে $f(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণটি সমাধান কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ হতে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = xyz$. 4

সমাধান

ক. $\cot\cos^{-1}\ \sin\tan^{-1}\frac{3}{4} = \cot\cos^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot\cos^{-1}\frac{3}{5} = \cot\cot^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**



খ. প্রদত্ত রাশি, $\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right.$ দ্বারা ভাগ করে$\left.\right]$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \therefore x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; '+' চিহ্ন নিয়ে $\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(4n + 1); n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{2}$; $n = 1$ হলে, $x = \frac{5\pi}{2} \notin (-2\pi, 2\pi)$; $n = -1$হলে $x = -\frac{3\pi}{2}$

$(-)$ চিহ্ন নিয়ে $x = 2n\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}(12n - 1); n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{6}$ [যখন $n = 0$]; $x = \frac{11\pi}{6}$ [$n = 1$]; $x = -\frac{13\pi}{6} \notin (-2\pi, 2\pi)$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণসমূহ $\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি $\cot^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+y^2}{1-y^2} + \frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1+z^2}{2z} = \pi \Rightarrow \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2z}{1+z^2} = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1}x + \frac{1}{2}2\tan^{-1}y + \frac{1}{2}2\tan^{-1}z = \pi \Rightarrow \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \pi \Rightarrow x + y + z - xyz = 0 \therefore x + y + z = xyz$ **(Proved)**

08. দৃশ্যকল্প-১: $2\sin^2\theta - 2 = \cos 2\theta$ **[Din.B'22]**

দৃশ্যকল্প-২: $f(y) = \tan^{-1}y$.

(ক) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণ নির্ণয় কর যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\{2f(x)\} = 2\tan\{f(x) + f(x^3)\}$. 4

সমাধান

ক. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

খ. দেওয়া আছে, $2\sin^2\theta - 2 = \cos 2\theta \Rightarrow 2\sin^2\theta - 1 - 1 = \cos 2\theta$

$\Rightarrow -\cos 2\theta - 1 = \cos 2\theta \Rightarrow 2\cos 2\theta = -1$

$\Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $[n \in \mathbb{Z}]$

$n = -2$ হলে; $\theta = -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$; $n = -1$ হলে; $\theta = -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$; $n = 0$ হলে; $\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে; $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; $n = 2$ হলে; $\theta = \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \because -2\pi \le \theta \le 2\pi \ \therefore \theta = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

গ. দেওয়া আছে, $f(y) = \tan^{-1} y$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan\{2f(x)\} = 2\tan\{f(x) + f(x^3)\}$

$L.H.S = \tan\{2f(x)\} = \tan\{2\tan^{-1} x\} = \tan\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$

$R.H.S = 2\tan\{f(x) + f(x^3)\} = 2\tan\{\tan^{-1} x + \tan^{-1} x^3\} = 2\tan\left(\tan^{-1}\frac{x+x^3}{1-x^4}\right)$

$= 2 \times \frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2x}{1-x^2}$ $\therefore L.H.S = R.H.S$

$\therefore \tan\{2f(x)\} = 2\tan\{f(x) + f(x^3)\}$ [প্রমাণিত]

09. $\mathbf{f(x) = cosx}$ **একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।** [MB'22]

(ক) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{y}$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{y}$ [যেখানে, $x > 0, y > 0,\ 0 < xy < 1$] 2

(খ) যদি $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. 4

(গ) $f(x) + \sqrt{3}\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$ হলে সমীকরণটির সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. প্রশ্নমতে, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cot^{-1}\frac{1-xy}{x+y} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1-xy}{x+y} = \cot\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow 1 - xy = 0 \Rightarrow xy = 1 \therefore x = \frac{1}{y}$ [দেখানো হলো]

খ. প্রশ্নমতে, $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1}(2x) + \cos^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(4xy - \sqrt{(1-4x^2)(1-4y^2)}\right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 4xy - \sqrt{1 - 4x^2 - 4y^2 + 16x^2y^2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow 4xy = \sqrt{1 - 4x^2 - 4y^2 + 16x^2y^2} \Rightarrow 16x^2y^2 = 1 - 4x^2 - 4y^2 + 16x^2y^2 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ **(Showed)**

গ. প্রশ্নমতে, $f(x) + \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}\ [n \in \mathbb{Z}]$ $\therefore x = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}\ [n \in \mathbb{Z}]$

10. $\mathbf{g(x) = cosx; h(x) = sinx.}$ [DB'21]

(ক) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$ এর সাধারণ সমাধান বের কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে $\sqrt{3}g(\theta) + g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1$ সমীকরণটি সমধান কর। যখন $0 < \theta < 2\pi$. 4

(গ) $g\{\pi h(\theta)\} = h\{\pi g(\theta)\}$ হলে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\sqrt{7}$. 4

সমাধান

ক. $\cos 2\theta + \sin\theta = 1 \Rightarrow 1 - 2\sin^2\theta + \sin\theta = 1$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta = 0 \therefore \theta = n\pi$; অথবা, $\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi$ অথবা $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ [যেখানে, $n \in \mathbb{Z}$]

খ. $\sqrt{3}g(\theta)+g\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=1 \Rightarrow \sqrt{3}\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=1 \Rightarrow \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

হয়, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ অথবা, $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{6}$

n	$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$\theta=2n\pi-\frac{\pi}{6}$	গ্রহণযোগ্য মান
0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
1	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$

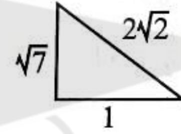
$\therefore \theta=\frac{\pi}{2},\frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

গ. $g\{\pi h(\theta)\}=h\{\pi g(\theta)\} \Rightarrow \cos(\pi h(\theta))=\sin(\pi g(\theta))$

$\Rightarrow \cos(\pi\sin\theta)=\sin(\pi\cos\theta) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta)=\sin(\pi\cos\theta)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta=\pi\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\pm\sin\theta=\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}=\cos\theta\pm\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta\cos\frac{\pi}{4}\pm\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$



$\Rightarrow \cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \theta\pm\frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow \theta\pm\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}(\sqrt{7}) \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}(\sqrt{7})$ **(Showed)**

11. $\mathbf{f(x)=\cos x; h(x)=\tan^{-1}x}$ **[DB'21]**

(ক) প্রমাণ কর: $\cot^{-1}(\tan2\varphi)+\cot^{-1}(-\tan3\varphi)=\varphi$. 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে সমাধান কর: $(2+\sqrt{3})f(2\theta)=1-f\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$. 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $2h\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)=\cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$ 4

সমাধান

ক. L.H.S $=\cot^{-1}(\tan2\varphi)+\cot^{-1}(-\tan3\varphi)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan2\varphi}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{-\tan3\varphi}\right)$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{\tan2\varphi}+\left(-\frac{1}{\tan3}\right)}{1-\frac{1}{\tan2\varphi}\cdot\left(\frac{-1}{\tan3}\right)}=\tan^{-1}\frac{\frac{\tan3\varphi-\tan2\varphi}{\tan2\varphi\tan3\varphi}}{\frac{\tan2\varphi\tan3\varphi+1}{\tan2\varphi\tan3\varphi}}$

$=\tan^{-1}\frac{\tan3\varphi-\tan2\varphi}{1+\tan2\varphi\tan3\varphi}=\tan^{-1}\{\tan(3\varphi-2\varphi)\}$

$=\tan^{-1}\tan\varphi=$ R.H.S **[Proved]**

Alternative:

$=\cot^{-1}(\tan2\varphi)-\cot^{-1}(\tan3\varphi)$

$=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(\tan2\varphi)-\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}(\tan3\varphi)\right)$

$=\frac{\pi}{2}-2\varphi-\left(\frac{\pi}{2}-3\varphi\right)=\frac{\pi}{2}-2\varphi-\frac{\pi}{2}+3\varphi$

$=\varphi=$ R.H.S

খ. $(2+\sqrt{3})\cos2\theta=1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)=1-\sin2\theta$

$(2+\sqrt{3})\cos2\theta+\sin2\theta=1 \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(4+4\sqrt{3}+3)+1}}\cos2\theta+\frac{1}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}\sin2\theta=\frac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$

$\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}\cos2\theta+\frac{1}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}\sin2\theta=\frac{1}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}$

$\Rightarrow \cos\alpha\cos2\theta+\sin\alpha\sin2\theta=\sin\alpha$ $\left[\cos\alpha=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}, \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} \therefore \tan\alpha=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow \cos(2\theta-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \Rightarrow 2\theta-\alpha=2n\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

হয়, $2\theta-\alpha=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha \Rightarrow \theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$

অথবা, $2\theta-\alpha=2n\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha \Rightarrow 2\theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}+2\alpha \therefore \theta=n\pi-\frac{\pi}{4}+\alpha$ যেখানে, $\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

গ. $L.H.S = 2h\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$= \cos^{-1}\frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}} = \cos^{-1}\frac{(a+b)-(a-b)\tan^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)+(a-b)\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{a\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)} = \cos^{-1}\frac{a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)+b}{a+b\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)}$

$= \cos^{-1}\frac{a\cos(2.\theta/2)+b}{a+b\cos(2.\theta/2)} = \cos^{-1}\frac{a\cos\theta+b}{a+bco} = \cos^{-1}\frac{af(\theta)+b}{a+bf(\theta)} = R.H.S$ [Proved]

12. $f(a) = \tan^{-1}a, g(a) = \sin a.$ **[RB'21]**

(ক) $f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $2f\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \sec^{-1}\frac{x+yg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{y+xg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ 4

(গ) সমাধান কর: $g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ 4

সমাধান

ক. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5+3}{14}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{14}\right) = \tan^{-1}\frac{4}{7}$ (**Ans**)

খ. $L.H.S = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{1-\frac{x-y}{x+y}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{x-y}{x+y}\tan^2\frac{\theta}{2}} = \cos^{-1}\frac{x+y-(x-y)\tan^2\frac{\theta}{2}}{x+y+(x-y)\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{x\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+y\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{x\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+y\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)} = \cos^{-1}\frac{y+x.\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{x+y.\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}} = \cos^{-1}\frac{y+x\cos\theta}{x+y\,co} = \sec^{-1}\frac{x+y\,si\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{y+x\,si\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$= \sec^{-1}\frac{x+yg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{y+xg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = R.H.S$ (**Showed**)

গ. $g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x+\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \therefore x-\frac{\pi}{4} = 2n\pi\pm\frac{\pi}{3}; n\in\mathbb{Z}$

$(+) \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} = 2n\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2n\pi+\frac{7\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$ (**Ans.**)

$(-) \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} = 2n\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2n\pi-\frac{\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$ (**Ans.**)

13. $f(x) = \sin x.$ **[RB'21]**

(ক) $\sin\tan^{-1}\cos\sec^{-1}y$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $f\left(\pi f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+\pi f(\theta)\right)$ হলে, দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}.$ 4

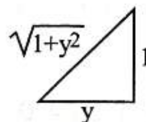
(গ) সমাধান কর: $1+f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-6x\right) = 0$ 4

সমাধান

ক.

$\sin\tan^{-1}\cos\cos^{-1}\frac{1}{y} = \sin\tan^{-1}\frac{1}{y}$

$= \sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ (**Ans.**)



খ. দেওয়া আছে, $\sin\left(\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)\Rightarrow\sin(\pi\cos\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)$

$\Rightarrow\pi\cos\theta=\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\pm\sin\theta\Rightarrow\cos\theta\pm\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow1\pm\sin2\theta=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\ \pm\sin2\theta=-\frac{3}{4}\Rightarrow\sin2\theta=\pm\frac{3}{4}\Rightarrow2\theta=\sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)\Rightarrow2\theta=\pm\sin^{-1}\frac{3}{4}\Rightarrow\theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ **(Showed)**

গ. $1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)=0\Rightarrow1+\cos2x+\cos4x+\cos6x=0$

$\Rightarrow2\cos^2 2x+2\cos4x\cos2x=0\Rightarrow\cos2x(\cos2x+\cos4x)=0\Rightarrow2\cos2x\cos3x\cos x=0$

$\therefore x=(2n+1)\frac{\pi}{2};n\in\mathbb{Z};x=(2n+1)\frac{\pi}{6};n\in\mathbb{Z};x=(2n+1)\frac{\pi}{4};n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

14. উদ্দীপক: $\mathbf{f(x)=\sin x}$ এবং $\mathbf{g(x)=\cos x}$ **[Ctg.B'21]**

$\mathbf{A=\sin^{-1}\frac{3}{5},B=\cos^{-1}\frac{5}{13},C=\cot^{-1}2,D=\tan^{-1}\frac{28}{29}}$.

(ক) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{cosec^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)-3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})=1}$. 2

(খ) $\mathbf{f\left(\pi\,g\,(x)\right)=g\left(\pi\,f\,(x)\right)}$ হলে দেখাও যে, $\mathbf{\theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}}$. 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{2A+B=2(C+D)}$. 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 10 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $\text{L.H.S}=2A+B\Rightarrow2\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{5}{13}=2\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{12}{5}=\tan^{-1}\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\tan^{-1}\frac{12}{5}$

$=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}+\tan^{-1}\frac{12}{5}=\tan^{-1}\frac{24}{7}+\tan^{-1}\frac{12}{5}$

$=\pi+\tan^{-1}\frac{\frac{24}{7}+\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{24}{7}\times\frac{12}{5}\right)}$ [xy > 1 হলে, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\pi+\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$]

(ত্রিভুজ: লম্ব 3, ভূমি 4, অতিভুজ 5; লম্ব 12, ভূমি 5, অতিভুজ 13)

$=\pi+\tan^{-1}\frac{\frac{204}{35}}{1-\frac{288}{35}}=\pi+\tan^{-1}\frac{\frac{204}{35}}{-\frac{253}{35}}=\pi-\tan^{-1}\frac{204}{253}$

$\text{R.H.S}=2(C+D)=2\left(\cot^{-1}2+\tan^{-1}\frac{28}{29}\right)=2\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{28}{29}\right)=2\left(\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{28}{29}}{1-\frac{14}{29}}\right)=2\tan^{-1}\frac{\frac{85}{58}}{\frac{15}{29}}$

$=2\tan^{-1}\frac{17}{6}=\pi+\tan^{-1}\frac{2\times\frac{17}{6}}{1-\left(\frac{17}{6}\right)^2}=\pi+\tan^{-1}\frac{\frac{17}{3}}{1-\frac{289}{36}}=\pi+\tan^{-1}\frac{\frac{17}{3}}{-\frac{253}{36}}$

$=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{204}{-25}\right)=\pi-\tan^{-1}\frac{204}{253}$. $\therefore$ L.H.S = R.H.S **[Proved]**

15. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{a\sin x+b\cos x=1}$. **[Ctg.B'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{f(x)=\cos x}$.

(ক) সমাধান কর: $\mathbf{\tan^2\theta-3\,cosec^2\theta+1=0}$. 2

(খ) $\mathbf{a=\sqrt{3}}$ এবং $\mathbf{b=1}$ হলে দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণটি সমাধান কর, যেখানে $\mathbf{-2\pi<x<2\pi}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $\mathbf{f(x)+f(3x)+f(5x)+f(7x)=0}$ সমীকরণটি সমাধান কর, যেখানে $\mathbf{0<x<\pi}$. 4

সমাধান

ক. $\tan^2\theta-3\,cosec^2\theta+1=0\Rightarrow(1+\tan^2\theta)-3\,cosec^2\theta=0\Rightarrow\sec^2\theta=3\,cosec^2\theta\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{3}{\sin^2\theta}$

$\Rightarrow\tan^2\theta=3\Rightarrow\tan\theta=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\tan\theta=\pm\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\tan\theta=\tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\therefore\ \theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ. $a = \sqrt{3}$ ও $b = 1$ হলে, $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

হয়, $x = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$ | অথবা, $x = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

	$x = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$	$x = 2n\pi$	গ্রহণযোগ্য মান $(-2\pi < x < 2\pi)$
$n = 0$	$2\frac{\pi}{3}$	0	$0, \frac{2\pi}{3}$
$n = 1$	$\frac{8\pi}{3}$	2π	কোনোটিই নয়
$n = -1$	$-\frac{4\pi}{3}$	-2π	$-\frac{4\pi}{3}$

$\therefore x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}$ **(Ans.)**

গ. $f(x) + f(3x) + f(5x) + f(7x) = 0 \Rightarrow \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$

$\Rightarrow (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 0 \Rightarrow 2\cos 4x \cos 3x + 2\cos 4x \cos x = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4x(\cos 3x + \cos x) = 0 \Rightarrow \cos 4x \times 2\cos 2x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 4x \cos 2x \cos x = 0$

হয়,
$\cos 4x = 0$
$\Rightarrow 4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা,
$\cos 2x = 0$
$\Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
$\therefore x = (2n+1).\frac{\pi}{4}$

অথবা,
$\cot x = 0$
$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$n \in \mathbb{Z}$

	$x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$	$x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$	$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$	গ্রহণযোগ্য মান $0 < x < \pi$
$n = 0$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
$n = 1$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}$
$n = 2$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$
$n = 3$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{8}$

$\therefore x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

16. দৃশ্যকল্প-১: $P = \sec^{-1}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1} 3.$ **[SB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\cos^{-1}\frac{m}{a} + \cos^{-1}\frac{n}{b} = x.$

(ক) $\sec^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{4}\right) + \tan^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $P = \tan^{-1} 2.$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $\frac{m^2}{a^2} - \frac{2mn}{ab}\cos x + \frac{n^2}{b^2} = \sin^2 x$ 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ.

$P = \sec^{-1}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1} 3$

$= \tan^{-1}(\sqrt{5-1}) - \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1} 2 - \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1} 2$ $\therefore P = \tan^{-1} 2$ **(Proved)**

ধরি, $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3}{5}$

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

গ. $\cos^{-1}\frac{m}{a}+\cos^{-1}\frac{n}{b}=x$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{mn}{ab}-\sqrt{\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{b^2}\right)}\right)=x \Rightarrow \frac{mn}{ab}-\frac{\sqrt{(a^2-m^2)(b^2-n^2)}}{ab}=\cos x$

$\Rightarrow mn-ab\cos x=\sqrt{(a^2-m^2)(b^2-n^2)}$

$\Rightarrow m^2n^2-2abmn\cos x+a^2b^2\cos^2 x=a^2b^2-a^2n^2-m^2b^2+m^2n^2$

$\Rightarrow m^2b^2-2ab\,mn\cos x+a^2n^2=a^2b^2(1-\cos^2 x)$

$\Rightarrow m^2b^2-2abmn\cos x+a^2n^2=a^2b^2\sin^2 x$

$\Rightarrow \frac{m^2}{a^2}-\frac{2mn}{ab}\cos x+\frac{n^2}{b^2}=\sin^2 x$ **(Showed)**

17. $f(x)=\sin x$ ও $g(x)=\cos x$ **[SB'21]**

(ক) সমাধান কর: $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sqrt{3}$ 2

(খ) সমাধান কর: $f(x)+g(x)=f(2x)+g(2x)$. 4

(গ) সমাধান কর: $4g(x)g(2x)g(3x)=1$, যখন $0<x<\pi$ 4

সমাধান

ক. $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sqrt{3}\Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore 2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=n\pi\pm\frac{\pi}{12}; n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ. $\sin x+\cos x=\sin 2x+\cos 2x\Rightarrow \cos x-\cos 2x=\sin 2x-\sin x$

$\Rightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\Rightarrow \sin\frac{x}{2}\left\{\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right\}=0$

$\therefore \sin\frac{x}{2}=0$

$\Rightarrow x=2n\pi; n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

$\sin\frac{3x}{2}=\cos\frac{3x}{2}\Rightarrow \tan\frac{3x}{2}=1$

$\Rightarrow \frac{3x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}; n\in\mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ. $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1\Rightarrow 2\{\cos 4x+\cos 2x\}\cos 2x=1$

$\Rightarrow 2\cos 4x\cos 2x+2\cos^2 2x-1=0\Rightarrow 2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x=0$

$\Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x+1)=0\ \therefore \cos 4x=0\Rightarrow x=(2n+1)\frac{\pi}{8}; n\in\mathbb{Z}$

আবার, $\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}\ \therefore 2x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}; n\in\mathbb{Z}$

১ম ক্ষেত্রে, $n=0,1,2,3$ বসিয়ে $x=\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}$

২য় ক্ষেত্রে, $n=0,1$ বসিয়ে $x=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\ \therefore x=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{2\pi}{8}$ **(Ans.)**

18. উদ্দীপক-১: $\sec\alpha=\frac{p}{x}, \sec\beta=\frac{q}{y}$. **[BB'21]**

উদ্দীপক-২: $f(x)=\sec x$.

(ক) $\sec^2(\cot^{-1}1)+\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ $\alpha+\beta=\gamma$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-\frac{2xy}{pq}\cos\gamma=\sin^2\gamma$. 4

(গ) উদ্দীপক-২ এর আলোকে $f(x).f(3x)+2=0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\sec\alpha = \frac{p}{x} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{p}$; $\sec\beta = \frac{q}{y} \Rightarrow \cos\beta = \frac{y}{q} \therefore \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}} \therefore \cos\beta = \frac{y}{q}$

$\cos(\gamma-\alpha) = \frac{y}{q} \Rightarrow \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha = \frac{y}{q} \Rightarrow \cos\gamma \times \frac{x}{p} + \sin\gamma\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}}\right) = \frac{y}{q}$

$\Rightarrow \left\{\sin\gamma\left(\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}}\right)\right\}^2 = \left(\frac{y}{q} - \cos\gamma\frac{x}{p}\right)^2 \Rightarrow \sin^2\gamma - \frac{x^2}{p^2}\sin^2\gamma = \frac{y^2}{q^2} - \frac{2xy}{pq}\cos\gamma + \frac{x^2}{p^2}\cos^2\gamma$

$\Rightarrow \frac{y^2}{q^2} - \frac{2xy}{pq}\cos\gamma + \frac{x^2}{p^2}(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = \sin^2\gamma \Rightarrow \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{2xy}{pq}\cos\gamma = \sin^2\gamma$ $[\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1]$ **(Proved)**

গ. $f(x).f(3x) + 2 = \sec x.\sec(3x) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x\cos 3x} + 2 = 0$ $[\cos x \neq 0 ; \cos 3x \neq 0]$

$\Rightarrow 2\cos 3x.\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos(3x+x) + \cos(3x-x) = -1$

$\Rightarrow \cos 2x = -(1+\cos 4x) \Rightarrow \cos 2x = -(2\cos^2 2x) \Rightarrow \cos 2x(1 + 2\cos 2x) = 0$

$\therefore \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

অথবা, $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{3} = (3n \pm 1)\frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

19. উদ্দীপক-১: $A = \cot^{-1} 7, B = \cot^{-1} 3,\ g(A) = \cos 2A, h(B) = \sin 4B.$ **[BB'21]**

উদ্দীপক-২: $f(\alpha) = \cos\alpha, g(\alpha) = \sin 2\alpha, h(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

(ক) $\cos^{-1}\tan\cot^{-1}\sqrt{2}$ এর মুখ্যমান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ প্রমাণ কর যে, $A = g^{-1}\{h(B)\}$. 4

(গ) উদ্দীপক-২ এর আলোকে সমাধান কর: $f(\alpha) + g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = h(\alpha)$, যখন $-2\pi \leq \alpha \leq 2\pi$. 4

সমাধান

ক. $\cos^{-1}\tan\cot^{-1}\sqrt{2} = \cos^{-1}\left\{\frac{1}{\cot(\cot^{-1}\sqrt{2})}\right\} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ **(Ans)**

খ. এখানে, $g(A) = \cos 2A = \cos 2\ (\cot^{-1} 7) = \frac{1-\tan^2(\cot^{-1}7)}{1+\tan^2(\cot^{-1}7)} = \frac{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)}{1+\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)} = \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}} = \frac{24}{25}$

$h(B) = \sin 4B = \sin 4(\cot^{-1} 3) = 2\sin(2\cot^{-1}3)\cos(2\cot^{-1}3)$

$= 2\left\{\frac{2\tan(\cot^{-1}3)}{1+\tan^2(\cot^{-1}3)}\right\}\left\{\frac{1-\tan^2(\cot^{-1}3)}{1+\tan^2(\cot^{-1}3)}\right\} = 2 \times \left\{\frac{2\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1+\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}\right\}\left\{\frac{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1+\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}\right\} = 2 \times \left\{\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}\right\}\left\{\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}\right\} = 2 \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$\therefore g(A) = h(B) ; g^{-1}\{g(A)\} = g^{-1}\{h(B)\} \Rightarrow A = g^{-1}\{h(B)\}$ **(Proved)**

গ. $f(\alpha) + g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = h(\alpha) ; -2\pi \leq \alpha \leq 2\pi \Rightarrow \cos\alpha + \sin\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ $\left[\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \therefore \alpha - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3}$

'+' নিয়ে, $\alpha = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$; '–' নিয়ে, $\alpha = 2n\pi - \frac{\pi}{12}$

n	$2n\pi + \frac{7\pi}{12}$	$2n\pi - \frac{\pi}{12}$
−1	$-\frac{17}{12}\pi$	
0	$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{12}$
1		$\frac{23\pi}{12}$

$\therefore \alpha = -\frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$

20. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{f(\theta) = \sin\theta}$. **[JB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{A = \text{cosec}^{-1}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}}$.

(ক) দেখাও যে, $\mathbf{\sec^2(\tan^{-1}\sqrt{15}) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}\sqrt{13}) = 30}$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে $\mathbf{2f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).f\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) + 1 = 0}$ সমীকরণের সমাধান কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে দেখাও যে, $\mathbf{A = \tan^{-1}\frac{11}{27}}$. 4

সমাধান

ক. $\text{L.H.S} = \sec^2(\tan^{-1}\sqrt{15}) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}\sqrt{13})$

$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}\sqrt{15}) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}\sqrt{13})$

$= 1 + (\sqrt{15})^2 + 1 + (\sqrt{13})^2 = 30 = \text{R.H.S}$ **(Showed)**

খ. $2f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).f\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta\cos 3\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos 4\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 2\theta + \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta\,(2\cos 2\theta + 1) = 0$

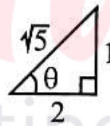
$\therefore \cos 2\theta = 0 \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}\ ; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

$\cos 2\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = \cos\frac{2\pi}{3}\ ; \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}\ ; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ. ধরি, $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta \therefore \sin 2\theta = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta} = \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{1}{3} \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$



$\text{L.H.S} = A = \text{cosec}^{-1}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{4}$

$= \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2.4.(-3)}}{1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8}}\right\}$

$= \tan^{-1}\frac{11}{27} = \text{R.H.S}$ **(Showed)**

21. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{q = \cos^{-1}p}$. **[JB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{f(x) = \sin x}$.

(ক) $\mathbf{\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}}$ এর মান বের কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\mathbf{q = \cos^{-1}p}$ এর $\mathbf{-1 \le p \le 1}$ ব্যবধিতে লেখচিত্র অঙ্কন কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $\mathbf{2\{f(x)\}^2 + 5f(x) - 3 = 0}$ সমীকরণটির সমাধান কর। 4

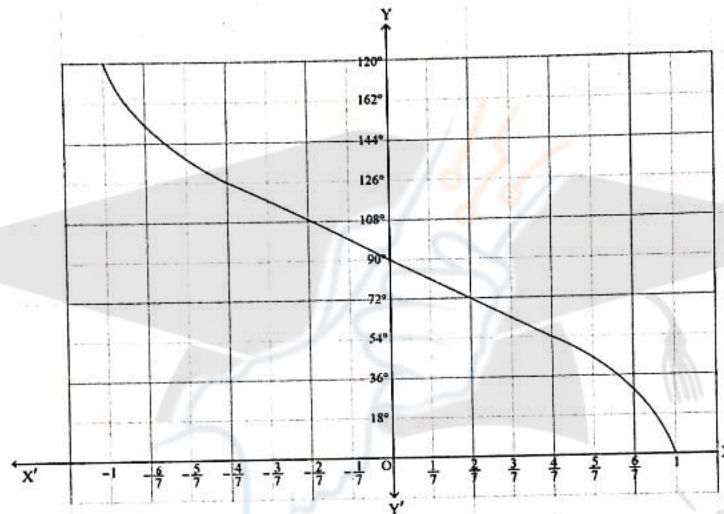
সমাধান

ক. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\times\frac{6}{5}\right)=\frac{\pi}{4}$ **(Ans)**

খ. ধরি, $q=\cos^{-1}p$ এখানে, $-1\le p\le 1$ ব্যবধিতে p এর বেশ কিছু মানের জন্য q এর মান নিম্নরূপ–

P	-1	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$
$\cos^1 p$	180°	149°	135.6°	124.9°	115.4°	106.6°	98.2°

0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1
90°	81.8°	74.4°	64.6°	55.1°	44.4°	31°	0°



ছক কাগজে x অক্ষ XOX′ বরাবর P এবং y অক্ষ YOY′ বরাবর q এর মান বসানো হয়েছে। x অক্ষ বরাবর 35 ক্ষুদ্র বর্গ ঘর = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর 5 ক্ষুদ্র বর্গঘর = 18 একক ধরা হয়েছে।

গ. $2\sin^2 x+5\sin x-3=0\Rightarrow 2\sin^2 x+6\sin x-\sin x-3=0$
$\Rightarrow 2\sin x(\sin x+3)-(\sin x+3)=0\Rightarrow(\sin x+3)(2\sin x-1)=0$
$\sin x\neq -3\therefore \sin x=\frac{1}{2};\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\therefore x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6};n\in\mathbb{Z}$

22. $\mathbf{f(x)=\sin x}$ **[CB'21]**

(ক) $\cos\left(2\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\,f(\theta)\right)+\sin^{-1}\left(\sqrt{f\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}\right)=\frac{\pi}{2}$. 4

(গ) সমাধান কর: $f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+f(\theta)=f\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+f(2\theta)$. 4

সমাধান

ক. $\cos\left(2\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)=\frac{1-\tan^2\left(\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)}{1+\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)}=\frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{5}{13}$

খ. $\sin^{-1}(\sqrt{2}\,f(\theta))+\sin^{-1}\left(\sqrt{f\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}\right)=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)+\sin^{-1}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}$
$=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)+\sin^{-1}\sqrt{\cos 2\theta}$
$=\sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-\cos 2\theta}+\sqrt{\cos 2\theta}\ \sqrt{1-2\sin^2\theta}\}$
$[\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})]$
$=\sin^{-1}\{(\sqrt{2}\sin\theta)(\sqrt{2}\sin\theta)+(\sqrt{\cos 2\theta})(\sqrt{\cos 2\theta})\}$
$=\sin^{-1}(2\sin^2\theta+\cos 2\theta)=\sin^{-1}(2\sin^2\theta+1-2\sin^2\theta)=\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$ **(Showed)**



গ. $f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+f(\theta)=f\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+f(2\theta) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)+\sin 2\theta$

$\Rightarrow \sin\theta+\cos\theta=\sin 2\theta+\cos 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta-\sin\theta=\cos\theta-\cos 2\theta$

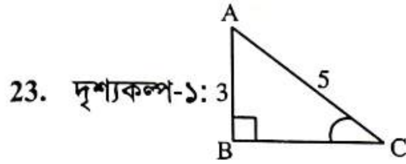
$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{2\theta-\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\theta+\theta}{2}\right)=2\sin\left(\frac{2\theta-\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{2\theta+\theta}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right)=0$

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=0$

$\therefore \frac{\theta}{2}=n\pi$ বা, $\theta=2n\pi$

অথবা, $\cos\frac{3\theta}{2}=\sin\frac{3\theta}{2}$ বা, $\tan\frac{3\theta}{2}=1=\tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{3\theta}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা, $\theta=(4n+1)\times\frac{\pi}{6}$

23. দৃশ্যকল্প-১: 

[CB'21]

দৃশ্যকল্প-২: $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1$.

(ক) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\angle ACB=2x$ হলে $\cot^{-1}3-x$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটি $0<x<\pi$ ব্যবধিতে সমাধান কর। 4

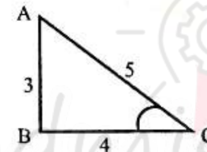
সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. এখানে, $\sin\angle ACB=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow 3\tan^2 x-10\tan x+3=0 \Rightarrow 3\tan^2 x-9\tan x-\tan x+3=0$

$\Rightarrow (3\tan x-1)(\tan x-3)=0 \therefore \tan x=\frac{1}{3}$ অথবা $\tan x=3$



কিন্তু $2x$ সূক্ষ্মকোণ ও $\tan 2x=\frac{3}{4}<3$

$\therefore \tan x\neq 3 \therefore \tan x=\frac{1}{3}$ বা, $x=\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\therefore \cot^{-1}3-x=\cot^{-1}3-\tan^{-1}\frac{1}{3}=\cot^{-1}3-\cot^{-1}3=0$ **(Ans.)**

গ. $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1 \Rightarrow 2\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)=1 \Rightarrow 2\cos 2x\cos 4x=1-2\cos^2 2x$

$\Rightarrow 2\cos 2x\cos 4x=-\cos 4x$ $[\because \cos 2x=2\cos^2 x-1]$

$\Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x+1)=0$

$\therefore \cos 4x=0 \therefore 4x=n\pi+\frac{\pi}{2}$

বা, $x=\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

অথবা $2\cos 2x=-1$ বা, $\cos 2x=-\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore 2x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$; $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

x	$\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$	$n\pi+\frac{\pi}{3}$	$n\pi-\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	×
1	$\frac{3\pi}{8}$	×	$\frac{2\pi}{3}$

$\therefore x=\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

24. $N=\tan^{-1}(\text{cosec}\tan^{-1}x-\tan\cot^{-1}x)$ এবং $f(\theta)=\cos\theta$. [Din.B'21]

(ক) যদি $x=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4}$ হয়, তবে $\tan x$ এর মান কত হবে? 2

(খ) দেখাও যে, $N=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$. 4

(গ) সমাধান কর: $f(\theta)+f(2\theta)+f(3\theta)=0$, যখন $-2\pi\leq\theta\leq 2\pi$. 4

সমাধান

ক. $x = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow 2x = \cos^{-1}\frac{3}{4} \Rightarrow \cos2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 x} = 7 \Rightarrow \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ **(Ans.)**

খ. $N = \tan^{-1}(\text{cosec}\tan^{-1}x - \tan\cot^{-1}x) = \tan^{-1}\left\{\text{cosec}\,\text{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \tan\tan^{-1}\frac{1}{x}\right\}$

$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2(\sqrt{1+x^2}-1)}{x\left\{1-\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}\right\}}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2-\{1+x^2-2\sqrt{1+x^2}+1\}} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x(\sqrt{1+x^2}-1)}{2\sqrt{1+x^2}-2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \therefore N = \frac{1}{2}\tan^{-1}(x)$ (দেখানো হলো)

গ. $\cos\theta + \cos2\theta + \cos3\theta = 0 \Rightarrow 2\cos2\theta\cos\theta + \cos2\theta = 0 \Rightarrow \cos2\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

এখানে, $\cos2\theta = 0 \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{N}$ আবার, $\cos\theta = -\frac{1}{2} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

১ম ক্ষেত্রে $n = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, -4$ বসিয়ে পাই, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$

২য় ক্ষেত্রে $n = 0, 1, -1$ বসিয়ে পাই, $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3} \therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}, +\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

25. **দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \sin x$** **[Din.B'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \cos^{-1}x$.

(ক) $\cot^{-1}x + \cot^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ হলে, দেখাও যে, $xy = 1$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে সমাধান কর: $2g(\pi - x)g(3x) = 1$, যখন $\theta \leq x \leq 2\pi$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $f(x) + f(y) + f(z) = \pi$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. 4

সমাধান

ক. 09 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $2\sin x\sin3x = 1 \Rightarrow \cos2x - \cos4x = 1 \Rightarrow \cos2x = 1 + \cos4x$

$\Rightarrow \cos2x = 2\cos^2 2x \Rightarrow \cos2x\{2\cos2x - 1\} = 0$

$\therefore \cos2x = 0 \therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$ | $\cos2x = \frac{1}{2}; x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

$0 \leq x \leq 2\pi$ হওয়ায় ১ম ক্ষেত্রে $n = 0, 1, 2, 3$ বসিয়ে- $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

২য় ক্ষেত্রে $n = 0, 1, 2$ বসিয়ে, $x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

গ. প্রশ্নমতে, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi \Rightarrow \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\} = \pi - \cos^{-1}z$

$\Rightarrow xy - \sqrt{1 - y^2 - x^2 + x^2y^2} = -z \Rightarrow xy + z = \sqrt{1 - y^2 - x^2 + x^2y^2}$

$\Rightarrow x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - y^2 - x^2 + x^2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ **(showed)**

26. $f(x) = \text{cosec}\,x - \cot x, g(x) = \sin x$. **[MB'21]**

(ক) দেখাও যে, $\text{cosec}\sin^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y} = \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. 2

(খ) $f(\theta) = \frac{3}{4}$ হলে, দেখাও যে, $\theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$. 4

(গ) $g(5\theta) - \sqrt{3}g(\theta) = g(3\theta)$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $f(\theta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{3}{4}$ ……… (i); আবার, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\Rightarrow (\text{cosec}\theta - \cot\theta)(\text{cosec}\theta + \cot\theta) = 1 \Rightarrow \text{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{4}{3}$ ……..(ii)

(ii) - (i) $\Rightarrow 2\cot\theta = \frac{7}{12} \Rightarrow \cot^2\theta = \frac{49}{576} \Rightarrow \text{cosec}^2\theta = 1 + \frac{49}{576} \Rightarrow \text{cosec}^2\theta = \frac{625}{576}$

$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{576}{625} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{24}{25} \therefore \theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$ **(Showed)**

গ. $\text{Sin}5\theta - \sqrt{3}\sin\theta = \sin3\theta \Rightarrow \sin5\theta - \sin3\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos4\theta = \sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta(2\cos4\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$ হলে $\theta = n\pi; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

আবার, $2\cos4\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \cos4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 4\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

27. $\mathbf{f(x) = \cos x, A = \sec^{-1}\frac{2}{x}, B = \sec^{-1}\frac{3}{y}}$. **[MB'21]**

(ক) সমাধান কর: $\mathbf{\tan 2x - \tan x = 0}$. **2**

(খ) সমাধান কর: $\mathbf{\sqrt{2}f(x) - \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1}$; যখন $\mathbf{-\pi < x < \pi}$. **4**

(গ) দেখাও যে, $\mathbf{A + B = \frac{\pi}{2}}$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। **4**

সমাধান

ক. $\tan2x - \tan x = 0 \Rightarrow \frac{\sin2x}{\cos2x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow \sin2x\cos x - \cos2x\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \therefore x = n\pi; n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

খ. $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \therefore x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

$(+)$ নিয়ে পাই, $x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ .... (i)

$(-)$ নিয়ে পাই, $x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$ .... (ii)

(i) এ $n = 0$ বসিয়ে পাই, $x = \frac{\pi}{12}$

(ii) এ $n = 0$, বসিয়ে পাই, $x = -\frac{7\pi}{12} \therefore x = \frac{\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}$ **(Ans.)**

গ. $\sec^{-1}\frac{2}{x} + \sec^{-1}\frac{3}{y} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1}\frac{x}{2} + \cos^{-1}\frac{y}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\frac{y}{3}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{x}{2} = \sin^{-1}\frac{y}{3}$ $[\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{x}{2}]$ $\Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

যা একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। (দেখানো হলো)।

28. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এবং $h(x) = \sin x$. **[DB'19]**

(ক) $\sin^{-1}m + \sin^{-1}n = \frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^2 + n^2 = 1$. **2**

(খ) $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{f(a)} - \sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2\tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{a-b}{1+ab}$. **4**

(গ) $0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta).h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান কর। **4**

সমাধান

ক. **01** নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{\frac{2a}{1+a^2}} - \sec^{-1}\frac{1}{\frac{1-b^2}{1+b^2}} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}(a) - 2\tan^{-1}(b) = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}a - \tan^{-1}b = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow x = \tan(\tan^{-1}a - \tan^{-1}b) \therefore x = \frac{a-b}{1+ab}$ **[Showed]**

গ. $2h(\theta).h(3\theta) = 1 \Rightarrow 2\sin\theta.\sin3\theta = 1 \Rightarrow 2\sin\theta.(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 1$

$\Rightarrow -8\sin^4\theta + 6\sin^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow 8\sin^4\theta - 6\sin^2\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\sin^2\theta - 1)(4\sin^2\theta - 1) = 0 \therefore \sin^2\theta = \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$; (+) নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$n = 1;\ \theta = \frac{5\pi}{6}$; (−) নিয়ে, $\sin\theta = \frac{-1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \theta = n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$n = 1;\ \theta = \frac{7\pi}{6};\ n = 2;\ \theta = \frac{11\pi}{6}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; (+) নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$

$n = 1;\ \theta = \frac{3\pi}{4}$; (−) নিয়ে, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta = n\pi - (-1)^n\frac{\pi}{4}$

$n = 1;\ \theta = \frac{5\pi}{4};\ n = 2;\ \theta = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore 0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

29. দৃশ্যকল্প-১: $\sec A = \sqrt{5},\ \text{cosec}B = \frac{5}{3}$ এবং $\cot C = 3.$ **[RB'19]**

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \sin x.$

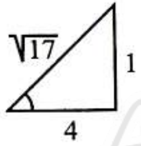
(ক) $\text{cosec}^{-1}\sqrt{17} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে, $A + C - \frac{1}{2}B$ এর মান নির্ণয় কর। 4

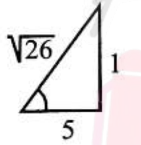
(গ) সমাধান কর: দৃশ্যকল্প-২ থেকে $\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2$, যখন $-2\pi < x < 2\pi$. 4

সমাধান

ক.



$\therefore \text{cosec}^{-1}\sqrt{17} = \tan^{-1}\frac{1}{4}$



$\therefore \sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{5}$

$\therefore \text{cosec}^{-1}\sqrt{17} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5} = \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}} = \tan^{-1}\frac{9}{19}$

খ. $A = \sec^{-1}\sqrt{5}$; $C = \cot^{-1}3$; $B = \text{cosec}^{-1}\frac{5}{3}$

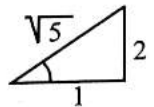
$\frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{5}{3} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

ধরি, $\sin\theta = \frac{3}{5} \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{3}{5} \therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{1}{3} \quad \therefore \frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{5}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\cot^{-1}3 = \tan^{-1}\frac{1}{3}$



$\sec^{-1}\sqrt{5} = \tan^{-1}2$

$A + C - \frac{1}{2}B = \tan^{-1}2 + \tan^{-1}\frac{1}{3} - \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}2$

গ. $\sqrt{3}\, f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 2 \Rightarrow \sqrt{3}\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 2 \Rightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$

$\Rightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \therefore x - \frac{\pi}{6} = (4n+1)\frac{\pi}{2}\,; n \in \mathbb{Z} \;\; \therefore x = (4x+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

n	$(4n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$		গ্রহণযোগ্য মান
0	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$
1	$\frac{8\pi}{3}$		×
−1	$-\frac{4\pi}{3}$		$-\frac{4\pi}{3}$
−2	$-\frac{10\pi}{3}$		×

সমাধান, $x = \frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$

30. দৃশ্যকল্প-১: $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$. দৃশ্যকল্প-২: $g(\alpha) = \sin(\pi\cos\alpha) - \cos(\pi\sin\alpha)$ **[Cgt.B'19]**

(ক) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে যদি $g(\alpha) = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $\alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$. **4**

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $f(a) = \alpha$ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin\alpha = \sqrt{\alpha^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ **4**

সমাধান

ক. 22 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. প্রশ্নানুসারে, $\sin(\pi\cos\alpha) - \cos(\pi\sin\alpha) = 0 \Rightarrow \sin(\pi\cos\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\alpha\right)$

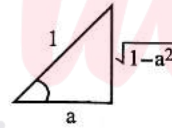
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \pm \sin\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \pm 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$

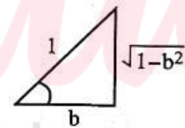
$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow 2\alpha = \sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right) \Rightarrow 2\alpha = \pm\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \;\therefore\; \alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

গ. প্রশ্নানুসারে, $f(a) = \alpha\,; \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b} = \alpha$

$\sin^{-1}\sqrt{1-b^2} + \sin^{-1}\sqrt{1-a^2} = \alpha$

$\sin^{-1}\{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-1+a^2} + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-1+b^2}\} = \alpha$





$\sin\alpha = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

$\sin^2\alpha = a^2(1-b^2) + b^2(1-a^2) + 2ab\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2}$

$\sin^2\alpha = a^2 + b^2 - 2a^2b^2 + 2ab\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

$\sin^2\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\left(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$

কেননা, $\cos\alpha = ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

32. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2}$. **[BB'19]**

দৃশ্যকল্প-২: $A = 2\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(ক) $\sec^2(\cot^{-1}3) + \mathrm{cosec}^2(\tan^{-1}2)$ এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে সমাধান কর: $f(\sin\theta) = 0$. **4**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $A = \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$. **4**

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\sin^2\theta - 3\sin\theta + \sqrt{2}$

এখন প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{2}\sin^2\theta - 3\sin\theta + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2.\sqrt{2}} = \frac{3\pm1}{2\sqrt{2}}$

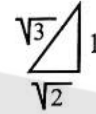
হয় $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$

অথবা, $\sin\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta = \sin\alpha \quad \alpha = \sin^{-1}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$; where $\alpha = \sin^{-1}\sqrt{2}$

গ. প্রশ্নানুসারে, $A = 2\sin^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{8}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{8}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan^{-1}\frac{8}{7\sqrt{2}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$



$= \tan^{-1}\frac{\frac{8}{7\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{8}{7.2}} = \tan^{-1}\frac{8\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{6} = \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}} \therefore A = \tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$ **[Proved]**

33. $\mathbf{f(x) = \sin^{-1}x}$ এবং $\mathbf{g(x) = \cos x}$. **[JB'19]**

(ক) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কত? 2

(খ) $f\left\{\sqrt{2}g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} + f\{\sqrt{g(2\theta)}\}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) সমাধান কর: $\sqrt{3}\,g(x) + g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$. 4

সমাধান

ক. 06 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $f\left\{\sqrt{2}g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} + f\{\sqrt{g(2\theta)}\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} + \sin^{-1}\{\sqrt{\cos2\theta}\} = \sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin\theta\} + \sin^{-1}\{\sqrt{\cos2\theta}\}$

$= \sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-\cos2\theta} + \sqrt{\cos2\theta}\,.\sqrt{1-2\sin^2\theta}\}$

$= \sin^{-1}\{\sqrt{2}\sin\theta.\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{1-2\sin^2\theta}\,.\sqrt{1-2\sin^2\theta}\} = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

গ. $\sqrt{3}\,g(x) + g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \quad \therefore x + \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{3}$

$n = 1 \Rightarrow x = 2\pi, \frac{5\pi}{3}$; $n = 0 \Rightarrow x = 0, -\frac{\pi}{3}$ ∴ নির্ণেয় সমাধান $= \left\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{5\pi}{3}\right\}$

34. উদ্দীপক: দুটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হলো $\sqrt{2}x = \sin^{-1}A, \frac{-x}{2} = \cos^{-1}B$ **[CB'19]**

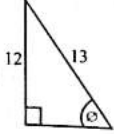
(খ) $A - B = 0$ হলে x এর সমাধানের জন্য সাধারণ রাশিমালা বের কর। 4

সমাধান

খ. $A - B = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{2}x) = \cos\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x\right) = \cos\left(-\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x = 2n\pi \pm \frac{-x}{2} \Rightarrow \pi - 2\sqrt{2}x = 4n\pi \pm (-x)$

$\Rightarrow \pi - 4n\pi = (2\sqrt{2} \pm 1)x \therefore x = \frac{(1-4n)\pi}{2\sqrt{2}\pm1}$, $n \in \mathbb{Z}$

35. দৃশ্যকল্প-১: 

[Din.B'19]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = \cot x$.

(ক) $\tan^{-1} 4$ ও $\tan^{-1}\frac{5}{3}$ এর সমষ্টি নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}\emptyset + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1} 2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$. 4

(গ) সমাধান কর: $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).\ g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1$, যখন $0 \le \theta \le \pi$. 4

সমাধান

ক. 06 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\frac{1}{2}\emptyset = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13}$

ধরি, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{12}{13} \Rightarrow \frac{12}{13} = \sin 2\theta$

আবার, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin}{1+\cos} = \frac{\sin}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\theta}} = \frac{\frac{12}{13}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} = \frac{2}{3}\ \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{2}\emptyset + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{2}{3} + \tan^{-1}\frac{3}{4} = \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}.\frac{3}{4}} = \tan^{-1}\frac{17}{6}$

এবং $\cot^{-1} 2 + \cot^{-1}\frac{29}{28} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{28}{29} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{28}{29}}{1-\frac{28}{29}.\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\frac{17}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}\emptyset + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cot^{-1} 2 + \cot^{-1}\frac{29}{28}$ **[Proved]**

গ. $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).\ g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1 \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1$

$\Rightarrow \tan\theta.\tan 2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta\sin 2\theta = \cos\theta\cos 2\theta$

$\Rightarrow \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \cos(\theta + 2\theta) = \cos\frac{\pi}{2}$

$\therefore 3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}\ \therefore \theta = (2n+1).\frac{\pi}{6}\ \therefore n = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$n = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$; অগ্রহণযোগ্য; $n = 2 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}\ \therefore \theta = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **[Ans.]**

36. দৃশ্যকল্প-১: $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \cot^{-1}\left(\frac{2}{11}\right)$ [All.B'18]

দৃশ্যকল্প-২: $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5, -2\pi < \theta < 2\pi$

(ক) প্রমাণ কর যে, $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. Let, $x = \sin\theta$; R.H.S $= \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = \sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta})$
$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\sin^{-1} x =$ L.H.S **[Proved]**

খ. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} - \cot^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{11}{2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}.\frac{1}{2}} - \tan^{-1}\frac{11}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{11}{2} - \tan^{-1}\frac{11}{2} = 0$ **(Ans.)**

গ. $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5 \Rightarrow 4(1 - \cos^2\theta + \cos\theta) = 5 \Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} n = 0,\ 1, -1$ বসিয়ে; $\theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

37. দৃশ্যকল্প-১: $\sec^{-1}\frac{5}{3}+\cot^{-1}\frac{12}{5}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$. [DB'17]

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{3}\sin\theta = 2+\cos\theta$.

(ক) দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$. 2

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এর মান $\frac{\pi}{2}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমাধান কর যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$. 4

সমাধান

ক. ধরি, $\tan^{-1}x = A \therefore \tan A = x$

আমরা জানি, $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} \Rightarrow 2A = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}\right)$

$\therefore 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ (দেখানো হল)

খ. $\sec^{-1}\frac{5}{3} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$; $\cot^{-1}\frac{12}{5} = \tan^{-1}\frac{5}{12}$

$\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12} = \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{5}{12}} = \tan^{-1}\frac{63}{16}$

$\tan^{-1}\frac{63}{16} = \cos^{-1}\frac{16}{65} \therefore \sec^{-1}\frac{5}{3}+\cot^{-1}\frac{12}{5}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \cos^{-1}\frac{16}{65}+\sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$ $[\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}]$ (Showed)

গ. দেওয়া আছে, $\sqrt{3}\sin\theta = 2+\cos\theta \Rightarrow \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1$

[উভয় পক্ষকে [$\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে।]

$\Rightarrow \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\Rightarrow \theta-\frac{\pi}{6} = \frac{(4n+1)\pi}{2}, n\in Z \Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} [n\in Z]$

$\Rightarrow \theta = 2n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\ n\in Z \Rightarrow \theta = 2n\pi+\frac{2\pi}{3}, n\in Z \Rightarrow \theta = (3n+1)\frac{2\pi}{3}, n\in Z$

$\Rightarrow n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{10\pi}{3}$ $\Rightarrow n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow n = 0$ হলে, $\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow n = 1$ হলে, $\theta = \frac{8\pi}{3}$

$-2\pi < \theta < 2\pi$ ব্যবধির ক্ষেত্রে $\theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

38. $f(x) = \tan x$. [RB'17]

(ক) $\cot^{-1}\cos\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}$ এর মুখ্য মান নির্ণয় কর 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত $f(x)$ এর জন্য $f^{-1}(x)+f^{-1}(y) = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে প্রাপ্ত সঞ্চার পথটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে যার ঢাল -1 হবে। 4

(গ) $\{f(x)\}^2+f'(x) = 3f(x)$ হলে বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর যখন $0\le x\le 2\pi$. 4

সমাধান

ক. 07 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x$

$\therefore f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ এবং $f^{-1}(y) = \tan^{-1}y$

প্রশ্নমতে, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \pi \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} = \pi \Rightarrow \frac{x+y}{1-xy} = 0 \Rightarrow x+y = 0 \therefore y = -x$

অতএব, প্রাপ্ত সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে এবং সরলরেখাটির ঢাল -1 (প্রমাণিত)।

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x \quad \therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\{f(x)\}^2 + f'^{(x)} = 3f(x) \Rightarrow \tan^2 x + \sec^2 x = 3\tan x$

$\Rightarrow \tan^2 x + 1 + \tan^2 x - 3\tan x = 0$

$\Rightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0 \Rightarrow 2\tan^2 x - 2\tan x - \tan x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\tan x(\tan x - 1) - 1(\tan x - 1) = 0 \Rightarrow (2\tan x - 1)(\tan x - 1) = 0$

$\therefore 2\tan x - 1 = 0 \quad \therefore \tan x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

[ধরি, $\tan\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$]

অথবা, $\tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \quad \therefore x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

যখন, $n \in Z$; $n = 0$ হলে, $x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = \frac{\pi}{4}$; $n = 1$ হলে,

$x = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$n = 2$ হলে $x = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $x = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} > 2\pi$

নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধান সমূহ, $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

39. $\mathbf{f(x) = \cot^{-1} y - \tan^{-1} x}$ ……… (i) **[Ctg.B'17]**

$\mathbf{\cos\theta - \cos 9\theta = \sin 5\theta}$ ……… (ii)

(ক) $\sin\frac{x}{3}$ এর পর্যায়কাল কত? **2**

(খ) $f(x) = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x + y + \sqrt{3}\,xy = \sqrt{3}$. **4**

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. sinx এর পর্যায়কাল, 2π; এখন, $\sin\frac{x}{3}$ এর পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

খ. $f(x) = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \cot^{-1} y - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{1}{y} - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{\frac{1}{y} - x}{1 + \frac{1}{y}.x} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\frac{1-xy}{y}}{\frac{y+x}{y}} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1-xy}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x + y = \sqrt{3} - \sqrt{3}xy \therefore x + y + \sqrt{3}xy = \sqrt{3}$ (প্রমাণিত)।

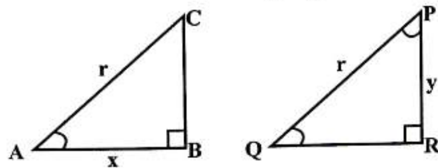
গ. $\cos\theta - \cos 9\theta = \sin 5\theta \Rightarrow 2\sin 5\theta \sin 4\theta = \sin 5\theta \Rightarrow \sin 5\theta(2\sin 4\theta - 1) = 0$

$\therefore \sin 5\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{5} \Rightarrow 2\sin 4\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin 4\theta = 1 \Rightarrow \sin 4\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 4\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} \quad \therefore \theta = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{n\pi}{5}, \frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{24}$; যখন n এর মান শূন্য অথবা অন্য যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

40. **[SB'17]**



(ক) দেখাও যে, $\cos(2\tan^{-1}\frac{y}{x}) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **2**

(খ) উদ্দীপকে $A + P = \varphi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 - 2xy\cos\varphi + y^2 = r^2\sin^2\varphi$ **4**

(গ) $f(\theta) = \frac{r}{x}$ হলে $-\pi \le x \le \pi$ ব্যবধিতে $f(2\theta) - f(\theta) = 2$ সমীকরণটি সমাধান কর। **4**





সমাধান

ক. বামপক্ষ, $= \cos\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \cos\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ $[\because 2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}]$

$= \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ = ডানপক্ষ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হল)।

খ. $\cos A = \frac{x}{r}$ $\therefore A = \cos^{-1}\frac{x}{r}$; $\cos P = \frac{y}{r}$ $\therefore P = \cos^{-1}\frac{y}{r}$

প্রশ্নমতে, $\cos^{-1}\frac{x}{r} + \cos^{-1}\frac{y}{r} = \phi \Rightarrow \cos^{-1}\{\frac{xy}{r^2} - \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)} = \phi$

$\Rightarrow \frac{xy}{r^2} - \left(\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)}\right) = \cos\phi \Rightarrow \frac{x^2y^2}{r^4} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi + \cos^2\phi = \left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{x^2y^2}{r^4} - 2\frac{xy}{r^2}\cos\phi + \cos^2\phi = 1 - \frac{y^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^2y^2}{r^4} \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 2\frac{xy}{r^2}\cos\phi = 1 - \cos^2\phi$

$\Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 2.\frac{xy}{r^2}\cos\phi = \sin^2\phi$

$\therefore x^2 + y^2 - 2xy\cos\phi = r^2\sin^2\phi$ (প্রমাণিত)।

গ. $f(\theta) = \frac{r}{x} = \sec\theta$; $f(2\theta) = \sec 2\theta$

প্রশ্নমতে, $f(2\theta) - f(\theta) = 2$

$\therefore \frac{1}{\cos 2\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = 2$

$\therefore \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\cos 2\theta.\cos\theta} = 2 \therefore \cos\theta - \cos 2\theta = 2\cos 2\theta.\cos\theta$

$\therefore \cos\theta - \cos 2\theta = \cos\theta + \cos 3\theta \therefore \cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$

$\therefore 2\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \therefore \cos\frac{5\theta}{2} = 0$ এবং $\cos\frac{\theta}{2} = 0$

$\therefore \frac{5\theta}{2} = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \therefore \frac{\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{1}{5}(2n\pi + \pi), \theta = 2n\pi + \pi$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{3\pi}{5}, 3\pi, n = -2$ হলে, $\theta = -\frac{03\pi}{5}, -3\pi$

$n = -1$ হলে, $\theta = -\frac{\pi}{5}, \pi$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{5}, \pi, -\frac{\pi}{5}, -\pi, \frac{3\pi}{5}, \frac{-3\pi}{5}$

41. $\mathbf{g(x) = p\sin^{-1}x; h(x) = \cos x.}$ **[BB'17]**

(ক) প্রমাণ কর যে, $\sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$. 2

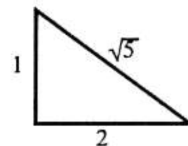
(খ) $g(x)$ এর লেখচিত্র অংকন কর, যখন $p = \frac{1}{2}, -1 \leq x \leq 1$. 4

(গ) $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2$ সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বামপক্ষ $= \sec^{-1}\frac{\sqrt{5}}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{2} = 2\tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$



$= \tan^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tan^{-1}\frac{1}{\frac{3}{4}} = \cot^{-1}\frac{3}{4}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

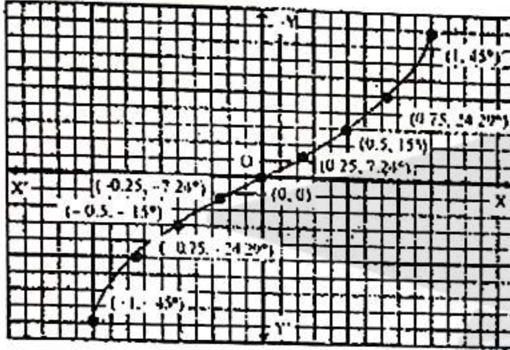
খ. দেওয়া আছে, $P = \frac{1}{2}$ এবং $g(x) = p\sin^{-1}x = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ যেখানে $-1 \leq x \leq 1$

ধরি, $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$

x এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রতিসঙ্গী y এর মানগুলো নির্ণয় করি।...

x	−1	−0.75	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$	−45°	−24.29°	−15°	−7.24°	0°	7.24°	15°	24.29°	45°

ছক কাগজের x অক্ষ বরাবর 10 ঘর = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর 1 ক্ষুদ্রতম ঘর = 5° একক ধরে প্রাপ্ত x ও y এর মানগুলি বসিয়ে $y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ লেখচিত্র পাওয়া যায়।



গ. দেওয়া আছে, $h(x) = \cos x \quad \therefore h(2x) = \cos 2x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2\{h(x)\}^2 + \{h(2x)\}^2 = 2 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos^2 2x = 2$

$\Rightarrow 1 + \cos 2x + \cos^2 2x - 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1(-1)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কেননা তা কেননা তা −1 অপেক্ষা ছোট মান এবং cos এর সীমা −1 হতে 1 পর্যন্ত।

$\therefore \cos 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\alpha$

ধরি, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \alpha$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\alpha}{2}$; যেখানে $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ এবং $n \in Z$

42. দৃশ্যকল্প -১: $\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5}$ **[JB'17]**

দৃশ্যকল্প- ২: $2\sin 2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0$

(ক) প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) = 2x$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বামপক্ষ, $= \tan^{-1}(\cot 3x) + \tan^{-1}(-\cot 5x) \Rightarrow \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

$= \frac{\pi}{2} - 3x - \frac{\pi}{2} + 5x = 2x =$ ডানপক্ষ ∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতেপাই, $\cot\theta - \tan\theta = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{6}{5}$

$\Rightarrow \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{6}{5} \Rightarrow 5\cos 2\theta = 6\sin\theta\cos\theta \Rightarrow 5\cos 2\theta = 6\sin\theta\cos\theta \Rightarrow 5\cos 2\theta = 3\sin 2\theta$

$\Rightarrow \frac{\sin 2}{\cos 2\theta} = \frac{5}{3} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{5}{\sqrt{5^2+3^2}} \Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}} \therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}$ (প্রমাণিত)।

গ. প্রদত্ত সমীকরণটি, $2\sin2\theta + 2(\sin\theta + \cos\theta) + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin2\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$
$\Rightarrow 4\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin\theta(2\cos\theta + 1) + 1(2\cos\theta + 1)0 = 0$
$\Rightarrow (2\sin\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

হয়, $2\sin\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin\theta = -1$
$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos\theta = -1$
$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$
$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

সুতরাং $\theta = n\pi + (-1)^n\left(\frac{7\pi}{6}\right), 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

43. $\mathbf{f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, \sin\theta = \frac{4}{5}}$ **[CB'17]**

(ক) $\mathbf{cosec^{-1}\sqrt{5} + sec^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = tan^{-1}2}$. 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে সমাধান কর: $\mathbf{\sqrt{3}g(x) + f(x) = \sqrt{3}}$. 4

সমাধান

ক. 06 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{4}{5} \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{4}{5}$

বামপক্ষ $= \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\theta - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \sec^{-1}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$
$= \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{2} \Rightarrow \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}.2\tan^{-1}\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$
$\Rightarrow \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}$
$= \tan^{-1}2 =$ ডানপক্ষ $\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = \cos x$

প্রদত্ত রাশি, $\sqrt{3}\,g(x) + f(x) = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]
$\Rightarrow \sin x.\sin\frac{\pi}{6} + \cos x\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ যেখানে, $n \in Z$
$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{3}$, যখন, $n \in Z \therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

44. $\mathbf{A = \cos\theta, B = \sin\theta, C = \cos2\theta, D = \sin2\theta}$ **[Din.B'17]**

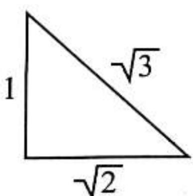
(ক) মান নির্ণয় কর: $\mathbf{tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}}$ 2

(খ) $\mathbf{A + \sqrt{3}B = \sqrt{2}}$ হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। 4

(গ) $\mathbf{A + B = C + D}$ সমীকরণটির $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে সমাধান আছে কিনা যাচাই কর। 4

সমাধান

ক.



$\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

খ. দেওয়া আছে, $A = \cos\theta, B = \sin\theta$

এখন, $A + \sqrt{3}B = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$

গ. দেওয়া আছে, $A = \cos\theta, B = \sin\theta, C = \cos2\theta, D = \sin2\theta \therefore A + B = C + D$

$\Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = \cos2\theta + \sin2\theta \Rightarrow \cos\theta - \cos2\theta = -(\sin\theta - \sin2\theta)$

$\Rightarrow 2\sin\frac{3\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2}.-2\cos\frac{3\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right) = 0$

$\therefore \sin\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{3\theta}{2} = \cos\frac{3\theta}{2} \Rightarrow \tan\frac{3\theta}{2} = 1$

$\Rightarrow \tan\frac{3\theta}{2} = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

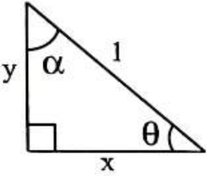
n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{6}, 0$; $n = 1$ হলে $\theta = \frac{5\pi}{6}, 2\pi$; $n = 2$ হলে $\theta = \frac{3\pi}{2}, 4\pi$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সমাধান বিদ্যমান এবং $\theta = 0, \frac{\pi}{6}$

◆ CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান

01.



(ক) α ও θ কে **sine** এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে প্রকাশ কর। 2

(খ) $x + y = \sqrt{2}$ হলে θ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$। 4

সমাধান

ক. চিত্র হতে পাই, $\sin\alpha = \frac{x}{1} \therefore \alpha = \sin^{-1}(x)$ আবার, $\sin\theta = \frac{y}{1} \therefore \theta = \sin^{-1}(y)$ **(Ans.)**

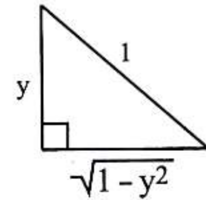
খ. চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$ এবং $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$

দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{2}$; $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = 1 \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$; $n = 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{4}$ [$\because \theta$ সূক্ষ্মকোণ] **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}x = \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y\right)$



$\Rightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}y\right) \Rightarrow x = \cos(\sin^{-1}y)$

$\Rightarrow x = \cos(\cos^{-1}(\sqrt{1 - y^2}))$

$\Rightarrow x = \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \therefore x^2 + y^2 = 1$ **(Showed)**

02. $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \tan^{-1}x$

(ক) দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$। 4

(গ) সমাধান কর: $\sqrt{3}f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1, -2\pi < x < 2\pi$। 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 06 (ক) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x, g(x) = \tan^{-1} x$

বামপক্ষ $= 2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\tan\frac{\theta}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{1-\frac{a-b}{a+b}.ta\ \ ^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}.ta\ \ ^2\frac{\theta}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{1-\frac{(a-b)}{(a+b)}.\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{(a-b)}{(a+b)}.\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \cos^{-1}\frac{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}-(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \cos^{-1}\frac{a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\cos^2\frac{\theta}{2}-a\sin^2\frac{\theta}{2}+b\sin^2\frac{\theta}{2}}{a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\cos^2\frac{\theta}{2}+a\sin^2\frac{\theta}{2}-b\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cos^{-1}\frac{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+s\ \ ^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \cos^{-1}\frac{a\cos\theta+}{a+b\,co}$ $[\because \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta]$

$= \cos^{-1}\frac{b+f(\theta)}{a+bf(\theta)}$ = ডানপক্ষ $\therefore 2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$ **[Proved]**

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$

এখন, $\sqrt{3}f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{6}.\cos x + \sin\frac{\pi}{6}.\sin x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2nx + \frac{\pi}{2}, 2nx - \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}(4n+1), \frac{\pi}{6}(12n-1)$

এখানে n এর মান শূন্য অথবা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

$n = -1$ হলে, $x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, -2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{-3\pi}{2}, \frac{-13\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

03. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = p$

(ক) $\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17}\right)$- কে সাইনের বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ কর। 2

(খ) $x = -\cos\theta; y = \cos 3\theta$ এবং $z = 0$ হলে p নির্ণয় কর। 4

(গ) $p = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$। 4

সমাধান

ক. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\left\{\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} + \frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{3}{5}\sqrt{\frac{289-64}{289}} + \frac{8}{17}\sqrt{\frac{25-9}{25}}\right\} = \sin^{-1}\left\{\frac{3}{5}\sqrt{\frac{225}{289}} + \frac{8}{17}\sqrt{\frac{16}{25}}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{3}{5}.\frac{15}{17} + \frac{8}{17}.\frac{4}{5}\right\} = \sin^{-1}\left\{\frac{45}{85} + \frac{32}{85}\right\} = \sin^{-1}\frac{77}{85}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $x = -\cos\theta, y = \cos 3\theta$ এবং $z = 0$

$p = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \sin^{-1}(-\cos\theta) + \sin^{-1}(\cos 3\theta) + \sin^{-1}(0)$

$= \sin^{-1}(\cos 3\theta) - \sin^{-1}(\cos\theta) = \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) - \sin^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} - 3\theta - \frac{\pi}{2} + \theta = -2\theta$ **(Ans.)**

গ. $p = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y + \sin^{-1} z$

মনে করি, $\sin^{-1} x = A \therefore \sin A = x; \sin^{-1} y = B \therefore \sin B = y$ এবং $\sin^{-1} z = C \therefore \sin C = z$

$\therefore A + B + C = p \Rightarrow A + B + C = \pi$

আমরা জানি, $A + B + C = \pi$ হলে, $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A . \sin B . \sin C$

$\Rightarrow 2\sin A . \cos A + 2\sin B . \cos B + 2\sin C . \cos C = 4\sin A . \sin B . \sin C$

$\Rightarrow \sin A\sqrt{1 - \sin^2 A} + \sin B\sqrt{(1 - \sin^2 B} + \sin C\sqrt{1 - \sin^2 C} = 2\sin A . \sin B . \sin C$

$\therefore x\sqrt{1 - x^2} + y\sqrt{1 - y^2} + z\sqrt{1 - z^2} = 2xyz$ **(Proved)**

04. $P = \cos\theta$ এবং $Q = \sin\theta$; এখানে θ জ্যামিতিক কোণ।

(ক) **$Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, θ নির্ণয় কর।** 2

(খ) **$P + \sqrt{3}Q = \sqrt{2}$ হলে, θ নির্ণয় কর।** 4

(গ) **$P^3 - PQ - Q^3 = 1$ হলে প্রমাণ করে যে, θ কখনোই একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ হতে পারে না।** 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $Q = \sin\theta; 0 < \theta < \pi \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta \left[\because Q = \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} \therefore \theta = \frac{\pi}{3} = 60°$

খ. দেওয়া আছে, $P + \sqrt{3}Q = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\cos\theta + \sin\frac{\pi}{3}.\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$ যখন $n \in \mathbb{Z}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $P^3 - PQ - Q^3 = 1 \Rightarrow \cos^3\theta - \sin\theta.\cos\theta - \sin^3\theta = 1$

$\Rightarrow \cos^3\theta - \sin^3\theta - (1 + \sin\theta.\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta - \sin\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta.\cos\theta) - (1 + \sin\theta.\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta - \sin\theta)(1 + \sin\theta.\cos\theta) - (1 + \sin\theta.\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow (1 + \sin\theta.\cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}.2\sin\theta.\cos\theta\right)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)(\cos\theta - \sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow \cos\theta - \sin\theta - 1 = 0$ $[\sin 2\theta \neq -2]$

$\Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = 1$

উভয়পক্ষকে $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{4}.\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \therefore \theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \theta = 2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \therefore \theta = 2n\pi, \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ [যখন $n \in \mathbb{Z}$]

$n = 0$ বসিয়ে $\theta = 0, -\frac{\pi}{2} = 0, -90°$; $n = 1$ বসিয়ে, $\theta = 2\pi, 2\pi - \frac{\pi}{2} = 2\pi, \frac{3\pi}{2} = 360°, 270°$

যেহেতু θ জ্যামিতিক কোণ কাজেই θ কখনোই সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ হতে পারে না (প্রমাণিত)।

05. α ও β দুইটি বাস্তব সংখ্যা যেখানে $\alpha = \frac{x}{a}$ এবং $\beta = \frac{y}{b}$।

(ক) **$\sin^{-1}\frac{2}{5x} = \frac{\pi}{3}$ হলে $\sec^{-1}\frac{5x}{2}$ এর মান কত?** 2

(খ) উদ্দীপকের **$a = b = 2$ এবং $\cos^{-1}\alpha + \cos^{-1}\beta = \theta$** হলে দেখাও যে, **$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy\cos\theta + \frac{1}{4}y^2 = \sin^2\theta$**। 4

(গ) যদি উদ্দীপকের **$a = 2$** এবং **$b = 3$** হয় তবে সমাধান কর **$\sec^{-1}\alpha - \sec^{-1}\beta = \sec^{-1}3 - \sec^{-1}2$** । 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\sin^{-1}\frac{2}{5x}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{2}{5x}=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{2}{5x}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{5x}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\therefore\sec^{-1}\frac{5x}{2}=\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\cos^{-1}\frac{x}{2}+\cos^{-1}\frac{y}{2}=\theta\Rightarrow\cos^{-1}\left\{\frac{x}{2}.\frac{y}{2}-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2^2}\right)}\right\}=\theta$

$\Rightarrow\frac{x}{2}.\frac{y}{2}-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2^2}\right)}=\cos\theta\Rightarrow\frac{x}{2}.\frac{y}{2}-\cos\theta=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2^2}\right)}$

$\Rightarrow\left(\frac{x}{2}.\frac{y}{2}-\cos\theta\right)^2=\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2^2}\right)\Rightarrow\frac{x^2}{2^2}.\frac{y^2}{2^2}+\cos^2\theta-\frac{2xy.\cos\theta}{2^2}=1-\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{2^2}+\frac{x^2y^2}{16}$

$\Rightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{2xy\,co}{4}+\frac{y^2}{4}=1-\cos^2\theta\;\therefore\frac{1}{4}x^2-\frac{xy\cos\theta}{2}+\frac{y^2}{4}=\sin^2\theta$ **(Showed)**

গ. $\sec^{-1}\alpha-\sec^{-1}\beta=\sec^{-1}3-\sec^{-1}2\Rightarrow\sec^{-1}\frac{x}{2}-\sec^{-1}\frac{x}{3}=\sec^{-1}3-\sec^{-1}2$ [এখানে, $\beta=\frac{\pi}{b}$ ধরে করা হয়েছে]

$\Rightarrow\cos^{-1}\frac{2}{x}-\cos^{-1}\frac{3}{x}=\cos^{-1}\frac{1}{3}-\cos^{-1}\frac{1}{2}\Rightarrow\cos^{-1}\frac{2}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\cos^{-1}\frac{3}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\cos^{-1}\left\{\frac{2}{x}.\frac{1}{2}-\sqrt{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)}\right\}=\cos^{-1}\left\{\frac{3}{x}.\frac{1}{3}-\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)}\right\}$

$\Rightarrow\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)}$

$\Rightarrow\sqrt{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\frac{8}{9}}\Rightarrow\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\frac{3}{4}=\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\frac{8}{9}$

$\Rightarrow\frac{3}{4}-\frac{3}{x^2}=\frac{8}{9}-\frac{8}{x^2}\Rightarrow\frac{5}{x^2}=\frac{5}{36}\Rightarrow x^2=36\;\therefore x=6$ [∴ ঋণাত্মক মান প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না]

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=6$ **(Ans.)**

06. $\mathbf{y=f(x)=\sin x}$

(ক) $f^{-1}(x)$ ফাংশন হলে ডোমেন নির্ণয় কর। 2

(খ) $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। [$-1<x<1$ মুখ্যমানের ভিত্তিতে] 4

(গ) $x=\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{5}{13}$ হলে দেখাও যে, $y=\frac{5+12\sqrt{3}}{26}$ । 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $y=f(x)=\sin x\Rightarrow f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$

∴ $f^{-1}(x)$ একটি বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন যার ডোমেন $=[-1,1]$

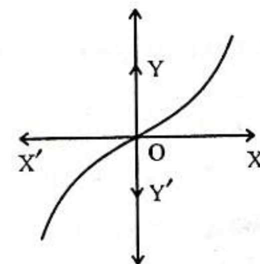
খ. দেওয়া আছে, $y=f(x)=\sin x\;\therefore f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$

$\sin^{-1}x$ এর মুখ্যমান $[-90°,90°]$

∴ $\sin^{-1}x$ এর মুখ্য মান ব্যবধি থেকে x এর বিভিন্ন মানের জন্য $f^{-1}(x)$ এর মান গুলি নির্ণয় করা হল:

x	−1	−0.86603	−0.50	0	0.50	0.86	1
$f^{-1}(x)$	−90°	−60°	−30°	0°	30°	60°	90°

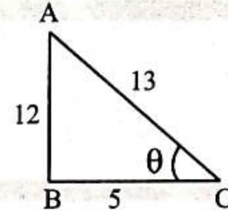
স্কেল নির্ধারণ: x − অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 10 বাহু = 1 একক
এবং y − অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 6° একক
এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে বিন্দুগুলো যোগ করলেই $\sin^{-1}x$ অর্থাৎ $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



গ. $x = \sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{5}{13} \ldots\ldots (i)$

let; $\cos^{-1}\frac{5}{13} = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta = \frac{12}{13} \therefore \theta = \sin^{-1}\frac{12}{13} \therefore \cos^{-1}\frac{5}{13} = \sin^{-1}\frac{12}{13}$



(i) নং থেকে পাই, $x = \sin^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{12}{13}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} + \frac{12}{13}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{144}{169}} + \frac{12}{13}\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{169}} + \frac{12}{13}\sqrt{\frac{3}{4}}\right\} = \sin^{-1}\left\{\frac{5}{26} + \frac{6\sqrt{3}}{13}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \sin x$

$\therefore y = \sin\left[\sin^{-1}\left\{\frac{5}{26} + \frac{6\sqrt{3}}{13}\right\} \therefore y = \frac{5+12\sqrt{3}}{26}$ (Showed)

07. $\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}3\right)$, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$ দুটি রাশি এবং $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$ একটি সমীকরণ।

(ক) ১ম রাশির মান নির্ণয় কর। 2

(খ) ২য় রাশিটির মান π হলে দেখাও যে, $x + y + z = xyz$। 4

(গ) সমীকরণটি $-2\pi < \theta < 2\pi$ ব্যধিতে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. উদ্দীপক থেকে আমরা পাই, $\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}3\right)$

$= \cos\frac{\pi}{2}\,[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ যখন $xy = 1] = 0$ (Ans.)

খ. উদ্দীপক থেকে পাই,২য় রাশি $= \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z$

যেহেতু দ্বিতীয় রাশির মান $= \pi$

$\therefore \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-z} = \tan\pi \Rightarrow \frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-x} = 0$

$\therefore x + y + z - xyz = 0 \therefore x + y + z = xyz$ (Showed)

গ. সমীকরণটি হলো: $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{co}$

$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta + co\ ^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta.\cos\theta} - \frac{2}{\cos\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} - 2\right) = 0$

$\therefore \frac{1}{\cos\theta} \neq 0$ যা অসম্ভব $\frac{1}{\sin\theta} - 2 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \therefore \theta = n\pi + (-1)^n.\frac{\pi}{6}$

যখন n এর মান শূন্য বা অন্য যে কোন পূর্ণ সংখ্যা,

যখন $n = 0$, তখন $\theta = \frac{\pi}{6}$

$n = 1 \qquad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$n = -1 \qquad \theta = -\frac{7\pi}{6}$

$n = -2 \qquad \theta = -\frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে, $\theta = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

অধ্যায় ০৮

স্থিতিবিদ্যা

* এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

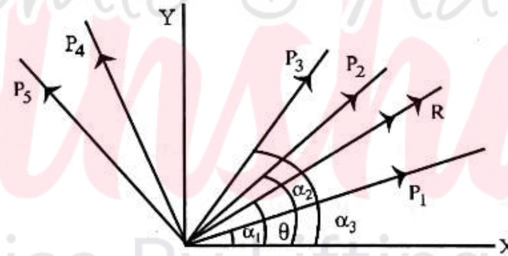
বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	1	1	1	2	2	3	2	5	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
রাজশাহী				2	2	3	2	4	1	1	1	2					1	1	1	2
চট্টগ্রাম	2	2	2	2	2	2	2	4	1	1	1	1					1	1	1	2
সিলেট	1	1	1	2	2	2	2	3	1	1	1	1					1	1	1	4
বরিশাল	2	2	2	3	2	2	2	4	1	1	1	1	সকল বোর্ড				1	1	1	2
যশোর	2	2	2	6	3	3	3	6	1	1	1	2					1	1	1	3
কুমিল্লা	1	1	1	4	3	3	3	5	1	1	1	1					1	1	1	1
দিনাজপুর	1	1	1	3	2	2	2	5	1	1	1	2					1	1	1	3
ময়মনসিংহ	2	1	1	4	3	3	3	3												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ **লম্বাংশ উপপাদ্য:**

একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক বলের কোন একটি নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশসমূহের বীজগাণিতীয় সমষ্টি একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।

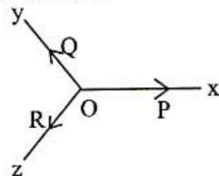


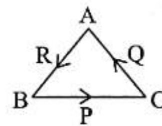
(i) $R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \cdots\cdots\cdots P_n\cos\alpha_n = R_x$

(ii) $R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \cdots\cdots\cdots P_n\sin\alpha_n = R_y$

◈ **বলের ত্রিভুজ সূত্র:**

যদি এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলের মান ও দিক কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা একইক্রমে মানে ও দিকে (অবস্থানে নয়) সূচিত করা হয় তবে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে।





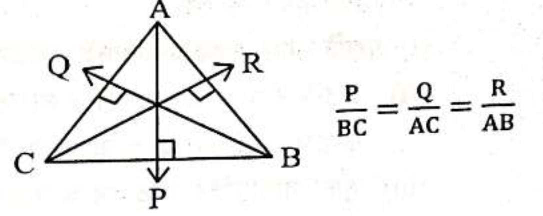
$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

◈ **বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র:**

একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদেরকে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে (অবস্থানে নয়) একই ক্রমে সূচিত করা যায়।

দ্রষ্টব্য: এক বিন্দুতে সাম্যাবস্থা সৃষ্টিকারী সমতলীয় বল ভিন্ন ভিন্ন রেখায় ক্রিয়াশীল না হলে বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্রটি প্রযোজ্য হবে না।

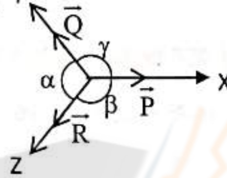
◈ বলের লম্ব ত্রিভুজ সূত্র:
কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটা বলের মান যদি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমানুপাতিক হয় এবং ইহারা যদি অনুষঙ্গী বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে তবে বলগুলো সুস্থিত থাকবে।



$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

◈ লামির উপপাদ্য:
একই বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তবে প্রত্যেকটি বলের মান অপর বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন (sine) এর সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$



◈ লামির উপপাদ্যের ব্যতিক্রম:
একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সমতলীয় তিনটি বলের জন্য লামির উপপাদ্য সকল ক্ষেত্রে ক্রিয়াশীল হলেও শুধু একটি ক্ষেত্রে ক্রিয়াশীল নয়। যখন তিনটি বলের মধ্যে যেকোনও দু'টি বল একই দিকে ক্রিয়াশীল হয় [অর্থাৎ এদের মধ্যবর্তীর কোণের মান 0°] তখন $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$. অনুপাতগুলোর হর 0 হয়ে যাওয়ায় এক্ষেত্রে লামির উপপাদ্য প্রয়োগ করা যায় না। অর্থাৎ বলত্রয়ের ক্রিয়া বিন্দু দিয়ে যে কোনো সরলরেখা টানলে যদি দুইটি বল এর একপাশে ও অন্যটি অপর পাশে থাকে তাহলেই কেবল লামির উপপাদ্য প্রযোজ্য।

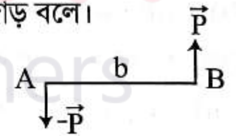
◈ লামির উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা:
কোনো বিন্দুতে কার্যরত তিনটি সমতলীয় বলের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হলে এবং কোনটিই অপর দুটির লব্ধির সমান হলে, এরা সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করবে।

◈ ভ্যারিগননের উপপাদ্য:
একই সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর চারদিকে দুটি বলের ভ্রামকের বীজগাণিতীয় সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারদিকে এদের লব্ধির ভ্রামকের সমান।

◈ একগুচ্ছ বল সুস্থিত থাকলে ঐ তলের যে কোন বিন্দুর চারদিকে এদের ভ্রামকের বীজগাণিতীয় সমষ্টি শূন্য হবে।

◈ তিনটি অসমরেখ বিন্দুর চারদিকে একগুচ্ছ সমতলীয় বলের ভ্রামকের সমষ্টি পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হলে বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে।

◈ কোন কঠিন বস্তুর উপর দুটি ভিন্ন রেখা বরাবর দুটি সমান্তরাল ও বিপরীতমুখী সমান বলকে যুগল বা জোড় বলে।
(P, b) যুগলের ভ্রামক $P \times AB = P \times b$



◈ কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বলের ভ্রামক ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ক্রিয়াশীল হলে তা ধনাত্মক অপর দিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ক্রিয়াশীল হলে তা ঋণাত্মক। (এর বিপরীত কথাটিও গ্রহণযোগ্য)

◈ যুগলের সমতলে অবস্থিত বিন্দুর সাপেক্ষে এর অংশক বলগুলোর ভ্রামকের সমষ্টি একটি ধ্রুব রাশি, যা যুগলের ভ্রামকের সমান।

◈ একই সমতলে অবস্থিত (P, x) যুগলকে (F, y) যুগল দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যায় যদি $P.x = F.y$ হয়।

◈ একই সমতলে ক্রিয়াশীল একটি যুগল এবং একটি বল একটি একক বলের সমতুল্য। ফলে এরা কখনই সাম্যাবস্থায় থাকবে না।
বল ≡ বল + যুগল।

◈ কোন সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ তলে কার্যরত দুইটি বলের ভ্রামকের বীজগাণিতীয় সমষ্টি ধ্রুবক হলে বল দুটি একটি যুগল গঠন করবে।

◈ ভারকেন্দ্র: কোন অবস্থানে বস্তুর ওজনকে যে বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলে বিবেচনা করা যায়, তাই হচ্ছে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র।

◈ কতিপয় বস্তুর ভারকেন্দ্র:

(i) একটি সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দুই এর ভারকেন্দ্র।

(ii) চারটি সুষম দন্ড দ্বারা গঠিত সামান্তরিক এর ভারকেন্দ্র হচ্ছে বিপরীত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। উল্লেখ্য, এই বিন্দুই কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

(iii) সুষম সামান্তরিক পাত এর ভারকেন্দ্র, কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

(iv) ত্রিভুজাকার সুষম পাত এর ভারকেন্দ্র মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু।

[দ্রষ্টব্য: ধরে নাও, বিস্তৃত বস্তুগুলোর প্রতিটি বিন্দুতে অভিকর্ষ ক্ষেত্র সুষম]

◈ কতিপয় অনুসিদ্ধান্ত:

(i) কোন ত্রিভুজাকার সমরূপ পাতের ওজন W হলে প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে $\frac{W}{3}$ ওজন দ্বারা ঐ ওজনকে সম্পূর্ণভাবে প্রতিস্থাপন করা যায়।

(ii) যে কোন ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রে W ওজন কাজ করলে, ঐ ওজনকে ত্রিভুজটির প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে কার্যরত $\frac{W}{3}$ ওজন দ্বারা প্রতিস্থাপন করা যায়।

(iii) কোন ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুতে স্থাপিত তিনটি সমান ওজনবিশিষ্ট বস্তুর ভারকেন্দ্র এবং ঐ ত্রিভুজাকৃতি সুষম পাতের ভারকেন্দ্র একই বিন্দু।

(iv) সাম্যাবস্থা সৃষ্টিকারী সমবিন্দু তিনটি বল এদের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল বাহুবিশিষ্ট যে কোন ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হবে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

➲ বলের সংযোজন ও বিভাজন:

◈ বলের সামান্তরিক সূত্র:

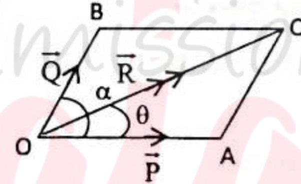
(i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (ii) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ (iii) $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q \quad \alpha}$

(iv) $\alpha = 0$ হলে, $R = P + Q$ [ইহা লব্ধির বৃহত্তম মান]

(v) $\alpha = \pi$ হলে, $R = |P - Q|$ [ইহা লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান]

(vi) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ হলে, $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

(vii) $P = Q$ হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ & $\theta = \frac{\alpha}{2}$



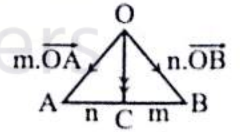
◈ অনুপাত সূত্র (m, n) উপপাদ্য:

(i) $AC : BC = n : m$ হলে, $m.\overrightarrow{OA} + n.\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OC}$

(ii) C, AB এর মধ্যবিন্দু হলে বা $m = n = 1$ হলে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$ [$\because AC : BC = 1:1$]

(iii) $m = n$ হলে, $m.\overrightarrow{OA} + m.\overrightarrow{OB} = 2m.\overrightarrow{OC}$

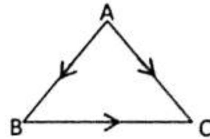
(iv) $m = n$ হলে, $\frac{1}{2}.\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



◈ বলের ত্রিভুজ সূত্র:

(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

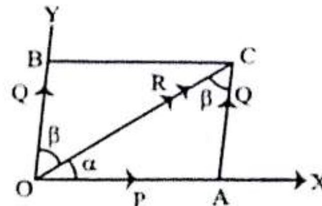
(ii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



◈ বল বিশ্লেষণ বা বল বিভাজন:

(i) $P = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

(ii) $\frac{P}{Q} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

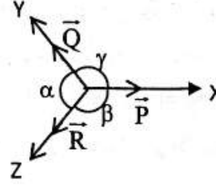


$P > Q$ হলে, $\sin\beta > \sin\alpha$ হবে অর্থাৎ $\alpha < \beta$ অতএব, দুটি বলের লব্ধি বৃহত্তর বলের সাথে ক্ষুদ্রতর কোণ সৃষ্টি করে।

◈ লামির উপপাদ্য:

(i) $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

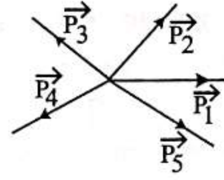
(ii) $P = Q = R$ হলে, $\alpha = \beta = \gamma = 120°$ হবে।

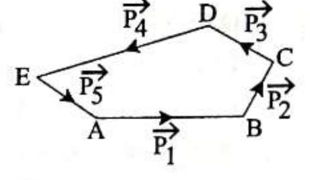


◈ বলের বহুভুজ সূত্র:

কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল কিছু সংখ্যক বলকে যদি বহুভুজের বাহুগুলো দ্বারা দিকে, মানে এবং একই ক্রমে প্রকাশ করা যায় তবে এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

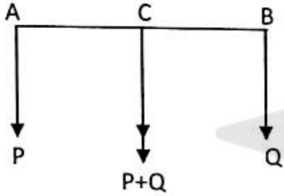
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = 0 \therefore \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{P}_5 = 0$





◈ সদৃশ বা সমমুখ সমান্তরাল বলের লব্ধি:

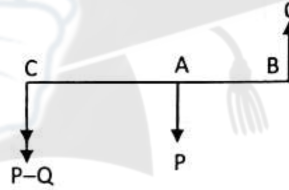
(i) $P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$



◈ অসমান, বিসদৃশ বা বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি:

(i) $P.AC = Q.BC$

$\Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$



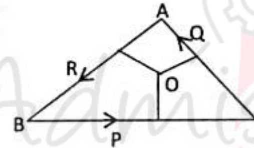
ΔABC এর BC, CA, AB বাহু বরাবর $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ বল ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি O বিন্দুগামী হলে, O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নির্ণয়।

(i) O ভরকেন্দ্র হলে: $\frac{P}{\sin A} + \frac{Q}{\sin B} + \frac{R}{\sin C} = 0$

(ii) O অন্তঃকেন্দ্র হলে: $P + Q + R = 0$

(iii) O পরিকেন্দ্র হলে: $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$

(iv) O লম্ববিন্দু হলে: $\frac{P}{\cos A} + \frac{Q}{\cos B} + \frac{R}{\cos C} = 0$

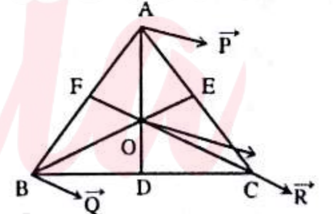


ΔABC এর A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি O বিন্দুগামী হলে:

(i) O বিন্দু ভরকেন্দ্র হলে: $P = Q = R$

(ii) O বিন্দু অন্তঃকেন্দ্র হলে: $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

(iii) O বিন্দু পরিকেন্দ্র হলে: $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$



◈ P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল হলে, P এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরালে লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে।

◈ P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি $\frac{P-Q}{P+Q}.d$ দূরত্ব সরে যাবে। [d হচ্ছে P ও Q এর ক্রিয়ারেখার দূরত্ব]

◈ P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল A ও B তে ক্রিয়ারত এবং এদের পরিমাণ x একক করে বাড়ালে লব্ধি $d = \frac{x}{P-Q}.AB$ দূরত্ব সরে যাবে।

সহজে মনে রাখার কৌশল

◈ কোন বিন্দুতে P এবং 2P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান নির্ণয় কর।

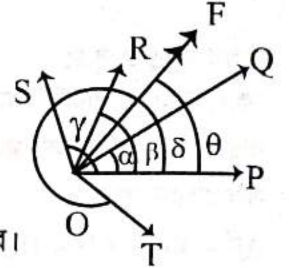
$\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}} = \frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{P}{P+4} \Rightarrow 2P = P + 4 \therefore P = 4$

◈ সমান বলের ক্ষেত্রে, লব্ধি $R = 2P\cos\frac{\theta}{2}$

θ হচ্ছে সমান বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ।

◈ একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল অনেকগুলো বলের লব্ধি Calculator এর সাহায্যে খুব সহজেই নির্ণয় করা যায়। এখানে concept টা অত্যন্ত জরুরি। লক্ষ্য করি, প্রতিটা জটিল সংখ্যা (complex number) কে (r, θ) আকারে প্রকাশ করা যায়। এখানে r হল এর modulus মান, θ দিক। অর্থাৎ, ভেক্টর রাশির মতই জটিল সংখ্যার ধর্ম ২টি। মান ও দিক।

সুতরাং, calculator এর Complex Mode দিকে ভেক্টর রাশি তথা বল ও বেগের হিসাব সহজেই করা যায়।



O বিন্দুতে $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}, \vec{T}$ বল ক্রিয়াশীল, এদের লব্ধি F।

$P\hat{}Q = \alpha,\ P\hat{}R = \beta,\ P\hat{}S = \gamma,\ P\hat{}T = \delta,\ P\hat{}F = \theta$

$r\angle\theta$ format-এ CMPLX থেকে $P + Q\angle\alpha + R\angle\beta + S\angle\gamma + T\angle\delta$

লিখে পুনরায় answer কে $r\angle\theta$ format-এ নিয়ে আসলে সরাসরি (মান, দিক)-এ উত্তর পাওয়া যাবে।

◈ P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং $R \perp Q$ হলে, $P^2 = Q^2 + R^2\ (P > Q)$

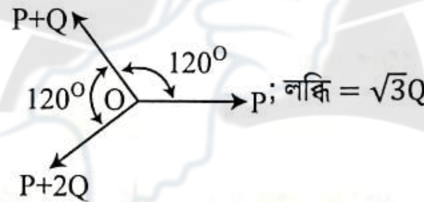
◈ সমীকরণ জোট সমাধানের Shortcut: $P^2 + Q^2 = x, PQ = y$ হলে y এর উৎপাদক থেকে P ও Q নিয়ে $P^2 + Q^2$ এর মান বের করে দেখতে হবে কখন x এর সমান হয়।

উদাহরণ: $P^2 + Q^2 = 25, PQ = 12$ হলে, P ও Q এর মান নির্ণয় কর। যখন $Q > P$

যখন $P = 3, Q = 4 \Rightarrow P^2 + Q^2 = 25$

$\therefore (P, Q) = (3, 4)$

◈ যখন তিনটি বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত থাকে এবং নিজেরা সমান্তর ধারা তৈরি করে:



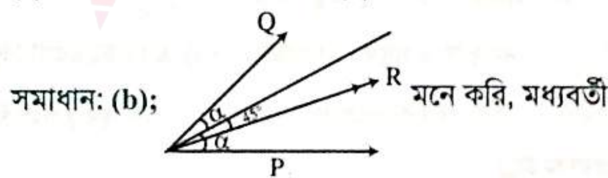
বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **MCQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. যদি 12 এবং 8 একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? **[DB'22]**

(a) $2\tan^{-1}10$ (b) $2\tan^{-1}5$
(c) $\tan^{-1}5$ (d) $2\tan^{-1}2$

সমাধান: (b);



মনে করি, মধ্যবর্তী কোণ $2\alpha, P = 12N, Q = 8N$ বলের সাইন সূত্রানুসারে,

$\frac{P}{\sin(\alpha+45°)} = \frac{Q}{\sin(\alpha-45°)} = \frac{R}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin(\alpha+45°)}{\sin(\alpha-45°)}$

$\Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{\sin(\alpha+45°)}{\sin(\alpha-45°)} \Rightarrow \frac{12+8}{12-8} = \frac{\sin(\alpha+45°)+\sin(\alpha-45°)}{\sin(\alpha+4\ \ °)-\sin(\alpha-45°)}$

$\Rightarrow \frac{20}{4} = \frac{2\sin\alpha\cos 4\ \ °}{2\cos\alpha\sin 4\ \ °} \Rightarrow 5 = \tan\alpha$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}5 \therefore$ মধ্যবর্তী কোণ $= 2\alpha = 2\tan^{-1}5$

02. A ↓6 ———— AB = 36 cm ———— B ↑2 **[DB'22; Din.B'21]**

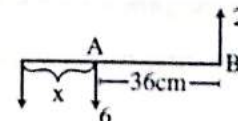
বৃহত্তম বল হতে বলদ্বয়ের লব্ধির দূরত্ব হবে—

(a) 54 cm (b) 36 cm (c) 27 cm (d) 18 cm

সমাধান: (d); মনে করি, বৃহত্তম বল হতে বলদ্বয়ের লব্ধির দূরত্ব x cm।

এখন, $\frac{6}{36+x} = \frac{2}{x} = \frac{6-2}{36} \Rightarrow \frac{6}{36+x} = \frac{2}{x} = \frac{4}{36}$

অর্থাৎ, $\frac{2}{x} = \frac{1}{9} \therefore x = 18$ cm



03. P ও Q(P > Q) বলদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল– **[Ctg.B'22] [Ans: d]**

(i) $\alpha = 0$ হলে লব্ধি বৃহত্তম হবে
(ii) $\alpha = 180°$ হলে লব্ধি ক্ষুদ্রতম হবে
(iii) P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর তাদের লম্বাংশের যোগফল $P + Q\cos\alpha$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

04. [Ctg.B'22; RB, JB'21]

A C B; 12N, 8N; AB = 24m

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে AC =?

(a) $\frac{5}{48}$ m (b) $\frac{48}{5}$ m (c) $\frac{72}{5}$ m (d) 48 m

সমাধান: **(b)**; $\frac{12}{14-} = \frac{8}{x} = \frac{12+8}{24}$

$\Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{20}{24} \therefore x = \frac{48}{5}$ m

05. 12 N ও 8 N দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল 15 m লম্বা একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে ক্রিয়া করলে বৃহত্তম বল হতে লব্ধি কত দূরে ক্রিয়া করে? [RB'22]

(a) 2 m (b) 4 m (c) 6 m (d) 8 m

সমাধান: **(c)**; $\frac{12}{15-x} = \frac{8}{x} = \frac{12+8}{15}$

$\Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{20}{15} \therefore x = 6$m

06. দুটি বলের লব্ধি বৃহত্তম হলে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? [RB'22]

(a) 180° (b) 90° (c) −180° (d) 0°

সমাধান: **(d)**; $R^2 = P^2 + Q^2 + 2pq\cos\alpha$

$A = 0$ হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ \Rightarrow R^2 = (P+Q)^2 \therefore R = P + Q$

07. তিনটি বল P, $\sqrt{3}$P ও P সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রথম দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? [SB, BB'22; All.B'18; JB'17]

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 150°

সমাধান: **(d)**; P, $\sqrt{3}$P, P বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। মনে করি, ১ম ২টি বলের মধ্যবর্তী কোণ α

প্রশ্নমতে, $P^2 = P^2 + (\sqrt{3}P)^2 + 2.P.\sqrt{3}P\cos\alpha$

$\Rightarrow P^2 = P^2 + 3P^2 + 2\sqrt{3}P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow -3P^2 = 2\sqrt{3}P^2\cos\alpha \Rightarrow -\sqrt{3} - 3 = 2\sqrt{3}\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\cos 30°$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos(180° - 30°) = \cos 150° \therefore \alpha = 150°$

08. [SB, CB'22, RB'21]

6N, P_2, 30°, P_1

6N বলের অংশকদ্বয় P_1 ও P_2 হলে P_1 এর মান নিচের কোনটি?

(a) $3\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{3}$ (c) $\frac{6\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

সমাধান: **(c)**; $\tan 90° = \frac{P_2\sin 120°}{P_1 + P_2\cos 120°}$

$\Rightarrow \cos 120° = -\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{P_1}{P_2} \therefore P_2 = 2P_1$

আবার, $R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos 120°$

$\Rightarrow 6^2 = P_1^2 + 4P_1^2 - 2P_1^2 \Rightarrow 36 = 3P_1^2 \therefore P_1 = \frac{6\sqrt{3}}{3}$

09. P ও Q দুটি সমান্তরাল বল এবং P > Q হলে নিচের কোনটি সত্য/সঠিক? [SB'22] [Ans: a]

(a) P, P+Q, Q (b) Q, P−Q, P

(c) P, P−Q, Q (d) P, Q, P+Q

10. 3P ও 5P মানের দুইটি বল পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কত? [JB'17; BB'22]

(a) 3P (b) $2\sqrt{2}$P (c) $\sqrt{34}$P (d) $\sqrt{43}$P

সমাধান: **(c)**; $R = \sqrt{(3P)^2 + (5P)^2}$

$= \sqrt{9P^2 + 25P^2} = \sqrt{34P^2} = \sqrt{34}P$

11. যদি $\sqrt{5}$ এককের দুইটি সমান বল 120° কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে, তাহলে,

[BB, CB, Din.B'22; Din.B, MB'21; SB'17]

(i) তাদের লব্ধি $\sqrt{5}$ একক

(ii) $\sqrt{5}$ একক বলের সাথে লব্ধি 60° কোণ উৎপন্ন করে

(iii) লব্ধি বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা ছোট

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, ii

সমাধান: (d); $R^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}.\sqrt{5}\cos 120°$

$= 5 + 5 + 2.5\left(-\frac{1}{2}\right) = 10 - 5 = 5 \therefore R = \sqrt{5}$

$\therefore$ (i) নং সঠিক $\theta = \tan^{-1}\frac{5\sin 120°}{5+5\cos 120°} = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{5+5\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{10-5}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60° \therefore$ (ii) নং সঠিক

12. 10N এবং 5N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 15 মিটার লম্বা একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে কার্যরত হলে ক্ষুদ্রতর বল থেকে লব্ধি কত দূরে ক্রিয়া করবে? [JB'22]

(a) 5 মিটার (b) 10 মিটার (c) 15 মিটার (d) 30 মিটার

সমাধান: (b);

$\frac{10}{15-x} = \frac{5}{x} = \frac{10+5}{15} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{15}{15} \therefore x = 5$m ∴ক্ষুদ্রতর বল হতে লব্ধি $(15-5)$m বা 10m দূরে ক্রিয়া করবে।

13. একটি কণার উপর $3ms^{-1}$, $4ms^{-1}$ এবং $5ms^{-1}$ বেগ তিনটি ক্রিয়া করায় কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে। ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত? **[JB, CB'22]**

(a) 0° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

সমাধান: **(c)**; $3^2 + 4^2 + 2.3.4.\cos 90° = 25 = 5^2$

∴ ক্ষুদ্রতর বেগ দুটির মধ্যবর্তী কোণ 90°

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

2N ও 3N মানের বলদ্বয় 60° কোণে একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

14. বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত? **[JB'22; CB'22]**

(a) $\sqrt{7}$ N (b) $\sqrt{19}$ N (c) 7 N (d) 19 N

সমাধান: **(b)**; $R^2 = 2^2 + 3^2 + 2.2.3.\cos 60°$

$= 4 + 9 + 12.\frac{1}{2} = 4 + 9 + 6 = 19 \therefore R = \sqrt{19}N$

15. লব্ধির বলের ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলটির সাথে কত কোণ তৈরি করবে? **[JB'22]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4+3\sqrt{3}}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)$

সমাধান: **(b)**; $\tan\theta = \frac{3\sin 6\ °}{2+3\cos 60°} = \frac{3.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+3.\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{4+3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$

16. একটি বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত নিচের কোন বলত্রয়কে তাদের সাম্যাবস্থার জন্য একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে প্রকাশ করা সম্ভব নয়? **[JB'22]**

(a) 1N, 2N, ও 3N (b) 2N, 3N, ও 4N

(c) 3N, 4N, ও 5N (d) 3N, 5N, ও 7N

সমাধান: **(a)**; (a) $1 + 2 \not> 3$; সম্ভব নয়, (b) $2 + 3 > 5$; সম্ভব, (c) $3 + 4 > 5$; সম্ভব, (d) $3 + 5 > 8$; সম্ভব

17. একই বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R হলে– **[CB'22] [Ans: c]**

i. $R = P + Q$, যখন $\alpha = 90°$

ii. $R = P\sim Q$, যখন $\alpha = 180°$

iii. $Q = P$ হলে $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii

18. P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধি P হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[Din.B'22]**

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 120°

সমাধান: **(d)**; $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow P = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \cos 60° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60°$

$\therefore \alpha = 120°$

19. 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দূরত্বে একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত একক দূরত্বে সরে যাবে? **[Din.B'22]**

(a) 1 একক (b) 2 একক (c) 3 একক (d) 4 একক

সমাধান: **(c)**; $d = \frac{8-6}{8+6}.21 = \frac{2}{14}.21 = 3$ একক

20. 6N ও 8N বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত হলে লব্ধি $2\sqrt{13}$N হবে? **[MB'22]**

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

সমাধান: **(d)**; মনে করি, মধ্যবর্তী কোণ α, অর্থাৎ,

$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + 8^2 + 2.6.8.\cos\alpha$

$\Rightarrow 5^2 = 36 + 64 + 96\cos\alpha \Rightarrow -48 = 96\cos\alpha$

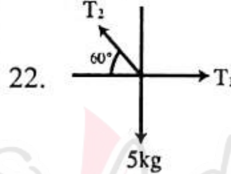
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-4}{96} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

21. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে যেকোনো দুটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের- **[MB'22] [Ans: b]**

(i) সমান (ii) সমান্তরাল (iii) বিপরীতমুখী

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

22. 

T_1, T_2 ও 5N বলত্রয় ভারসাম্যে রাখা হলে T_1 এর মান কত? **[MB'22]**

(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ (c) $5\sqrt{3}$ (d) $20\sqrt{3}$

সমাধান: **(a)**; লামির উপপাদ্য অনুসারে,

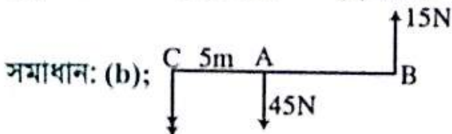
$\frac{T_1}{\sin 150°} = \frac{T_2}{\sin 90°} = \frac{5}{\sin 120°} \Rightarrow \frac{T_1}{\frac{1}{2}} = \frac{T_2}{1} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore T_1 = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

23. A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 45N ও 15N বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

AC = 5m হলে AB = কত? **[MB'22]**

(a) 5m (b) 10m (c) 15m (d) 20m

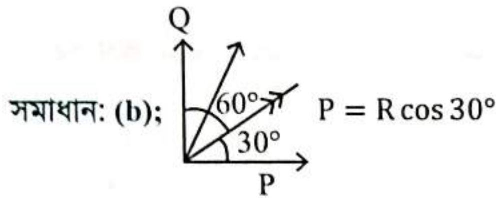
সমাধান: **(b)**; 

এখানে, $\frac{45}{AB+5} = \frac{15}{5} = \frac{45-15}{AB}$

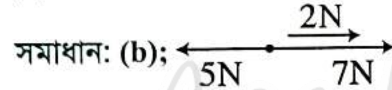
২য় ও ৩য় অনুপাত নিয়ে, $\frac{45-15}{AB} = \frac{15}{5}$

$\Rightarrow \frac{30}{AB} = \frac{3}{1} \therefore AB = 10m$

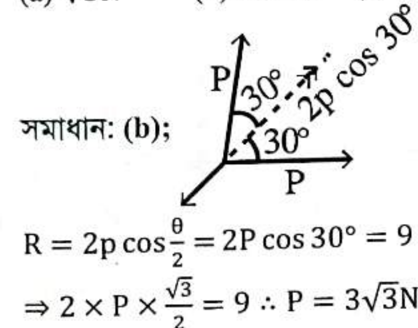
24. নিচের কোন বলত্রয় ত্রিভুজের বাহু দ্বারা দিকে মানে ও একই ক্রমে প্রকাশ করলে স্থিতাবস্থায় থাকবে? **[DB'21]**
(a) 1N, 2N, 3N (b) 3N, 4N, 5N
(c) 10N, 20N, 50N (d) 5N, 20N, 40N
সমাধান: **(b)**; 3, 4, 5 দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায়।

25. এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এর উভয় দিকে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণে আনত হলে P: Q কত? **[DB'21]**
(a) $2:\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}:1$ (c) $1:\sqrt{2}$ (d) $1:\sqrt{3}$
সমাধান: **(b)**; 

$P = R\cos 30°$
$Q = R\cos 60° \therefore \frac{P}{Q} = \frac{\cos 30°}{\cos 60°} = \sqrt{3}:1$

26. 5N ও 7N মানের দুটি বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি কোন দিকে ক্রিয়া করবে? **[DB, CB'21; CB'17]**
(a) 7N বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব বরাবর
(b) 7N বলের ক্রিয়ার সাথে সমান্তরাল বরাবর
(c) 5N বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব বরাবর
(d) 5N বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর
সমাধান: **(b)**; 

27. সমমানের দুটি বলদ্বয়ের লব্ধি বলদ্বয়ের গুণফলের সমান হলে উহাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[DB, Din.B'21; SB, BB'17]**
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{-2\pi}{3}$ (d) $\frac{-\pi}{3}$
সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); [প্রশ্নে লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের সমান বলা উচিত]
$P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha; -P^2$
$= 2P^2\cos\alpha; \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$

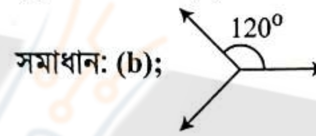
28. কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে সাম্যাবস্থায় রাখলে সমান বল কত? **[DB'21]**
(a) $\sqrt{3}$N (b) $3\sqrt{3}$N (c) 3N (d) 9N
সমাধান: **(b)**; 

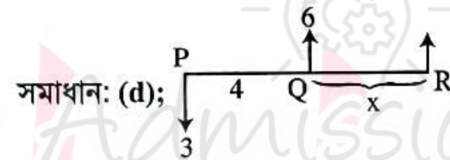
$R = 2p\cos\frac{\theta}{2} = 2P\cos 30° = 9$
$\Rightarrow 2 \times P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \therefore P = 3\sqrt{3}N$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
P ও Q দুইটি বল।

29. ক্ষুদ্রতম লব্ধির ক্ষেত্রে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RB'21] [Ans: d]**
(a) 0° (b) 90° (c) 120° (d) 180°

30. বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি কত? **[RB'21] [Ans: d]**
(a) $P^2 + Q^2$ (b) $\sqrt{P^2 + Q^2}$
(c) $P - Q$ (d) $P + Q$

31. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমান বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ কোনটি? **[RB'21]**
(a) 180° (b) 120° (c) 90° (d) 60°
সমাধান: **(b)**; 

32. 4 একক দূরত্বে P ও Q বিন্দুতে ক্রিয়ারত 3 ও 6 একক সমান্তরাল বলদ্বয়- **[Ctg.B'21]**
(i) সদৃশ হলে লব্ধি 9 একক (ii) অসদৃশ হলে লব্ধি 3 একক
(iii) অসদৃশ এবং লব্ধি R বিন্দুতে হলে QR = 4
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(d)**; 

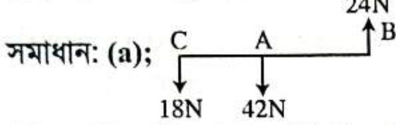
$\therefore 3(4 + x) = 6 \times x \Rightarrow 12 + 3x = 6x \Rightarrow 3x = 12$
$\therefore x = 4 \therefore QR = 4$ একক।
সদৃশ হলে, লব্ধি $= P + Q = 9$ একক
অসদৃশ হলে, লব্ধি $= P \sim Q = 3$ একক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
10N ও 5N মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণের ক্রিয়াশীল।

33. বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত? **[Ctg.B'21]**
(a) $3\sqrt{5}$ N (b) $5\sqrt{3}$ N (c) $5\sqrt{7}$ N (d) $7\sqrt{5}$ N
সমাধান: **(b)**; $R = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2 \times 10 \times 5\cos 120°}$
$= \sqrt{100 + 25 - 50} = 5\sqrt{3}$ N

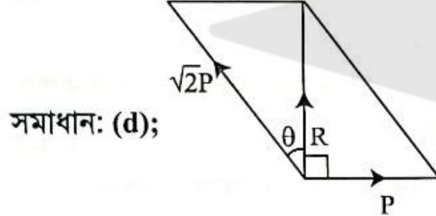
34. লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা বৃহত্তর বলটির সাথে কত কোণে অবস্থান করে? **[Ctg.B'21]**
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°
সমাধান: **(a)**; $\tan\theta = \frac{5\sin 120°}{10 + 5\cos 12\ °} = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta = 30°$

35. কোনো জড় বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 42N এবং 24N মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু BA এর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে তবে AB: BC = কত? **[Ctg.B'21]**
(a) 3: 7 (b) 4: 7 (c) 7: 3 (d) 7: 4

সমাধান: (a); 

$42 \times AC = 24 \times BC \therefore 7AC = 4BC$
$\Rightarrow 7\,(BC - AB) = 4BC \Rightarrow 7BC - 7AB = 4BC$
$\Rightarrow 3BC = 7AB \therefore \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{3}{7}$

36. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও $\sqrt{2}P$ বলদ্বয়ের লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে তাদের অন্তর্গত কোণ কত? **[SB'21]**
(a) 45° (b) 60° (c) 120° (d) 135°

সমাধান: (d); 

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{P}{\sqrt{2}P}\right) = 45°$
∴ মধ্যবর্তী কোণ $= (90 + 45)° = 135°$

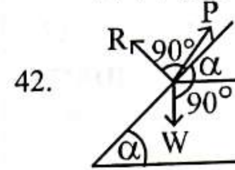
37. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে তিনটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি- **[SB'21] [Ans: d]**
(a) লম্বকেন্দ্র গামী (b) অন্তঃকেন্দ্র গামী
(c) পরিকেন্দ্র গামী (d) ভরকেন্দ্র গামী

38. কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখা হয়েছে। সমান বলদ্বয় কত? **[SB'21]**
(a) $9\sqrt{3}$N (b) 9N (c) $3\sqrt{3}$N (d) 3N
সমাধান: (b); $2P^2 + 2P^2\cos 120 = 81 \Rightarrow P = 9N$

39. 8N ও 6N মানের দুইটি বল কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে- **[SB'21] [Ans: d]**
(i) লব্ধির বৃহত্তম মান = 14N
(ii) লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান = 2N
(iii) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ হলে লব্ধির মান = 10N
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

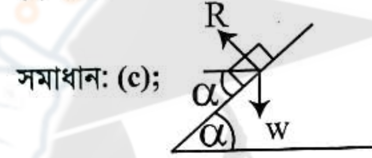
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
P মানের দুইটি সমান বল OX ও OY বরাবর ক্রিয়া করে। বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 90°।

40. বল দুইটির লব্ধি OX এর সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? **[BB'21]**
(a) 15° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

সমাধান: (c); 

; $\theta = \frac{\alpha}{2}$ [যেহেতু বলদ্বয়সমান]

41. বল দুইটির লব্ধির মান কত? **[BB'21]**
(a) $\sqrt{2}$P (b) $\sqrt{3}$P (c) 2P (d) 3P
সমাধান: (a); $R = 2P\cos 45° = P\sqrt{2}$

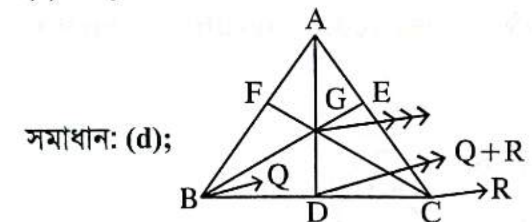
42. 

উদ্দীপকের আলোকে R ও W এর মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BB'21]**
(a) 90° − α (b) 90° + α
(c) 180° − α (d) 180° + α

সমাধান: (c);
$\theta = 90° + (90° - \alpha) = 180° - \alpha$

43. 5 একক দূরত্বে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9 এবং 5 একক মানের সমান্তরাল বলদ্বয়– **[CB, BB, MB'21]**
(i) অসদৃশ হলে লব্ধির মান 4 একক
(ii) সদৃশ এবং লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে $BC = \frac{45}{14}$ একক
(iii) সদৃশ হলে লব্ধির মান 14 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (ii) $\frac{BC}{9} = \frac{AB}{9+5} \Rightarrow BC = \frac{45}{14}$

44. ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B ও C তে যথাক্রমে P, Q এবং R মানের তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়াশীল। লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে– **[BB'21]**
(a) P: Q: R = sin A : sin B : sin C
(b) P: Q: R = tan A : tan B : tan C
(c) P: Q: R = sin 2A : sin 2B : sin 2C
(d) P: Q: R = 1: 1: 1

সমাধান: (d); 

$P \times AG = (Q + R) \times GD \Rightarrow Q + R = 2P \cdots\cdots$ (i)
অনুরূপ $P + Q = 2R \cdots\cdots$ (ii)
(i) ও (ii) থেকে P = R ফলে P = Q

45. একটি বলের আনুভূমিক ও উলম্ব অংশের মান 4N ও 3N হলে বলটির মান– [JB'21]

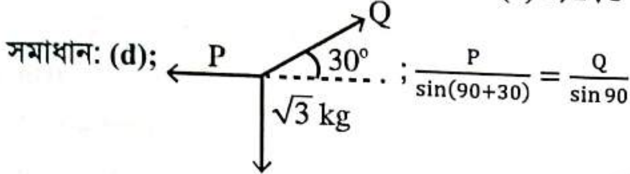
(a) 5N (b) 10N (c) $2\sqrt{3}$N (d) 7N

সমাধান: **(a);** $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5N$

46. $\sqrt{3}$kg ওজনের একটি বস্তুকে দুটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়ারত হলে বলদ্বয় কত কেজি ওজন? [JB'21]

(a) $3\sqrt{5}, 10$ (b) $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{3}, 10$ (d) $3, 2\sqrt{3}$

সমাধান: **(d);**



$\frac{P}{\sin(90+30)} = \frac{Q}{\sin 90} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 150°}$; $\left|\frac{P}{\cos 30} = \frac{Q}{1} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\right|$; $Q = 2\sqrt{3}$

$\therefore P = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$

47. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বলের ক্ষুদ্রতম লব্ধি 1N এবং বল দুটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান 5N। বলদ্বয় দ্বারা বৃহত্তম লব্ধির মান– [JB'21]

(a) 5N (b) 2N (c) 7N (d) 3N

সমাধান: **(c);** $(P+Q)^2 + (P-Q)^2$
$= 2(P^2 + Q^2) \Rightarrow (P+Q)^2 + 1 = 2 \times 25$
$\Rightarrow (P+Q)^2 = 49 \Rightarrow P + Q = 7$

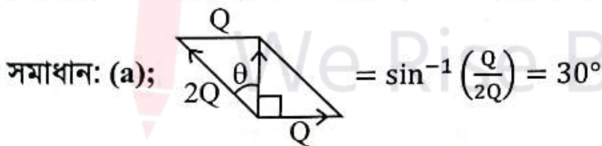
48. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও 2Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি Q বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হলে– [JB'21]

(i) বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°
(ii) লব্ধির মান $\sqrt{3}$Q একক
(iii) Q বলের দিক বরাবর 2Q বলের ধনাত্মক লম্বাংশ 3Q

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(a);**

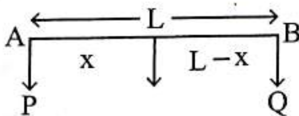


$= \sin^{-1}\left(\frac{Q}{2Q}\right) = 30°$

লব্ধি, $R = \sqrt{4Q^2 - Q^2} = \sqrt{3}Q$ একক

Q এর দিকে 2Q এর লম্বাংশ $2Q\cos 120 = -Q \therefore$ (iii) ভুল

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



49. $L = 8, Q = 30, x = 6$ হলে P এর মান কত? [JB, CB'21; JB'17]

(a) 100 (b) 7 (c) 70 (d) 10

সমাধান: **(d);** $Px = QL - Qx \Rightarrow 6P = 240 - 180$
$\Rightarrow 6P = 60 \Rightarrow P = 10$

50. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও 30N বলদ্বয়ের লব্ধি 25N, P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব। P এর মান কত? [CB'21]

(a) $10\sqrt{5}$ N (b) $10\sqrt{3}$
(c) $5\sqrt{11}$ N (d) $5\sqrt{15}$

সমাধান: **(c);** $P = \sqrt{(\text{বড়বল})^2 - (\text{ছোটবল})^2}$
$= \sqrt{30^2 - 25^2} = 5\sqrt{11}$ N

51. P বলের উপাংশদ্বয় P এর সাথে 15° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। P বলের একটি উপাংশ কোনটি? [CB'21]

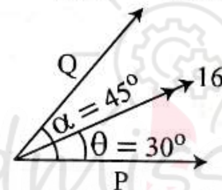
(a) $\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2P}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}P}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}P}{2}$

সমাধান: **(a);** $\frac{P_1}{\sin 45°} = \frac{P}{\sin(45°+15°)}$ বা, $P_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}P$

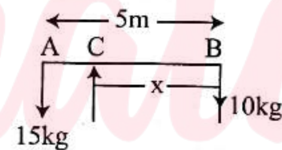
52. P ও Q মানের দুটি বল পরস্পর 45° কোণে কোনো একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি 16N, P বলের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। Q বলের মান কত? [Din.B'21]

(a) $8\sqrt{2}$N (b) $4\sqrt{2}$N (c) $32\sqrt{2}$ N (d) 8N

সমাধান: **(a);** $Q = \frac{R\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{16\sin 30°}{\sin 45°} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$;



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



53. C বিন্দুতে দণ্ডটি আনুভূমিকভাবে ভারসাম্যে থাকলে BC এর দৈর্ঘ্য কত মিটার? [Din.B'21]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

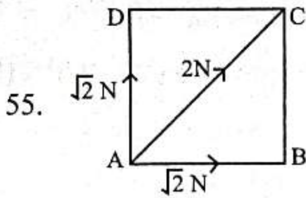
সমাধান: **(c);** $10x = 15(5 - x) \Rightarrow 10x$
$= 75 - 15x \Rightarrow 25x = 75 \Rightarrow x = 3$

54. P ও Q $(P > Q)$ মানের দুইটি সমান্তরাল বল– [MB'21] [Ans: d]

(i) সদৃশ হলে বলদ্বয়ের লব্ধি $P + Q$
(ii) বিসদৃশ হলে বলদ্বয়ের লব্ধি $P - Q$
(iii) বলদ্বয়ের লব্ধি P এর দিকের সাথে সমান্তরাল

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

55. 

চিত্রে ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। A বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলত্রয়ের লব্ধি কত? **[RB'19]**

(a) $2\sqrt{2}$ (b) 4 (c) 8 (d) 16

সমাধান: **(b);** AB বরাবর, $F_x = \sqrt{2} + 2\cos 45° = 2\sqrt{2}$

AD বরাবর, $F_y = \sqrt{2} + 2\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$\therefore F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 4N$

56. ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে কী বলা হয়? **[RB'19] [Ans: a]**

(a) অন্তঃকেন্দ্র (b) পরিকেন্দ্র
(c) ভরকেন্দ্র (d) লম্বকেন্দ্র

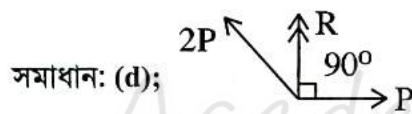
57. দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের দ্বিগুণ হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ- **[Ctg.B'19]**

(a) 0° (b) 90° (c) 135° (d) 180°

সমাধান: **(b);** $2P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos\alpha \therefore \alpha = 90°$

58. একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বল P ও 2P । তাদের লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে তাদের অন্তর্গত কোণ কত? **[BB'19]**

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

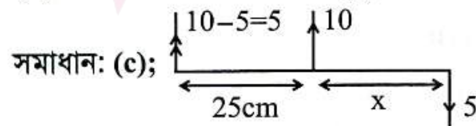
সমাধান: **(d);** 

$R\cos 90° = P + 2P\cos\alpha \therefore \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

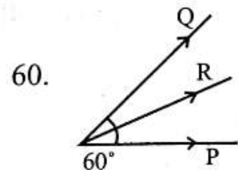
$\therefore \alpha = 120°$

59. একই অনুভূমিক রেখায় 10 কেজি ও 5 কেজি ওজনের দুটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। বৃহত্তর বল থেকে এদের লব্ধির প্রয়োগ বিন্দুর দূরত্ব 25 সে.মি. হলে বল দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[JB'19]**

(a) 50 সে.মি. (b) 75 সে.মি.
(c) 25 সে.মি. (d) 15 সে.মি.

সমাধান: **(c);** 

$\therefore 5 \times 25 = 5 \times x \Rightarrow x = 25cm$

60. 

P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে লব্ধি R হলো- **[JB'19]**

(a) $\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ}$ (b) $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ}$
(c) $P^2 + Q^2 + PQ$ (d) $P^2 + Q^2 + 2PQ$

সমাধান: **(a);** $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 60°$

$\Rightarrow R = \sqrt{P^2 + Q^2 + PQ}$

61. একটি কণার উপর কার্যরত P ও Q মানের বলদ্বয় সমান ও একই রেখায় বিপরীতমুখী হলে, এদের লব্ধি কোনটি? **[CB'19] [Ans: a]**

(a) 0 (b) P + Q
(c) $P^2 + Q^2$ (d) $\sqrt{P^2 + Q^2}$

62. P এবং Q বল দুটি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 5N এবং একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 7N। **[Din.B'19]**

(i) P বলের মান 6N (ii) Q বলের মান 1N
(iii) বল দুটি মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে 180° এবং 0°

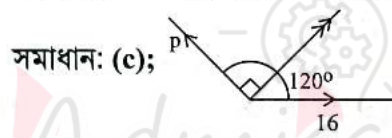
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(d);** $P - Q = 5 ; P + Q = 7 \therefore P = 6, Q = 1$

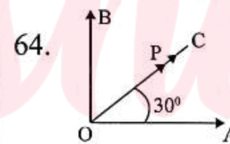
63. কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুটি বলের বৃহত্তম বলটি 16N এবং ক্ষুদ্রতম বলটি লব্ধির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতম বলটি কত? **[Din.B'19]**

(a) $\sqrt{3}$N (b) 3N (c) 8N (d) $8\sqrt{3}$N

সমাধান: **(c);** 

$\therefore \tan 90° = \frac{16\sin 120°}{p + 16\cos 120°} \Rightarrow p + 16\cos 120° = 0$

$\Rightarrow p = 16\cos 60° = 8N$

64. 

উদ্দীপকে- **[All.B'18; RB'17]**

(i) OA বরাবর P বলের লম্বাংশ $= \frac{\sqrt{3}P}{2}$

(ii) OB বরাবর P বলের লম্বাংশ $= \frac{P}{2}$

(iii) OC বরাবর P বলের লম্বাংশ = P

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(d);** OA বরাবর P বলের লম্বাংশ

$= P\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}P$

OB বরাবর P বলের লম্বাংশ $= P\sin 30° = \frac{1}{2}P$

OC বরাবর P বলের লম্বাংশ $= P\cos 0° = P$

65. 5p এবং 4p মানের দুইটি বল একটি কণার উপর α কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধি $\sqrt{21}p$ হলে α এর মান কত? **[MB'21; DB'17]**

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

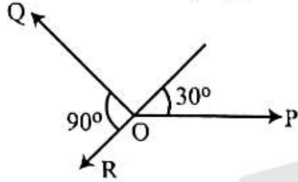
সমাধান: **(d);** $(\sqrt{21}P)^2$

$= (5p)^2 + (4p)^2 + (4p)^2 + 2 \times 4p \times 5p\cos\alpha$

$\Rightarrow 21p^2 = 25p^2 + 16p^2 + 40p^2\cos\alpha$

$\Rightarrow -20p^2 = 40p^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

66. 

O বিন্দুতে ক্রিয়ারত সমতলীয় তিনটি বল P, Q & R সাম্যাবস্থায় আছে। P এর মান 12N হলে, Q & R এর মান যথাক্রমে নিচের কোনটি? **[RB'17]**

(a) $24\sqrt{3}$ N, 24N (b) 24N, $24\sqrt{3}$ N

(c) $6\sqrt{3}$ N, 6N (d) 6N, $6\sqrt{3}$ N

সমাধান: **(d);** লামির সূত্র মতে, $\frac{P}{\sin 90°} = \frac{Q}{\sin\angle POR}$

$= \frac{R}{\sin\angle POQ}$ $\therefore Q = P\sin\angle POR = 12\sin 150° = 6N$

$R = P\sin\angle POQ = 12\sin 120° = 6\sqrt{3}N$

67. সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি বৃহত্তম হয় যখন বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ- **[Ctg.B'17] [Ans: a]**

(a) 0° (b) 45° (c) 90° (d) 180°

68. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখন্ডক তিনটির ছেদবিন্দু হলো– **[Ctg.B'17] [Ans: b]**

(a) অন্তঃকেন্দ্র (b) পরিকেন্দ্র

(c) ভরকেন্দ্র (d) লম্বকেন্দ্র

69. P ও 25N মানের দুইটি বলের লব্ধি 20N যা P এর সাথে লম্বভাবে স্থাপিত হলে, P এর মান কোনটি? **[SB'17]**

(a) 10 N (b) 20 N (c) 25 N (d) 15 N

সমাধান: **(d);** $\tan 90 = \frac{25\sin\alpha}{P+25\cos\alpha}$ $\therefore \frac{1}{0} = \frac{25\sin\alpha}{P+25\cos\alpha}$

$\therefore P = -25\cos\alpha$

এখন, $(20)^2 = 25^2 + P^2 + 2(P)(25)\cos\alpha$

$(20)^2 = (25)^2 + P^2 - 2P^2$

$\therefore P^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \therefore P = 15$ N

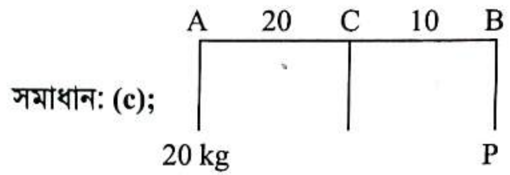
70. P ও Q দুইটি সমান ও সমান্তরাল বল বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধি কত? **[SB'17] [Ans: d]**

(a) P + Q (b) P − Q (c) Q − P (d) 0

71. 30 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB দণ্ডের A প্রান্তে 20 কেজি ওজন ও B প্রান্তে P কেজি ওজন ঝুলানো আছে। এদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। AC এর দৈর্ঘ্য 20 মিটার হলে বলটির মান কত? **[JB'17]**

(a) 10N (b) 30N (c) 40N (d) 50N

সমাধান: **(c);**



$AC \times 20 = BC \times P$ $\therefore 20 \times 20 = 10 \times P$

$\therefore P = 40$ N

72. কোনো জড় বস্তুর উপর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 42N ও 24N মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল কার্যরত। যদি BA এর বর্ধিতাংশের উপর C বিন্দুতে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কার্যরত হয়, তবে AC ও BC এর অনুপাত কোনটি? **[Din.B'17]**

(a) 7: 6 (b) 7: 4 (c) 6: 7 (d) 4: 7

সমাধান: **(d);** C A B 24 42 $\frac{24}{AC} = \frac{42}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$

73. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত $(2+2\sqrt{2})$N মানের দুইটি সমান বলের লব্ধি বল $(4+4\sqrt{2})$N হলে, তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[Din.B'17]**

(a) 0° (b) 45° (c) 90° (d) 180°

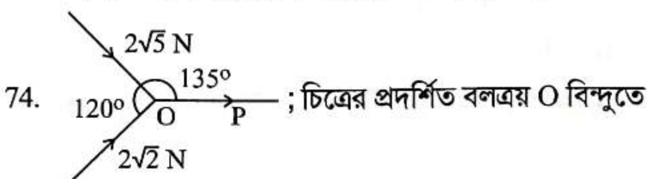
সমাধান: **(a);** $(4+4\sqrt{2})^2$

$= 2(2+2\sqrt{2})^2 + 2(2+2\sqrt{2})^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 4(2+2\sqrt{2})^2$

$= 2(2+2\sqrt{2}) + 2(2+2\sqrt{2})^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 2 = 1 + \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0°$

74. 

; চিত্রের প্রদর্শিত বলত্রয় O বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকলে, P বলটির মান কত? **[Din.B'17]**

(a) $4\sqrt{3}$N (b) 2N

(c) $2\sqrt{3}$N (d) $\sqrt{3}$N

সমাধান: **(c);** $\frac{P}{\sin 120°} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 135°}$ $\therefore P = 2\sqrt{3}$N

◆ **MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান**

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. একই বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বল দুইটির লব্ধি R এবং-

(i) $\alpha = 90°$ হলে, $R = \sqrt{2}P$

(ii) $\alpha = 90°$ হলে, P বলের সাথে লব্ধি বল $45°$ কোণ উৎপন্ন করে

(iii) $P = Q = R$ হলে, $\alpha = 120°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(b)**; (i) $P = Q$ হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

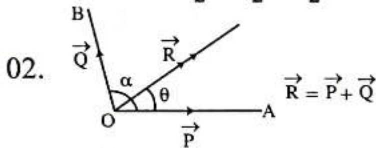
$= 2P\cos\frac{90°}{2} = 2P \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}P$ [(i) সত্য]

(ii) $\alpha = 90°$ হলে, $\tan\theta = \frac{Q\sin 90°}{P+Q\cos 90°} = \frac{Q.1}{P+0}$

$= \frac{Q}{P} \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$

(iii) $P = Q$ হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow P = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60° \therefore \alpha = 120°$ [(iii) সত্য]

02. 

উদ্দীপকের ক্ষেত্রে-

(i) $P = 50N, Q = 40N$ এবং $OA = 0.5m$ হলে, $OB = 0.4m$

(ii) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(iii) $\theta = \tan^{-1}\frac{P\sin\alpha}{P+Q\,co}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii

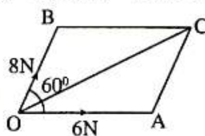
সমাধান: **(c)**; (i) $\frac{P}{Q} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow OB = \frac{Q}{P} \times OA$

$= \frac{40}{50} \times 0.5 = 0.4m$ [(i) সত্য]

(ii) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ [(ii) সত্য]

(iii) $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ [(iii) সত্য নয়]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



03. $\tan\angle AOC = ?$

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (c) $\frac{3\sqrt{3}}{11}$ (d) $\frac{2}{3+2\sqrt{3}}$

সমাধান: **(b)**; $\tan\angle AOC = \frac{8\sin 60°}{6+8\cos 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

04. উদ্দীপকের আলোকে

(i) লব্ধির মান ও দিক OC দ্বারা সূচিত

(ii) $\angle AOC < \angle BOC$

(iii) $OA = 12$ cm হলে $OB = 9$ cm

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) i, ii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(a)**; (i) লব্ধির মান ও দিক OC দ্বারা সূচিত [(i) সত্য] (ii) OC রেখার সাথে OB এর কোণ < OC রেখার সাথে OA এর কোণ $\therefore \angle BOC < \angle AOC \therefore \angle AOC > \angle BOC$ [কারণ লব্ধি বৃহত্তর বলের দিকে বেশি হেলে থাকে।] [(ii) সত্য নয়] (iii) $\frac{6}{8} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{12}{OB}$

$\therefore OB = \frac{8}{6} \times 12 = 16$ cm [(iii) সত্য নয়]

05. একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল সমমানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের যেকোনো একটির $\sqrt{3}$ গুণ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ-

(a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\alpha}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: **(c)**; $R = 2P\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{3}P = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

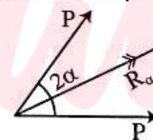
$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30° \therefore \alpha = 60° = \frac{\pi^c}{3}$

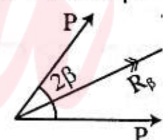
06. 2α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি, 2β কোণে ক্রিয়ারত বল দুইটির লব্ধির দ্বিগুণ হওয়ার শর্ত কোনটি?

(a) $\cos\alpha = 2\cos\beta$ (b) $2\cos\alpha = \cos\beta$

(c) $1 + 2\cos\alpha = \cos\beta$ (d) $1 + 2\cos\beta = \cos\alpha$

সমাধান: **(a)**;





$R_\alpha = 2P\cos\frac{2\alpha}{2} \therefore R_\alpha = 2P\cos\alpha$ এবং

$R_\beta = 2P\cos\frac{2\beta}{2} \therefore R_\beta = 2P\cos\beta$

তাহলে, $R_\alpha = 2R_\beta \Rightarrow 2P\cos\alpha = 2.2P\cos\beta$

$\therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$

07. $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ এর জন্য- **[Ans: d]**

(i) R এর অংশক বা উপাংশ P ও Q

(ii) P ও Q এর লব্ধি R

(iii) $\overline{OA} = \overline{P}, \overline{OB} = \overline{Q}$ এবং $\overline{OC} = \overline{R}$ হলে,

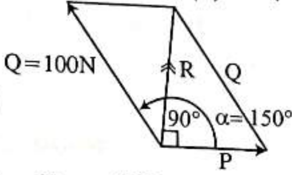
$\frac{OA}{P} = \frac{OB}{Q} = \frac{OC}{R}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii

08. কোনো বিন্দুতে 150° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের উপর লম্ব। বৃহত্তর উপাংশের পরিমাণ 100N হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ এবং তাদের লব্ধির মান যথাক্রমে-

(a) 50 N এবং 50 N (b) 50 N এবং $50\sqrt{3}$ N
(c) $50\sqrt{3}$ N এবং 50 N (d) $50\sqrt{3}$ N এবং $50\sqrt{3}$ N

সমাধান: (c);


$P + Q\cos\alpha = R\cos 90° \Rightarrow P + 100\cos 150°$
$= 0 \therefore P = 50\sqrt{3}N$
আবার, $R^2 = Q^2 - P^2 = 100^2 - (50\sqrt{3})^2$
$\therefore R = 50N$ [পিথাগোরাস]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
কোনো বিন্দুতে 1, 2 ও $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

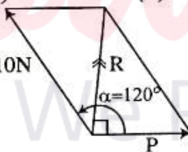
09. কোনো বিন্দুতে 2P এবং P মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করা হলে তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান-

(a) 16 (b) 8 (c) 4 (d) 2

সমাধান: (b); লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকলে
$\left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{১ম ক্ষেত্র}} = \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{২য় ক্ষেত্র}}$
$\Rightarrow \frac{2P}{P} = \frac{2.2P}{P+8} \Rightarrow 2P = P + 8 \therefore P = 8$ একক

10. কোনো বিন্দুতে দুইটি বল 120° কোণে ক্রিয়ারত। বৃহত্তর বলটির মান 10 N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে ক্ষুদ্রতর বলের মান নির্ণয় কর।

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

সমাধান: (b);


$P + Q\cos\alpha = R\cos 90° \Rightarrow P + 10\cos 120° = 0$
$\therefore P = 5$ একক

11. একই বিন্দুতে পরিবর্তনশীল কোণে প্রযুক্ত দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম মান 17 N; বল দুইটি লম্বভাবে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান হয় 13 N। বল দুইটির লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান কত হবে?

(a) 5N (b) 6N (c) 7N (d) 8N

সমাধান: (c); ধরি, বলদ্বয় P ও Q $\therefore R_{max} = P + Q = 17N$ এবং $R_{min} = P - Q$ এবং 90° কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান, $R_p = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এখন
$(P+Q)^2 + (P-Q)^2 = 2(P^2 + Q^2)$
$\Rightarrow R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2R_P^2 \Rightarrow 17^2 + R_{min}^2$
$= 2 \times 13^2 \therefore R_{min} = 7N$

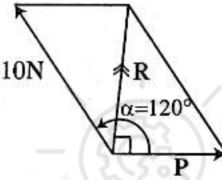
12. এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান 8 ও 2 কেজি। যখন বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° তখন লব্ধির মান কত?

(a) 9 kg-wt (b) 7 kg-wt (c) 5 kg-wt (d) 3 kg-wt

সমাধান: (b); $P + Q = 8; P - Q = 2 \therefore P = 5$
এবং $Q = 3$ একক $\alpha = 60°$ হলে লব্ধি,
$R = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2.5.3\cos 60°} = 7$ kg-wt

13. কোনো বিন্দুতে দুইটি বল 120° কোণে ক্রিয়াশীল। বৃহত্তম উপাংশ 10 N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতর উপাংশ P এবং লব্ধি R হলে ক্ষুদ্রতর উপাংশ ও লব্ধি নিচের কোন সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত?

(a) $P + 10\cos 120° = R\cos 90°$
(b) $P + 5\cos 60° = R\sin 90°$
(c) $R + 10\cos 120° = P\cos 90°$
(d) $R + 10\cos 120° = P\cos 90°$

সমাধান: (a);


P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে, $P + Q\cos\alpha = R\cos 90°$
$\Rightarrow P + 10\cos 120° = R\cos 90°$

14. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত 3P, 7P ও 5P মানের তিনটি বলের দিক যথাক্রমে AB, BC ও CA এর দিকে। বল তিনটির লব্ধির মান কত?

(a) 3P (b) 2P (c) $2\sqrt{3}P$ (d) $3\sqrt{3}P$

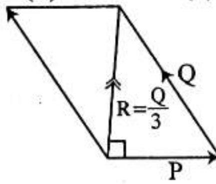
সমাধান: (c); 3P, 5P এবং 7P মানের বলত্রয় সমান্তর প্রগমনে আছে এবং এদের সাধারণ অন্তর = 2P বলত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান্তরালে কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করলে বলগুলোর লব্ধি = $\sqrt{3}$ × সাধারণ অন্তর $= \sqrt{3} \times 2P = 2\sqrt{3}P$ একক।

15. একই বিন্দুগামী 2, 4 ও 6 ওজনের তিনটি বল একে অপরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। লব্ধির মান-

(a) $\sqrt{3}$ (b) 2 (c) $3\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{3}$

সমাধান: (d); 2, 4 ও 6 একক ওজনের তিনটি বল সমান্তর প্রগমনে আছে এবং এদের সাধারণ অন্তর = 2 একক। এদের মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে এদের লব্ধি
$= \sqrt{3}$ × সাধারণ অন্তর $= \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$ একক।

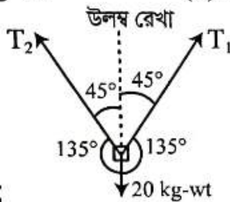
16. যদি কোনো কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির এক-তৃতীয়াংশের সমান হয় তবে বলদ্বয়ের মানের অনুপাত হবে-
(a) $2\sqrt{2}:3$ (b) $8:9$ (c) $2:3\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{2}:4$

সমাধান: (a); 

লব্ধি $\vec{R} \perp \vec{P}$ এবং

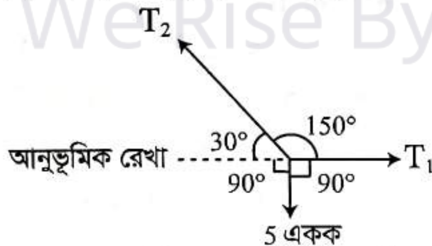
$R = \frac{Q}{3}$ এখন, $Q^2 = R^2 + P^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{Q^2}{9} + P^2$
$\Rightarrow \frac{8}{9}Q^2 = P^2 \Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{8}{9} \therefore \frac{P}{Q} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\therefore P:Q = 2\sqrt{2}:3$

17. 20 কেজি ওজনের একটি বস্তুর সাথে দুইটি রশি বেঁধে দুজন লোক তা বহন করছে। রশিদ্বয় খাড়া রেখার সাথে সমান 45° কোণ উৎপন্ন করে। রশিদ্বয়ের টান হবে-
(a) $10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$ kg-wt (b) $20\sqrt{2}, 20\sqrt{2}$ kg-wt
(c) 20, 20 kg-wt (d) 10, 10 kg-wt



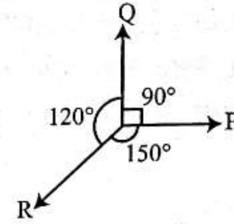
সমাধান: (a);
লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{T_1}{\sin 135°} = \frac{T_2}{\sin 135°}$
$= \frac{20}{\sin(45°+4\ °)} \Rightarrow \frac{T_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{T_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{20}{1}$
$\therefore T_1 = T_2 = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$ kg-wt

18. আনুভূমিক দিকে ও আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বল 5 একক ওজনের বস্তুকে স্থিরভাবে ধরে রাখে, বল দুইটির মান কত?
(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}, 10$ (b) $5\sqrt{3}, 10$ (c) 5, 10 (d) $5, 10\sqrt{3}$

সমাধান: (b);


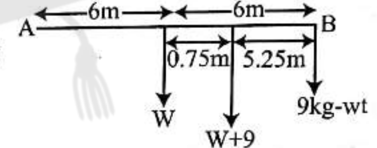
লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{T_1}{\sin 120°} = \frac{T_2}{\sin 90°} = \frac{5}{\sin 150°}$
$\therefore T_1 = 5 \times \frac{\sin 120°}{\sin 150°} = 5\sqrt{3}$ একক
এবং $T_2 = 5 \times \frac{\sin 90°}{\sin 150°} = 10$ একক

19. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q এবং R ভারসাম্য সৃষ্টি করে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 90° এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 120°; P ও Q এর অনুপাত কত?
(a) $2:1$ (b) $\sqrt{3}:2$ (c) $1:2$ (d) $\sqrt{3}:1$

সমাধান: (d); 

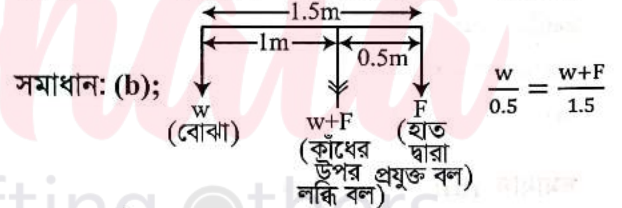
লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin 120°} = \frac{Q}{\sin 150°} = \frac{R}{\sin 90°}$
$\Rightarrow \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{1} \therefore \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2} \therefore \frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{3}}{1}$
$\therefore P:Q = \sqrt{3}:1$

20. 12m লম্বা একটি ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 9kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে $5\frac{1}{4}$m দূরে একটি খুঁটির উপর দন্ডটি ভূমির সমান্তরাল অবস্থান করে তবে দন্ডটির ওজন কত?
(a) 126 kg (b) 63 kg
(c) 84 kg (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: (b); 

ধরি, দন্ডের ওজন = W $\therefore \frac{W}{5.25} = \frac{9}{0.75}$
$\therefore W = 63$ kg-wt

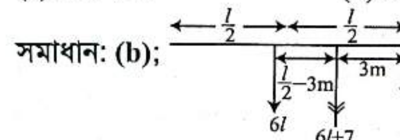
21. একজন লোক লাঠির একপ্রান্তে বাঁধা একটি বোঝা কাঁধে বহন করছে, বোঝাটির ওজন w এবং লোকটির কাঁধ হতে বোঝাটির ও লোকটির হাতের দূরত্ব যথাক্রমে 1 মি. ও 0.5 মি। লোকটির কাঁধের উপর চাপ-
(a) w (b) 3w (c) 1.5w (d) 2w

সমাধান: (b); 

$\frac{w}{0.5} = \frac{w+F}{1.5}$

$\Rightarrow w + F = \frac{1.5}{0.5}w = 3w$

22. মিটার প্রতি 6 কেজি ওজনের একটি লৌহদন্ডের একপ্রান্তে 7 কেজি ওজনের একটি বস্তু ঝুলালে তার উক্ত প্রান্ত হতে 3মি. দূরে একটি বিন্দুতে ভারসাম্য হয়। দন্ডটি কত লম্বা?
(a) 6 মিটার (b) 7 মিটার
(c) 21 মিটার (d) 12 মিটার

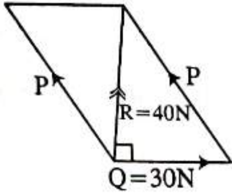
সমাধান: (b); 

ধরি, দণ্ডের দৈর্ঘ্য = lm $\therefore$ দণ্ডের ওজন = $6l$ kg-wt
$\frac{6l+7}{\frac{l}{2}} = \frac{6l}{3} \Rightarrow \frac{12l+}{l} = \frac{6l}{3}$
$\Rightarrow 6l^2 = 36l + 42 \therefore l = 7$m

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

23. দুইটি বলের লব্ধি 40 N যা ক্ষুদ্রতর বলটির উপর লম্ব। ক্ষুদ্রতর বলটি 30 N হলে এদের বৃহত্তম লব্ধি কত?
(a) 60N (b) 70N (c) 50N (d) 80N

সমাধান: (d);

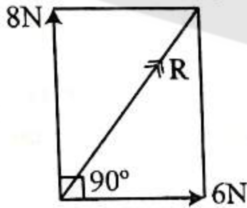


বৃহত্তর বলটি P হলে, $P^2 = 40^2 + 30^2 \Rightarrow P = 50N$

$\therefore$ বৃহত্তম লব্ধি, $R_{max} = P + Q = 50 + 30 = 80N$

24. একটি বলের আনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান যথাক্রমে 6N ও 8N হলে বলটির মান-
(a) 12N (b) 10.5N (c) 11N (d) 10N

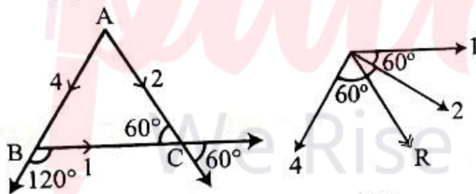
সমাধান: (d);



$R = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10N$

25. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহু বরাবর যথাক্রমে 4, 2 এবং 1 একক মানের বলত্রয় ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান কত?
(a) $3\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) কোনটিই নয়

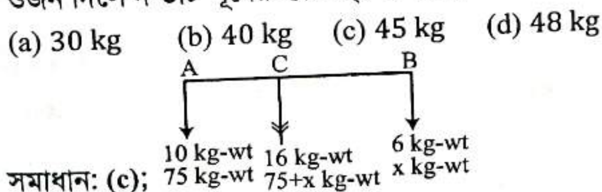
সমাধান: (a);



$R^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 2.1.2\cos 60°$
$+2.2.4\cos 60° + 2.1.4\cos 120° \therefore R = 3\sqrt{3}$ একক

26. AB একটি দন্ডের A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 10 এবং 6 কেজি ওজন স্থাপন করলে তা C বিন্দুতে আনুভূমিকভাবে স্থির থাকে। যদি A প্রান্তে 75 কেজি ওজন রাখা হয় তবে B প্রান্তে কত ওজন দিলে দন্ডটি পূর্বের ন্যায় স্থির থাকবে?
(a) 30 kg (b) 40 kg (c) 45 kg (d) 48 kg

সমাধান: (c);



$\frac{10}{6} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75\times6}{10} = 45$ kg-wt

27. কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখে। সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান-
(a) 3N (b) $3\sqrt{3}$ N (c) $\sqrt{3}$ (d) 7N

সমাধান: (b); ধরি সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান P.

$\therefore 9 = 2P\cos\frac{60°}{2} \Rightarrow P = \frac{9}{2\times\cos 30°} = 3\sqrt{3}N$

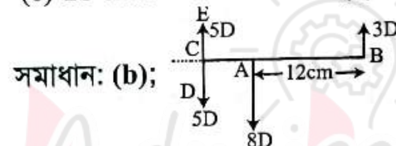
28. ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুতে 2, 2, P তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে, P এর মান-
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

সমাধান: (a); P, Q, R বলত্রয় একটি ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে যদি লব্ধি ভরকেন্দ্রগামী হয় তাহলে

$P = Q = R \therefore$ এখানে $P = 2$ একক হবে।

29. 8 এবং 3 ডাইন দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল একটি রডের 12 c.m. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। একটি মাত্র বলের ক্রিয়ায় রডটিকে সাম্যাস্থায় রাখতে হলে, রডের নূন্যতম দৈর্ঘ্য-
(a) 19.5 c.m. (b) 19.2 c.m.
(c) 15 c.m. (d) 18 c.m.

সমাধান: (b);



যদি একটি বল (CE বরাবর) দিয়ে বলদ্বয়কে সাম্যাবস্থায় রাখতে হয়, তাহলে BC হলো দন্ডের নূন্যতম দৈর্ঘ্য

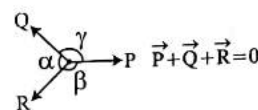
$\therefore \frac{5}{12} = \frac{8}{BC} \therefore BC = 19.2$ cm

30. নিচে তিনটি তথ্য উল্লেখ করা হলো:
(i) লামির সূত্র $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$
(ii) 2N, 4N এবং 7N বল তিনটি একটি কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করতে সক্ষম
(iii) যে কোনো ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); (i) লামির উপপাদ্য, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

Q, γ, α, β, P, R: $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$

(ii) $2 + 4 = 6 < 7 \therefore$ বলত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব নয়।
$\therefore$ তারা কখনই সাম্যাবস্থায় থাকবে না।

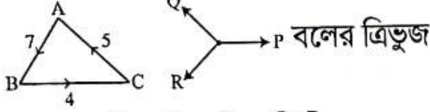
(iii)


$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0 \therefore$ সঠিক উত্তর (i) ও (iii)

31. সুস্থিত সমবিন্দু তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ΔABC এর BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4, 5, 7 cm. শেষোক্ত বল দুইটির সমষ্টি 48 গ্রাম ওজন হলে প্রথম বলটির মান-

(a) 15 গ্রাম ওজন (b) 16 গ্রাম ওজন
(c) 18 গ্রাম ওজন (d) কোনোটি নয়

সমাধান: **(b)**;


বলের ত্রিভুজ

সূত্রের বিপরীত সূত্র হতে $\frac{P}{4} = \frac{Q}{5} = \frac{R}{7} = \frac{Q+R}{5+7}$

$\Rightarrow \frac{P}{4} = \frac{48}{12} \therefore P = 16$ gm-wt

32. এক বিন্দুতে পরস্পর α কোণে কিয়ারত P ও Q বলদুইটির লব্ধি R যদি $P = Q = R$ হয়, তবে α এর মান-

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

সমাধান: **(d)**; $P = Q$ হওয়ায় $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow P = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ [$\because P = Q = R$]

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} = \cos 60° \therefore \alpha = 120°$

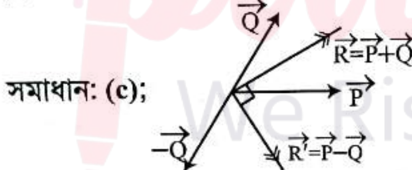
33. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ বল তিনটির লব্ধি $3.\overrightarrow{OG}$ হলে G বিন্দুটি ΔABC এর কি নির্দেশ করে?

(a) পরিকেন্দ্র (b) লম্বকেন্দ্র
(c) ভরকেন্দ্র (d) অন্তঃকেন্দ্র

সমাধান: **(c)**; ΔABC- এ G ভরকেন্দ্র হলে এবং O মূলবিন্দু হলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

34. একবিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল P ও Q এর লব্ধি R.Q কে বিপরীতমুখী করলে লব্ধি এক সমকোণে ঘুরে যায়। নিচের কোনটি সত্য?

(a) $R = P$ (b) $R = Q$ (c) $P = Q$ (d) $P = 2Q$

সমাধান: **(c)**;


এখানে, $\vec{R} \perp \vec{R'} \therefore \vec{R}.\vec{R'} = 0 \Rightarrow (\vec{P} + \vec{Q}).(\vec{P} - \vec{Q}) = 0$

$\Rightarrow \vec{P}.\vec{P} - \vec{P}.\vec{Q} + \vec{Q}.\vec{P} - \vec{Q}.\vec{Q} = 0$

$\Rightarrow P^2 - \vec{P}.\vec{Q} + \vec{P}.\vec{Q} - Q^2 = 0$ [$\because \vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{P}$]

$\Rightarrow P^2 = Q^2 \therefore P = Q$

35. একবিন্দুতে পরস্পর θ কোণে ক্রিয়াশীল P, P দুইটি সমান বলের লব্ধি R, যদি $R^2 = 3P^2$ হয় তবে θ এর মান-

(a) 60° (b) 80° (c) 90° (d) 120°

সমাধান: **(a)**; $R^2 = 3P^2 = \left(2P\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 3P^2 = 4P^2\cos^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = 30°, 150° \Rightarrow \theta = 60°, 300°$

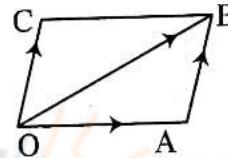
$\therefore \theta = 60°$[$\because \theta \neq 300°$]

36. F ও 4F দুইটি বল এক বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। যদি বল দুইটি যথাক্রমে 2F ও 4F + 8 দ্বারা পরিবর্তন করা হয়, তবে লব্ধির দিক একই থাকে। F এর মান কত?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

সমাধান: **(a)**; $\left(\frac{১ম\ বল}{২য়\ বল}\right)_{১ম\ ক্ষেত্র} = \left(\frac{১ম\ বল}{২য়\ বল}\right)_{২য়\ ক্ষেত্র}$

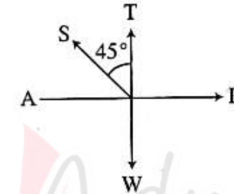
$\Rightarrow \frac{F}{4F} = \frac{2F}{4F+8} \Rightarrow 8F = 4F + 8 \Rightarrow 4F = 8 \therefore F = 2$ একক

37.


OABC সামান্তরিকটি বিবেচনা করলে ভেক্টরের যোগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী নিম্নের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ (b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$
(c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ (d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

সমাধান: **(d)**; ভেক্টর যোগের সামান্তরিকের সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

38.


চিত্রানুযায়ী A বিন্দুতে একটি কণা T, S, P ও W পরিমাণের বল দ্বারা স্থিতাবস্থায় থাকে, তবে T কত?

(a) $\sqrt{2}P$ (b) $\sqrt{2}W$
(c) $W - P$ (d) $W - \sqrt{2}P$

সমাধান: **(c)**;

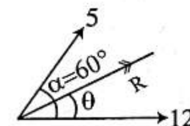
T বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,
$T + S\cos 45° - W = 0$
$\Rightarrow T + \frac{S}{\sqrt{2}} = W$
$\Rightarrow T + P = W$ [(i) হতে]
$\therefore T = W - P$

P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,
$P - S\sin 45° = 0$
$\therefore P = \frac{S}{\sqrt{2}}$ ……… (i)

39. যদি দুইটি বল 12N ও 5N একটি কণার উপর ক্রিয়া করে এবং বল দুইটি দ্বারা সৃষ্ট কোণ 60° হয়, তবে বল দুইটির লব্ধি প্রথম বলের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

(a) 16.63° (b) 20.63° (c) 88.34° (d) 11.54°

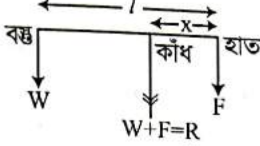
সমাধান: **(a)**; $\tan\theta = \frac{5\sin 60°}{12 + 5\cos 60°} \therefore \theta = 16.63°$



40. একজন লোক তাঁর কাঁধে আনুভূমিকভাবে স্থাপিত 6 ফুট দীর্ঘ একটি লাঠির প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের তিনগুণ হলে কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব কত হবে?

(a) 1 ফুট (b) 2 ফুট (c) 3 ফুট (d) 4 ফুট

সমাধান: (b);



কাঠ হতে হাতের দূরত্ব x হলে, $\frac{W}{x} = \frac{3W}{6} \therefore x = 2ft$

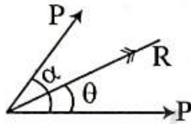
অসীম কুমার সাহা স্যার

41. দুইটি সমান বল P এর লব্ধি R এবং মধ্যবর্তী কোণ α হলে, যে কোনো বল ও লব্ধির মধ্যবর্তী কোণ কত হবে?

(a) $-\alpha$ (b) $-\frac{\alpha}{2}$ (c) $\frac{\alpha}{2}$ (d) α

সমাধান: (c); $\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P+P\,co} = \frac{P\sin\alpha}{P\,(1+\cos\ )}$

$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$



42. একজন লোক তার কাঁধের উপর একটি লাঠির এক প্রান্তে বেঁধে বোঝা বহন করে। তার কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব x ও কাঁধের উপর চাপ R কিভাবে পরিবর্তিত হয়?

(a) $R \propto x^2$ (b) $R \propto \frac{1}{x^2}$ (c) $R \propto \frac{1}{x}$ (d) $R \propto x$

সমাধান: (c); $\frac{W}{x} = \frac{W+F}{l} = \frac{R}{l}$

$\therefore R = \frac{l}{W} \times \frac{1}{x} \Rightarrow R = k.\frac{1}{x}$

$\therefore R \propto \frac{1}{x}$ [$k = \frac{l}{W}$ একটি ধ্রুবক]

43. দুটি অসমান বলের অন্তর্গত কোণ 135° যদি লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সমান হয়, তবে বল দুটির অনুপাত নিচের কোনটি?

(a) 1 : 2 (b) $2\sqrt{2} : 3$ (c) $\sqrt{2} : 1$ (d) $\sqrt{2} : 3$

সমাধান: (c); ধরি, P ও Q [P > Q] এর লব্ধি R এবং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ, α = 135°

প্রশ্নমতে, $R = Q \Rightarrow R^2 = Q^2$

$\Rightarrow P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 135° = Q^2$

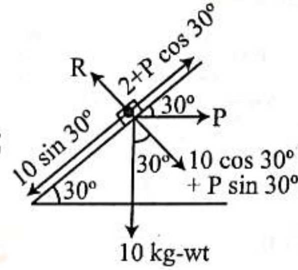
$\Rightarrow P^2 - 2PQ \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow P^2 = \sqrt{2}PQ$

$\Rightarrow P = \sqrt{2}Q \therefore \frac{P}{Q} = \sqrt{2} \therefore P:Q = \sqrt{2}:1$

44. একটি আনত সমতলে 10 kg ওজনের বস্তুকে সমতল বরাবর 2 kg ওজন বল এবং একটি অনুভূমিক বল প্রয়োগ করে বস্তুটিকে স্থির রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সাথে সমতলের নতি 30° হয়, তবে অনুভূমিক বলটির মান কত kg ওজন?

(a) 10 (b) $2\sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{3}$ (d) 8

সমাধান: (b);

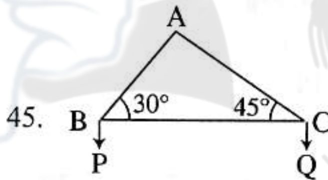


মনে করি, আনুভূমিক বলটি P kg-wt

$\therefore 10\sin 30° = 2 + P\cos 30°$

$\Rightarrow \frac{10}{2} = 2 + P.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$ kg-wt

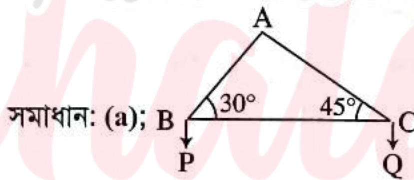
45.



P, Q সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হলে P : Q এর মান কত?

(a) $\sqrt{3} : 2$ (b) $2 : \sqrt{3}$ (c) $\sqrt{2} : 1$ (d) $1 : \sqrt{2}$

সমাধান: (a);



লব্ধি পরিকেন্দ্রগামী হলে, $\frac{P}{Q} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \frac{\sin 60°}{\sin 90°}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \therefore P:Q = \sqrt{3}:2$

46. P এবং Q দুটি বল। বল দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 3N এবং একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি হয় 5N-

(i) P বলের মান 4N (ii) Q বলের মান 1N

(iii) Q : P = 4 : 1

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); P + Q = 5; P − Q = 3 সমাধান করে পাই, P = 4N এবং Q = 1N $\therefore \frac{Q}{P} = \frac{1}{4} \therefore Q:P = 1:4$

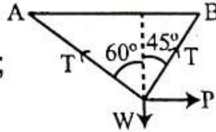
∴ (i) ও (ii) সত্য

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
অনভূমিক বরাবর দুটি বিন্দুতে একটি সুতা বাঁধা। এতে W ওজনের একটি আংটি অবাধে গড়িয়ে পড়তে পারে। W ওজনের আংটির উপর একটি অনুভূমিক বল P ক্রিয়ারত। সাম্যাবস্থায় সুতার অংশদ্বয় উল্লম্বের সাথে 45° ও 60° কোণ উৎপন্ন করে।

47. সুতার টান কত একক?

(a) $\frac{\sqrt{2}W}{3}$ (b) $\frac{2W}{\sqrt{2}+1}$ (c) $\frac{W}{\sqrt{2}+3}$ (d) $\frac{W}{2(1+\sqrt{2})}$

সমাধান: (b);



উলম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই, $T\cos 45° + T\cos 60° - W = 0$

$\therefore T\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) = W \Rightarrow T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right) = W \therefore T = \frac{2W}{\sqrt{2}+1}$

48. P এর মান কত একক?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}W$ (b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}W$ (c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}W$ (d) $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{2}}W$

সমাধান: (c); P বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$P + T\sin 45° - T\sin 60° = 0$

$\Rightarrow P = T\sin 60° - T\cos 45°$

$= T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2W}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \therefore P = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}W$

49. 16N ও 11N বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় 5x দূরত্বে অবস্থিত। যদি পরবর্তীতে বলদ্বয় 18N ও 13N হয়, তাহলে লব্ধির সরণ কত x?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: (b); P ও Q মানের বিসদৃশ সমান্তরাল দুইটি বল l দূরত্বে কাজ করলে যদি বলদ্বয়কে R পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয়, তাহলে লব্ধির সরণ, $d = \frac{R}{P-Q}l$ এখানে বলদ্বয়ের বৃদ্ধি

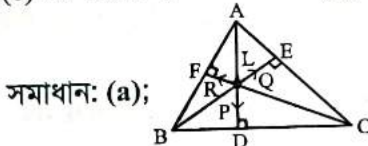
$= 18 - 16 = 13 - 11 = 2N$

$\therefore$ লব্ধির সরণ, $d = \frac{2}{16-11}\times 5x = 2x$।

50. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুগুলো হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে P : Q : R এর মান কত?

(a) a : b : c (b) 2a : b : c
(c) 2a : 3b : c (d) a : b : 5c

সমাধান: (a);



প্রশ্নের শর্তমতে লম্ববিন্দু L হতে বাহুগুলোর লম্ব বরাবর P, Q ও R মানের বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে,

$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C} \Rightarrow \frac{P}{\frac{a}{2R'}} = \frac{Q}{\frac{b}{2R'}} = \frac{R}{\frac{c}{2R'}}$

$\left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R' = \Delta ABC \text{ এর পরিব্যাসার্ধ}\right]$

$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \therefore P:Q:R = a:b:c$

মোঃ রফিকুল ইসলাম স্যার

51. 3P এবং 2P বলদ্বয়ের লব্ধি R। প্রথম বল দ্বিগুণ করলে লব্ধির পরিমাণও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ-

(a) 130° (b) 120° (c) 110° (d) 100°

সমাধান: (b);

Case-01: $R^2 = (3P)^2 + (2P)^2 + 2.3P.2P\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = 13P^2 + 12P^2\cos\alpha \ldots\ldots\ldots (i)$

Case-02: $(2R)^2 = (6P)^2 + (2P)^2 + 2.6P.2P\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = 40P^2 + 24P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = 10P^2 + 6P^2\cos\alpha \Rightarrow 13P^2 + 12P^2\cos\alpha$

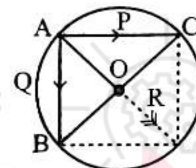
$= 10P^2 + 6P^2\cos\alpha$ [(i) হতে]

$\Rightarrow 6P^2\cos\alpha = -3P^2 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

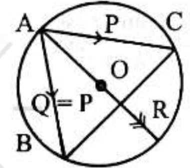
52. কোনো ত্রিভুজের বাহু দ্বারা দুটি বলের মান ও দিক সূচিত হল। তাদের লব্ধি ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রগামী হলে ত্রিভুজটি-

(a) সমকোণী বা সমবাহু (b) বিষম বাহু
(c) সমকোণী বা সমদ্বিবাহু (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (c);



সমকোণী ত্রিভুজ



সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ

$\therefore$ [P=Q]

এ. টি. এস. এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

53. দুইটি সমান বলের ক্রিয়ারেখা পরস্পর লম্ব। এদের লব্ধি বলদ্বয়ের সমষ্টির-

(a) অর্ধেক (b) দ্বিগুণ (c) $\sqrt{2}$ গুণ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গুণ

সমাধান: (c); $R = \sqrt{P^2+P^2} = \sqrt{2P^2} \therefore R = \sqrt{2}P$

54. সমবিন্দু বলের ক্ষেত্রে-

(i) বলের লম্বাংশ উপপাদ্য একবিন্দুগামী দুইটি বলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(ii) লামির উপপাদ্য তিনটি বলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(iii) বলের সাইন সূত্রের ক্ষেত্রে বল তিনটি অবশ্যই সাম্যাবস্থায় থাকবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); (i) ও (ii) সত্য

(iii) বলের sine সূত্রের ক্ষেত্রে 2টি বল থাকে এবং তাদের একটি লব্ধি থাকে। এরা সাম্যাবস্থায় থাকে না।

55. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল পরস্পরের সাথে স্থান পবিবর্তন করলেও যদি লব্ধির অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে তবে কোনটি হবে-

(a) $P > Q$ (b) $P < Q$

(c) $P = Q$ (d) $P \propto \frac{1}{Q}$

সমাধান: (c); P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল এবং $P = Q$ হলে এদের লব্ধি, $R = P - P = 0$ তাই বলদ্বয়ের অবস্থান বিনিময় করলেও লব্ধির মান 0 হয়। অর্থাৎ লব্ধির অবস্থান পরিবর্তন হয় না (কারণ লব্ধি $= 0$)।

56. দুইটি সমান মানের বল P এর সর্বনিম্ন লব্ধির মান কত?

(a) 2P (b) 0 (c) P (d) $\frac{P}{2}$

সমাধান: (b); $R_{min} = P - P = 0$

57. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র I বিন্দুর যথাক্রমে IA, IB, IC রেখা বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে তাহলে P: Q: R এর মান কত হবে?

(a) $\cos 2a : \cos 2B : \cos 2C$

(b) $\cos A : \cos B : \cos C$

(c) $\cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

(d) $\sin A : \sin B : \sin C$

সমাধান: (c); P, Q, R মানের তিনটি বল ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্র I হতে IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে $\frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

$\therefore P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$।

58. P ও Q (P > Q) দুটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল, দুটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। যদি উভয় বলকে একই পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক?

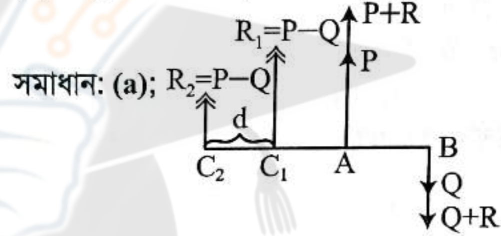
(a) লব্ধি অপরিবর্তিত থাকবে ও ক্রিয়াবিন্দুর স্থান পরিবর্তিত হবে।

(b) লব্ধি ও ক্রিয়াবিন্দু উভয়েই অপরিবর্তিত থাকবে।

(c) লব্ধি ও ক্রিয়াবিন্দু উভয়ই পরিবর্তিত হবে।

(d) লব্ধি পরিবর্তিত হবে ও ক্রিয়াবিন্দু অপরিবর্তিত থাকবে।

সমাধান: (a);



লব্ধি অপরিবর্তিত থাকবে ও ক্রিয়া বিন্দুর স্থান পরিবর্তিত হবে।

$\therefore$ ১ম ক্ষেত্রে লব্ধির মান, $R_1 = P - Q$

উভয় বলকে R পরিমাণ বাড়ালে লব্ধি,

$R_2 = (P + R) - (Q + R) = P - Q = R_1$

লব্ধির সরণ, $d = \frac{R}{P-Q} AB$

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. লামির উপপাদ্য কোনটি? **[Ans: b]**

(a) $p \sin\alpha = Q \sin\beta - R \sin\gamma$

(b) $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

(c) $\frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\cos\beta} = \frac{R}{\cos\gamma}$

(d) $P \tan\alpha = Q \tan\beta = R \tan\gamma$

02. P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে x অক্ষের সাথে α ও β কোণ উৎপন্ন করে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি- **[Ans: a]**

(a) $R = \sqrt{(P\cos\alpha + Q\cos\beta)^2 + (P\sin\alpha + Q\sin\beta)^2}$

(b) $R = \sqrt{(P\cos\alpha + P\sin\alpha)^2 + (Q\cos\alpha + Q\sin\beta)^2}$

(c) $R = \sqrt{(P\cos\alpha + Q\sin\alpha)^2 + (P\sin\alpha + Q\cos\beta)^2}$

(d) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\alpha + \beta)}$

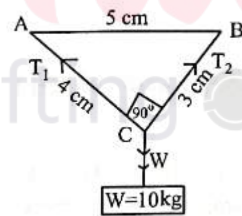
03. কোন বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্য রাখে। সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান-

(a) 3N (b) $3\sqrt{3}$N (c) $\sqrt{3}$N (d) 7N

সমাধান: (b); $P^2 + P^2 + 2P^2\cos 60° = 9^2$

$\therefore P = 3\sqrt{3}$

05.



C বিন্দুতে T_1, T_2 এবং $W = 10$ কেজি ওজনের ক্রিয়ার ফলে ভারসাম্য সৃষ্টি হয়। রশির টান $T_1 =$ কত?

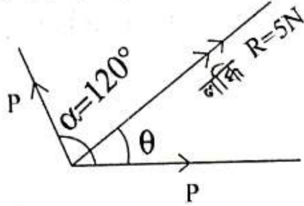
(a) 4 কেজি ওজন (b) 6 কেজি ওজন

(c) 8 কেজি ওজন (d) 10 কেজি ওজন

সমাধান: (b); বলের লম্ব ত্রিভুজ হতে পাই, $\frac{T_1}{3} = \frac{T_2}{4} = \frac{10}{5}$

$\Rightarrow T_1 = 6$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



দুটি সমান বলের লব্ধি অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

06. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর: **[Ans: a]**

(i) দুইটি সমান বলের লব্ধি এদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে

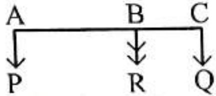
(ii) P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি P+Q

(iii) P, P সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি P হলে, বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 60°

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে P ও Q সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R, এখানে $P = 12N, Q = 9$ N এবং AB = 9 সে.মি.

07. 12N ও 8N দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল কোন কঠিন বস্তুর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। বল দুটির অবস্থান বিনিময় করলে এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কত দূরে সরে যাবে?

(a) $\frac{1}{2}$AB (b) $\frac{1}{3}$AB (c) $\frac{1}{5}$AB (d) $\frac{1}{7}$AB

সমাধান: **(c)**; $d = \frac{12-8}{12+8} \times AB = \frac{1}{5}.AB$

08. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত F ও 2F মানের বলদ্বয়ের লব্ধি F বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হলে— **[Ans: a]**

(i) বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120°

(ii) লব্ধির মান $\sqrt{3}$F একক

(iii) F বলের দিক বরাবর 2F বলের ধনাত্মক লম্বাংশ F

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

P ও Q(P > Q) দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 8N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 2N।

09. P এর মান কোনটি?

(a) 2N (b) 6N (c) 5N (d) 8N

সমাধান: **(c)**; $P + Q = 8 ; P - Q = 2$

$\therefore P = 5N \;\therefore Q = 3N$

10. বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে, লব্ধির মান কোনটি?

(a) 7N (b) 3N (c) $\sqrt{13}$N (d) 5N

সমাধান: **(a)**; $R^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \cos60°$

$\therefore R = 7N$

11. 10N ও 4N মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল AB = 14cm সুষম দণ্ডের যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে লব্ধির অবস্থান কোনটি?

(a) A বিন্দু থেকে 4cm দূরে (b) A বিন্দু থেকে 6cm দূরে
(c) B বিন্দু থেকে 4cm দূরে (d) B বিন্দু থেকে 6cm দূরে

সমাধান: **(a)**; $x = \frac{4}{10+4} \times 14 = 4cm$

12. 7N, 8N ও 10N মানের তিনটি বল পরস্পরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। 7N মানের বলটির দিকে অনুভূমিক দিক ধরে লব্ধির উলম্ব উপাংশ কোনটি?

(a) −2 (b) $-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$

সমাধান: **(b)**;

$F\sin\theta = 7\sin0° + 8\sin120° + 10\sin240° = -\sqrt{3}$

13. 3P ও 2P মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R; যদি প্রথম বলের পরিমাণ দ্বিগুণ করা হয় তবে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 150°

সমাধান: **(c)**;



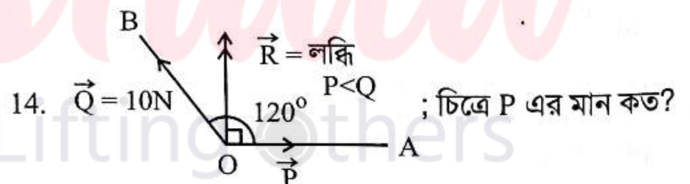
দেওয়া আছে, $R^2 = 13P^2 + 2.3.2P^2.\cos\alpha$

$\therefore \left(\frac{R}{P}\right)^2 = 12.\cos\alpha + 13$

$4R^2 = 40P^2 + 2.6.2.P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 4.\left(\frac{R}{P}\right)^2 = 24\cos\alpha + 40$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$

14. 

; চিত্রে P এর মান কত?

(a) $3\sqrt{3}$N (b) $5\sqrt{3}$N (c) $5\sqrt{2}$N (d) 5N

সমাধান: **(d)**; $\tan90° = \frac{10\sin120°}{P+10\cos12\,°} \therefore P = 5N$

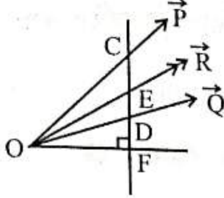
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের প্রত্যেকটির মান P এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ 120°।

15. O বিন্দুতে 6P, 9P মানের দুইটি বলের লব্ধি 8P. যদি কোন ছেদক বলত্রয়ের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে C, D, E বিন্দুতে ছেদ করে তবে —

(a) $\frac{6}{OD} + \frac{9}{OC} = \frac{8}{OE}$ (b) $\frac{6}{OE} + \frac{9}{OD} = \frac{8}{OC}$
(c) $\frac{6}{OC} + \frac{9}{OD} = \frac{8}{OE}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (c);



$P\cos\angle FOC + Q\cos\angle FOD = R\cos\angle FOE$

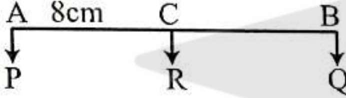
$\Rightarrow P.\frac{OF}{OC} + Q.\frac{OF}{OD} = R.\frac{OF}{OE} \Rightarrow \frac{P}{OC} + \frac{Q}{OD} = \frac{R}{OE}$

$\Rightarrow \frac{6}{OC} + \frac{9}{OD} = \frac{8}{OE}$

16. কোন বিন্দুতে দুইটি বল $120°$ কোণে ক্রিয়ারত। বৃহত্তর বলটির মান 10N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে ক্ষুদ্রতর বলের মান কত? **[Ans: c]**

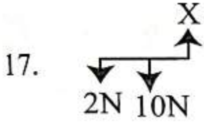
(a) 2N (b) 4N (c) 5N (d) 6N

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে, P ও Q সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R, এখানে $P = 7N$ ও $Q = 8N$

17.



চিত্রের দুটি অসদৃশ বলের লব্ধি 2N হলে x এর মান কত নিউটন?

(a) 12 (b) 8 (c) 6 (d) 4

সমাধান: (b); $10 - x = 2 \Rightarrow x = 8$

18. ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুতে 2, 2, P তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। এদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী হলে P এর মান কোনটি? **[Ans: a]**

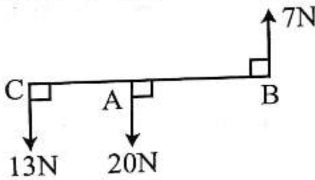
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

19. $P = 6$ kg, $Q = 4$ kg এবং $AB = 5$ মিটার। বলদ্বয়ের অবস্থান বিনিময় করা হলে এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কত দূর সরে যাবে? [সদৃশ বল]

(a) 2 মিটার (b) 0 মিটার (c) 1 মিটার (d) 3 মিটার

সমাধান: (c); $x = \frac{P-Q}{P+Q} \times AB = \frac{6-4}{6+4} \times 5 = 1m$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



20. BC:AC কত?

(a) 20:13 (b) 20:7 (c) 13:7 (d) 27:13

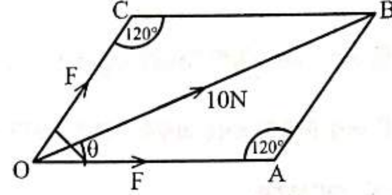
সমাধান: (b); $\frac{20}{BC} = \frac{7}{AC} \therefore \frac{BC}{AC} = \frac{20}{7}$

21. $AC = 3$ মিটার হলে, AB কত মিটার?

(a) $\frac{33}{7}$ (b) $\frac{39}{7}$ (c) $\frac{40}{7}$ (d) $\frac{81}{7}$

সমাধান: (b); $\frac{AB}{13} = \frac{AC}{7} \therefore AB = \frac{3\times13}{7} = \frac{39}{7}$

22. চিত্রে OABC একটি রম্বস।



F এর মান কত?

(a) $\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$N (b) $\frac{10\sqrt{30}}{\sqrt{10}}$N (c) $\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{30}}$N (d) $\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$N

সমাধান: (c); $10^2 = 2F^2 + 2F^2\cos60° \quad \therefore F = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{30}}$

23. একটি দণ্ডের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 45N এবং 15N দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। যদি এদের লব্ধি দন্ডের C বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $AC = 5m$ হয় তবে, $AB =$ কত?

(a) 6m (b) 10m (c) 12m (d) None

সমাধান: (b); [30 ↑ at C, 45 ↑ at A, 15 ↓ at B; C 5 A; 15] ; $AC = 5$

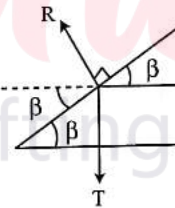
$AC = \frac{15}{45-1} \times AB \Rightarrow 5 = \frac{15}{30} \times AB \Rightarrow AB = 10m$

24. এক বিন্দুতে পরস্পর θ কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি p, p সমান বলের লব্ধি R যদি $R^2 = 3p^2$ হয় তবে θ এর মান কত?

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 30°

সমাধান: (a); $3p^2 = p^2 + p^2 + 2p^2\cos\theta \quad \therefore \theta = 60°$

25.



→ s; চিত্রানুযায়ী- **[Ans: d]**

(i) $\frac{R}{\sin 90°} = \frac{S}{\sin\beta} = \frac{T}{\cos\beta}$ (ii) $\tan^2\beta = \frac{S^2}{T^2}$

(iii) $\cot^2\beta = \frac{T^2}{S^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

26. একটি বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত বল P ও Q এর লব্ধি R। $P = Q = R$ হলে α এর মান কত?

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 180°

সমাধান: (c); দুইটি সমান বলের লব্ধি ওদের সমান হলে $\alpha = 120°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

একই বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 14 একক এবং বলদ্বয় যখন লম্বভাবে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধি 10 একক।

27. P ও Q দুটি বল। বল দুইটি বিপরীতমুখী হলে লব্ধির মান 3N এবং তা P এর দিকে এবং একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান হয় 5N. সেক্ষেত্রে–

(i) P বলের মান 4N (ii) Q বলের মান 1N

(iii) $P = \frac{1}{4}Q$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(a)**; $P - Q = 3$; $P + Q = 5$ $\therefore P = 4; Q = 1$

28. সমমানের দুইটি বলের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের তিন গুণ। এদের মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রী?

(a) 0° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: **(c)**; $4p^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} = 3P^2 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

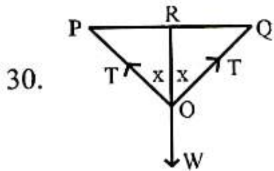
$\Rightarrow \alpha = 60°$

29. $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ মানের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

(a) $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ (b) $\vec{R} - \vec{Q} = \vec{R}$

(c) $\vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$ (d) $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

সমাধান: **(d)**; বলের ত্রিভুজ সূত্র।

30. 

চিত্রানুযায়ী লামীর সূত্র কোনটি?

(a) $\frac{T}{\sin x} = \frac{T}{\cos x} = \frac{T}{\sin 2x}$ (b) $\frac{T}{\sin x} = \frac{T}{\sin 2x} = \frac{W}{\sin 2x}$

(c) $\frac{T}{\sin x} = \frac{T}{\sin x} = \frac{W}{\sin 2x}$ (d) $\frac{T}{\sin 2x} = \frac{T}{\sin 2x} = \frac{W}{\sin x}$

সমাধান: **(c)**; $\frac{T}{\sin x} = \frac{T}{\sin x} = \frac{W}{\sin 2x}$ (লামির উপপাদ্য)।

31. $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$ এর জন্য সঠিক হল- **[Ans: a]**

(i) বল তিনটির লব্ধি শূন্য

(ii) বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে

(iii) P ও Q দুইটি বল এবং লব্ধি R

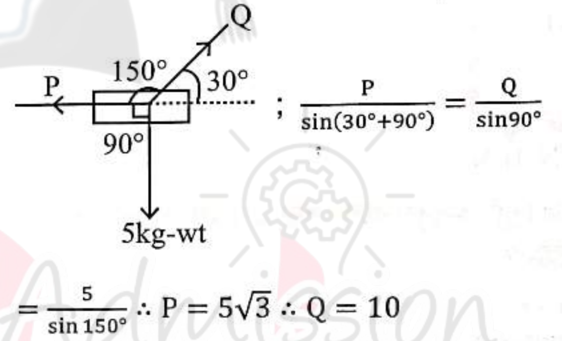
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

32. আনুভূমিক দিকে ও আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বল 5 একক ওজনের বস্তুকে স্থিরভাবে ধরে রাখে, বল দুইটির মান কত?

(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}, 10$ (b) $5\sqrt{3}, 10$ (c) $5, 10$ (d) $5, 10\sqrt{3}$

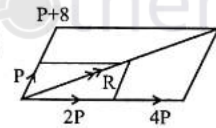
সমাধান: **(b)**;



; $\frac{P}{\sin(30°+90°)} = \frac{Q}{\sin 90°} = \frac{5}{\sin 150°}$ $\therefore P = 5\sqrt{3}$ $\therefore Q = 10$

33. 2P এবং P মানের দুইটি বল একটি বস্তুর উপর কার্যরত। যদি প্রথম বলকে দ্বিগুণ ও দ্বিতীয় বলকে 8 একক বৃদ্ধি করা হয়, তবে তাদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত?

(a) 16 (b) 8 (c) 4 (d) 2

সমাধান: **(b)**; 

; $\frac{P}{2P} = \frac{P+8}{4P}$ $\therefore P = 8$

34. দুটি সমবিন্দু বলের বৃহত্তম লব্ধি 17N। যখন বলদ্বয় পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল হয়, তখন তাদের লব্ধি 13N হয়। তাদের ক্ষুদ্রতম লব্ধি কত?

(a) 6N (b) 7N (c) 5N (d) 8N

সমাধান: **(b)**; $P + Q = 17 \Rightarrow P^2 + Q^2 = 13^2$

$\Rightarrow (P+Q)^2 + (P-Q)^2 = 2(P^2+Q^2)$

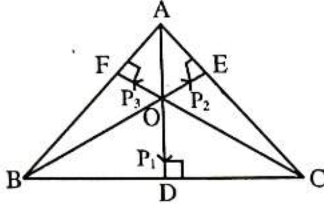
$\Rightarrow P - Q = 7$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

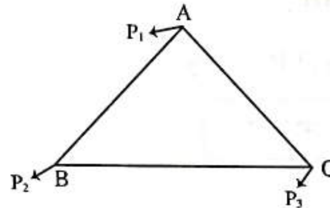
◆ **CQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. **[DB'22; JB'21]**

উদ্দীপক-১:



উদ্দীপক-২:



(ক) $120°$ কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধি $9N$ হলে সমান বল দুটি নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র O। P_1, P_2, P_3 তিনটি বল যথাক্রমে OD, OE, OF বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, $\frac{P_1}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{P_2}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{P_3}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$ 4

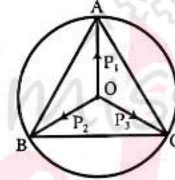
(গ) উদ্দীপক-২ এ প্রদত্ত বলগুলির লব্ধি উক্ত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P_1 : P_2 : P_3 = a : b : c$ 4

সমাধান

ক. মনেকরি, সমান বল দুটি F. এখানে, $R = 9N$ এবং $\alpha = 120°$

প্রশ্নমতে, $R = 2F\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 9 = 2F\cos\frac{120°}{2} \Rightarrow 9 = 2F\cos 60° \therefore F = 9N$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, P_1, P_2, P_3 বলত্রয় যথাক্রমে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যবস্থায় আছে, যেখানে, O ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।



লামির সূত্র হতে পাই, $\frac{P_1}{\sin(P_2 \wedge P_3)} = \frac{P_2}{\sin(P_1 \wedge P_3)} = \frac{P_3}{\sin(P_1 \wedge P_2)}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\sin\angle BOC} = \frac{P_2}{\sin\angle COA} = \frac{P_3}{\sin\angle AOB}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\sin 2A} = \frac{P_2}{\sin 2B} = \frac{P_3}{\sin 2C}$ [∵ কেন্দ্রস্থ কোণ অন্তঃস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$\Rightarrow \frac{P_1}{2\sin A\cos A} = \frac{P_2}{2\sin B\cos B} = \frac{P_3}{2\sin C\cos C} \Rightarrow \frac{P_1}{\frac{a}{k}\times\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{P_2}{\frac{b}{k}\times\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)} = \frac{P_3}{\frac{c}{k}\times\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$

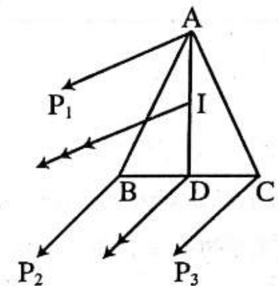
$\Rightarrow \frac{P_1}{\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{abc}} = \frac{P_2}{\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{abc}} = \frac{P_3}{\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{abc}} \therefore \frac{P_1}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{P_2}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{P_3}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$ **(Proved)**

[Note: প্রশ্নটিতে লম্বকেন্দ্র এর স্থলে পরিকেন্দ্র O হলে প্রশ্নোক্ত ডাটাটি প্রমাণ করা যাবে।]

গ. B ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P_2 ও P_3 সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু D হলে,

$P_2.BD = P_3.CD \therefore \frac{BD}{CD} = \frac{P_3}{P_2}$ ……… (i)

আবার, A ও D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P_1 ও $(P_2 + P_3)$ সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু I, যেখানে I ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। ∴ অন্তঃকেন্দ্র I, AD এর উপর অবস্থিত।



∴ AD, ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক। $\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

(i) ও (ii) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{P_3}{P_2} \Rightarrow \frac{P_2}{AC} = \frac{P_3}{AB} \therefore \frac{P_2}{b} = \frac{P_3}{c}$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} \therefore \frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} = \frac{P_3}{c}$

$\Rightarrow P_1 : P_2 : P_3 = a : b : c$ **(Showed)**

02. দৃশ্যকল্প-১: F_1 ও F_2 বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α; বলদ্বয় পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি θ কোণে সরে যায়। [Ctg.B'22]
দৃশ্যকল্প-২: P_1 ও P_2 দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি AB বরাবর S দূরত্বে সরে যায়।

(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত 4N ও 8N মানের দুইটি বলের লব্ধি 4N বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হলে, তাদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{F_1-F_2}{F_1+F_2}\tan\frac{\alpha}{2}$. 4

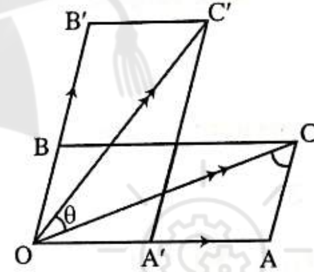
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $S = \frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}AB$ যেখানে $P_1 > P_2$. 4

সমাধান

ক. মনে করি, অন্তর্গত কোণ α
প্রশ্নমতে, $4 + 8\cos\alpha = 0 \Rightarrow 8\cos\alpha = -4 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{8} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, F_1 ও F_2 বল দুটি যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা সূচিত হলো ও এদের লব্ধি OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা সূচিত হবে। ধরি, বল দুটির অবস্থান বিনিময় করলে OB′ ও OA′ যথাক্রমে F_1 ও F_2 নির্দেশ করে এবং এদের লব্ধি OA′C′B′ সামান্তরিকের কর্ণ OC′ দ্বারা সূচিত হবে। শর্তানুসারে, $\angle COC' = \theta$ ও $\angle AOB = \alpha$

$\Delta AOC \cong \Delta C'OB', \therefore \angle AOC = \angle B'OC' = x$ (ধরি)



$\therefore 2x + \theta = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha-\theta}{2} \therefore \angle AOC = \frac{1}{2}(\alpha-\theta)$

$\therefore \angle BOC = x + \theta = \frac{1}{2}(\alpha-\theta) + \theta = \frac{1}{2}(\alpha+\theta) = \angle ACO$

এখন, ΔOAC এ, $\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC} \Rightarrow \frac{F_1}{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}} = \frac{F_2}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}$

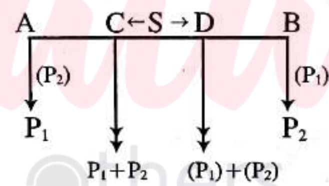
$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)} \Rightarrow \frac{F_1-F_2}{F_1+F_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)-\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)+\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}$

$\Rightarrow \frac{F_1-F_2}{F_1+F_2} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\theta} \Rightarrow \frac{F_1-F_2}{F_1+F_2} = \cot\frac{1}{2}\alpha.\tan\frac{1}{2}\theta \therefore \tan\frac{1}{2}\theta = \frac{F_1-F_2}{F_1+F_2}\tan\frac{1}{2}\alpha$ **(Proved)**

গ. মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি $(P_1 + P_2)$ যা C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore P_1.AC = P_2.BC \Rightarrow \frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{AC} = \frac{P_1+P_2}{AB} \therefore AC = \frac{P_2}{P_1+P_2}.AB$ ……… (i)

আবার ধরি, বল দুটি স্থান বিনিময় করলে লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়ারত হবে।



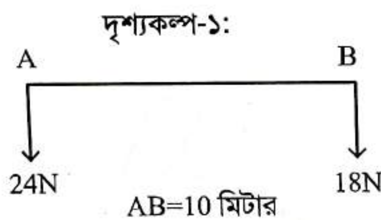
$\therefore P_2.AD = P_1.BD \Rightarrow \frac{P_2}{BD} = \frac{P_1}{AD} = \frac{P_1+P_2}{AB} \therefore AD = \frac{P_1}{P_1+P_2}.AB$ ……… (ii)

(ii) − (i), $AD - AC = \frac{P_1}{P_1+P_2}.AB - \frac{P_2}{P_1+P_2}.AB \Rightarrow CD = \frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}.AB$

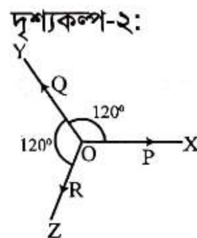
$\therefore S = \frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}AB$ **(Showed)**

03. [Ctg.B'22; MB'22]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধির মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নির্দেশিত সদৃশ, সমান্তরাল বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{10}{7}$ মিটার। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $P = 6\,N, Q = 9\,N$ ও $R = 5\,N$ হলে বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। 4

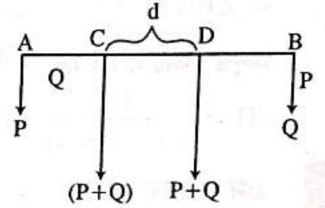
সমাধান

ক. $R = \sqrt{P^2 + P^2 + 2 \cdot P \cdot P \cdot \cos\alpha} \Rightarrow R = \sqrt{2P^2 + 2P^2\cos\alpha} \Rightarrow R = \sqrt{2P^2(1+\cos\alpha)}$

$\Rightarrow R = \sqrt{2P^2 \times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \sqrt{4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \therefore R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, $P = 24\text{ N}, Q = 18\text{ N}, AB = 10\text{ m}$

P ও Q বলের লব্ধি $(P+Q)$ বলটি AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।



$P \cdot AC = Q \cdot BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}$ অর্থাৎ, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB} \therefore AC = \frac{Q}{P+Q} \cdot AB$ ……… (i)

আবার, বল দুটি স্থান বিনিময় করলে লব্ধি $(P+Q)$ বলটি AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

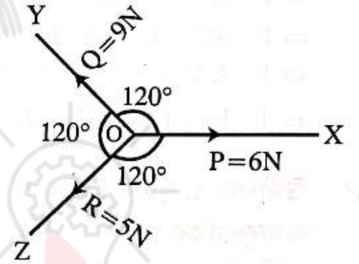
$Q \cdot AD = P \cdot BD \Rightarrow \frac{Q}{BD} = \frac{P}{AD} \Rightarrow \frac{P}{AD} = \frac{Q}{BD} = \frac{P+Q}{AD+BD} \Rightarrow \frac{AD}{P} = \frac{AB}{P+Q}$

$\therefore AD = \frac{P}{P+Q} \cdot AB$ ……… (ii)

এখন, (ii) − (i), $AD - AC = \frac{P-Q}{P+Q} \cdot AB \therefore d = \frac{P-Q}{P+Q} \cdot AB = \frac{24-18}{24+18} \times 10 \therefore d = \frac{10}{7}$ মিটার। **(Ans.)**

গ. মনে করি, বলগুলোর লব্ধি F এবং লব্ধি OX এর সাথে α কোণে ক্রিয়া করে।

OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$F\cos\alpha = 6\cos 0° + 9\cos 120° + 5\cos 240°$

$= 6 + 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = -1$ ……… (i)

OX এর লম্ব বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\sin\alpha = 6\sin 0° + 9\sin 120° + 5\sin 240°$

$= \left(9 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ……… (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2$, $F^2\cos^2\alpha + F^2\sin^2\alpha = (-1)^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow F^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 1 + 12$

$\therefore F = \sqrt{13}\text{N}$

আবার, (ii) ÷ (i), $\tan\alpha = 180° - \tan^{-1}(2\sqrt{3}) \therefore \alpha = 106.102°$ (প্রায়) **(Ans.)**

04. দৃশ্যকল্প-১: ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I তে P_1, P_2, P_3 মানের তিনটি বল যথাক্রমে IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।
দৃশ্যকল্প-২: P ও Q মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর উপর ক্রিয়া করছে। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে Q এর দিকে b দূরত্বে সরানো হলো। **[SB'22; BB'22]**

(ক) F মানের দুইটি সমান বল কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়া করে $3\sqrt{3}$N বলের সাহায্যে ভারসাম্য সৃষ্টি করে F এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\frac{P_1}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{P_2}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{P_3}{\cos\frac{C}{2}}$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{Pb}{P+Q}$ দূরে সরে যায়। 4

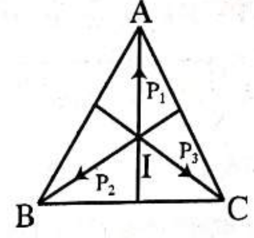
সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $R = 3\sqrt{3}\text{N}, \alpha = 60°$;

$R = 2F\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = 2F\cos\frac{60°}{2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = 2F\cos 30° \Rightarrow 3\sqrt{3} = 2F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore F = 3\text{N}$ **(Ans.)**

খ. ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I থেকে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P_1, P_2, P_3 মানের ৩টি বল ক্রিয়া করে ভারসাম্যের সৃষ্টি করে। লামির উপাপাদ্য অনুসারে,

$\frac{P_1}{\sin(P_2 \wedge P_3)} = \frac{P_2}{\sin(P_3 \wedge P_1)} = \frac{P_3}{\sin(P_1 \wedge P_2)} \Rightarrow \frac{P_1}{\sin\angle BIC} = \frac{P_2}{\sin\angle CIA} = \frac{P_3}{\sin\angle AIB} \ldots\ldots\ldots (i)$



ΔBIC এ, $\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180° \Rightarrow \angle BIC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$

$\Rightarrow \angle BIC + \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180° \Rightarrow \angle BIC + \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 180°$

$\Rightarrow \angle BIC + 90° - \frac{1}{2}\angle A = 180° \therefore \angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

অনুরূপভাবে, $\angle CIA = 90° + \frac{1}{2}\angle B$; $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$

(i) $\Rightarrow \frac{P_1}{\sin\left(90° + \frac{1}{2}\angle A\right)} = \frac{P_2}{\sin\left(90° + \frac{1}{2}\angle B\right)} = \frac{P_3}{\sin\left(90° + \frac{1}{2}\angle C\right)} \therefore \frac{P_1}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{P_2}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{P_3}{\cos\frac{C}{2}}$ **(Proved.)**

গ. প্রমাণ করব যে, $CC' = \frac{Pb}{P+Q}$

মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C হলে,

$P \cdot AC = Q \cdot BC \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরালে রেখে ক্রিয়াবিন্দুকে Q এর দিকে b দূরত্বে সরিয়ে A′ এ আনলে যদি লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C′ হয় তবে $P \cdot A'C' = Q \cdot BC' \Rightarrow P(A'C + CC') = Q \cdot BC'$

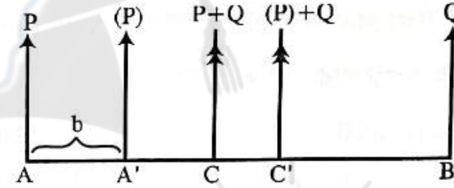
$\Rightarrow P(AC - AA') + P \cdot CC' = Q \cdot BC'$

$\Rightarrow P \cdot AC - P \cdot AA' + P \cdot CC' = Q(BC - CC')$

$\Rightarrow P \cdot AC - P \cdot AA' + P \cdot CC' = Q \cdot BC - Q \cdot CC'$

$\Rightarrow P \cdot AA' = P \cdot CC' + Q \cdot CC'$

$\Rightarrow P \cdot b = (P + Q) \cdot CC' \therefore CC' = \frac{Pb}{P+Q}$ **(Showed.)**



05. উদ্দীপক-১: দুইটি বল **ABC** ত্রিভুজের **AB** ও **AC** বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে **cosB** ও **cosC** এর সমানুপাতিক।

উদ্দীপক-২: F_1 ও F_2 মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি অনড় বস্তুর উপর দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। F_1 এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুতে **'d'** দূরত্বে সরানো হল। **[BB'22]**

(ক) **5N, 7N ও 8N মানের বলত্রয় একটি কণার উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। 8N ও 5N মানের বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।** 2

(খ) **উদ্দীপক-১ ব্যবহার করে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি A কোণকে $\frac{1}{2}(A + B - C)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এই দুই অংশে বিভক্ত করে।** 4

(গ) **উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{F_1 d}{F_1 + F_2}$ দূরত্বে সরে যায়।** 4

সমাধান

ক. প্রশ্নমতে, $7^2 = 5^2 + 8^2 + 2.5.8.\cos\alpha \Rightarrow 49 = 25 + 64 + 80\cos\alpha \Rightarrow -40 = 80\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

সুতরাং, 8N ও 5N মানের বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ 120°

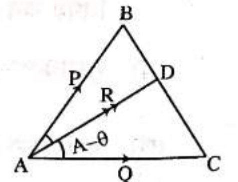
খ. মনে করি, A বিন্দুতে AB বরাবর $P = k\cos B$ মানের ও AC বরাবর $Q = k\cos C$ মানের 2টি বল ক্রিয়ারত আছে।

ধরি, বল 2টি লব্ধির মান, R যা AD রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল। $\therefore \angle BAD = \theta$ ও $\angle CAD = A - \theta$

এখন, $\tan\theta = \frac{Q\sin A}{P + Q\sin A} = \frac{k\cos C\sin A}{k\cos B + k\cos C\cos A}$

$= \frac{\cos C\sin A}{\cos\{\pi - (C + A)\} + \cos C\cos A} = \frac{\cos C\sin A}{-\cos(C + A) + \cos A\cos C}$

$= \frac{\cos C\sin A}{-\{\cos A\cos C - \sin A\sin C\} + \cos A\cos C} = \frac{\cos C\sin A}{\sin A\sin C - \cos A\cos C + \cos A\cos C} = \frac{\cos C\sin A}{\sin C\sin A} = \cot C$



$= \tan\theta = \cot C = \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \therefore \theta = \frac{\pi}{2} - C = \frac{1}{2}(\pi - 2C) = \frac{1}{2}(A + B + C - 2C) = \frac{1}{2}(A + B - C)$

আবার, $A - \theta = A - \frac{1}{2}(A + B - C) = \frac{1}{2}(2A - A - B + C) = \frac{1}{2}(C + A - B)$

সুতরাং, বলদ্বয়ের লব্ধি A কোণকে $\frac{1}{2}(A + B - C)$ ও $\frac{1}{2}(C + A - B)$ এই দুই অংশে বিভক্ত করে। **(Showed)**

গ. **04** নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

06. উদ্দীপক-১: কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল P এবং $Q(P > Q)$ দুটি বলের লব্ধি P বলের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। P বলকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি পূর্বের কোণের অর্ধেক হয়। [JB'22]

উদ্দীপক-২: M মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল।

(ক) 5N এবং 12N দুটি বল একটি বিন্দুতে $45°$ কোণে ক্রিয়ারত থাকলে, বল দুটির লব্ধি নির্ণয় কর। 2

(খ) P এবং Q বলের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, বলত্রয়ের লব্ধির পরিমাণ $M\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$. 4

সমাধান

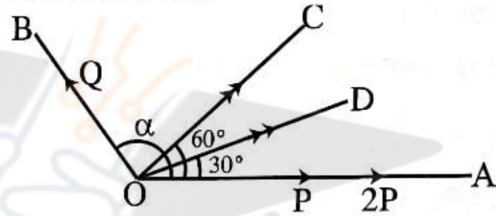
ক. মনে করি, $P = 5N, Q = 12N, \alpha = 45°, R = ?$

জানা আছে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 5^2 + 12^2 + 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 45° \therefore R = 15 \cdot 93N$ (প্রায়)

খ. মনে করি, P ও Q $(P > Q)$ বলদ্বয় O বিন্দুতে যথাক্রমে OA ও OB বরাবর ক্রিয়াশীল।

১ম ক্ষেত্রে, লব্ধি OC বরাবর ক্রিয়াশীল।

২য় ক্ষেত্রে, লব্ধি OD বরাবর ক্রিয়াশীল।



অর্থাৎ, $\tan 60° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\, co}$ ……… (i)

$\tan 30° = \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}$ ……… (ii)

(i) ÷ (ii), $\tan60° \div \tan30° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\, co} \times \frac{2P+Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha}$

$\Rightarrow \sqrt{3} \div \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\, co} \Rightarrow \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\sin\alpha} \Rightarrow 3P + 3Q\cos\alpha = 2P + Q\cos\alpha \Rightarrow P = -2Q\cos\alpha$ …… (iii)

(iii) ⇒ (i), $\tan 60° = \frac{Q\sin\alpha}{-2Q\cos\alpha+Q\cos} = \frac{Q\sin\alpha}{-Q\cos} \Rightarrow \sqrt{3} = -\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan\alpha = -\tan 60°$

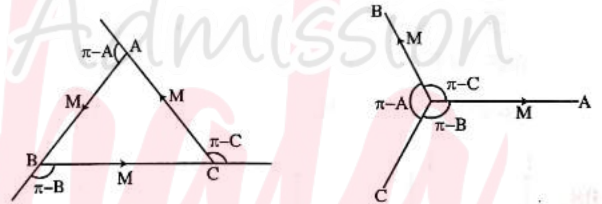
$\Rightarrow \tan\alpha = \tan(180° - 60°) \Rightarrow \tan\alpha = \tan 120° \therefore \alpha = 120°$

মনে করি, P ও Q বলের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ (**Ans.**)

গ. মনে করি, O বিন্দুতে ΔABC এর BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল বরাবর M মানের ৩টি বল ক্রিয়াশীল। পর্যায়ক্রমে বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ $\pi - C, \pi - A, \pi - B$। বল ৩টির লব্ধি F।

$= M - M\cos C + M\cos(\pi - B)$ $[\because A + B + C = \pi]$

$= M - M\cos C - M\cos B$ ……… (i)



OA এর উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\sin 0 = M\sin 0 + M\sin(\pi - C) + M\sin(\pi - C + \pi - A)$

$= (M \times 0) + M\sin C + M\sin\{2\pi - (C + A)\}$

OA বরাবর বলগুলির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$F\cos\theta = M\cos 0° + M\cos(\pi - C) + M\cos(\pi - C + \pi - A)$

$= M + M(-\cos C) + M\cos\{2\pi - (C + A)\} = M - M\cos C + M\cos(C + A)$

$= M\sin C + M\{-\sin(C + A)\} = M\sin C - M\sin(C + A)$

$= M\sin C - M\sin(\pi - B)$ $[A + B + C = \pi]$ $= M\sin C - M\sin B$ ……… (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$

$F^2\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta = (M - M\cos C - M\cos B)^2 + (M\sin C - M\sin B)^2$

$\Rightarrow F^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = M^2 + M^2\cos^2 C + M^2\cos^2 B - 2P^2\cos C - 2P^2\cos B + 2P^2\cos B\cos C +$
$P^2\sin^2 C + P^2\sin^2 B - 2P^2\sin B\sin C$

$\Rightarrow F^2 = M^2 + M^2(\cos^2 C + \sin^2 C) + M^2(\cos^2 B + \sin^2 B) - 2P^2\cos C - 2P^2\cos B + 2P^2(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$

$\Rightarrow F^2 = M^2 + M^2 + M^2 - 2M^2\cos B - 2M^2\cos C + 2M^2\cos(B + C)$ $[\because \cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B]$

$\Rightarrow F^2 = 3M^2 - 2M^2\cos B - 2M^2\cos C + 2M^2\cos(\pi - A)$

$\Rightarrow F^2 = 3M^2 - 2M^2\cos B - 2M^2\cos C - 2M^2\cos A$

$\Rightarrow F^2 = 3M^2 - 2M^2\cos A - 2M^2\cos A - 2M^2\cos B - 2M^2\cos C$

$\Rightarrow F^2 = M^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C) \Rightarrow F^2 = M^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$

$\therefore F = M\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$

সুতরাং, বলত্রয়ের লব্ধির পরিমাণ, $M\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$ (**Proved.**)

07. উদ্দীপক-১: P, Q, R বলত্রয় একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 60° এবং P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 150°। **[JB'22]**

উদ্দীপক-২: 20 সে.মি দীর্ঘ AB হাল্কা দন্ডটি 10 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W এবং 3W ওজন ঝুলানো হলো।

(ক) 15N এবং 20N ওজনের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত থাকলে, তাদের লব্ধি কত? 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$. 4

(গ) খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. মনে করি, P ও Q দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল। ∴ বলদ্বয়ের লব্ধি $= P - Q = (20 - 15)N = 5N$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P\hat{}Q = 60°$, $R\hat{}P = 150°$ ∴ $Q\hat{}R = 360° - (150° + 60°) = 150°$

যেহেতু, P, Q, R বল ৩টি সাম্যবস্থার সৃষ্টি করে, সেহেতু, $\frac{P}{\sin(Q\hat{}R)} = \frac{Q}{\sin(R\hat{}P)} = \frac{R}{\sin(P\hat{}Q)}$

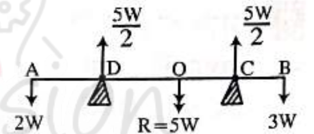
$\Rightarrow \frac{P}{\sin 150°} = \frac{Q}{\sin 150°} = \frac{R}{\sin 60°} \Rightarrow \frac{P}{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$ ∴ $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$ **(Proved.)**

গ. (প্রশ্নটিতে খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ বা অনুপাত কিছুই দেওয়া হয় নি। এখানে খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ সমান ধরে সমস্যাটির সমাধান করা হলো:)

মনেকরি, AB = 20 cm দৈর্ঘ্যের একটি হালকা দণ্ডের A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W ও 3W ওজন ঝুলানো আছে যাদের লব্ধি R = 5W, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

∴ $\frac{R}{AB} = \frac{2W}{OB} = \frac{3W}{OA} \Rightarrow \frac{5W}{20} = \frac{2W}{OB} = \frac{3W}{OA}$ ∴ OB = 8 cm এবং OA = 12 cm

দণ্ডটি C ও D বিন্দুতে দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে অবস্থিত এখানে, CD = 10 cm এবং প্রতিটি খুঁটিতে চাপের পরিমাণ $= \frac{2W+3W}{2} = \frac{5W}{2}$ দণ্ডটিকে ভারসাম্যে থাকতে হলে খুঁটিদ্বয়ের চাপের লব্ধি O বিন্দুগামী হতে হবে।

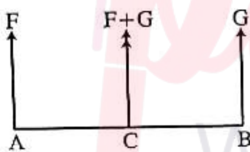


∴ $\frac{5W}{CD} = \frac{\frac{5W}{2}}{OD} = \frac{\frac{5W}{2}}{OC} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{5}{2OD} = \frac{5}{2OC}$ ∴ OD = 5 cm এবং OC = 5 cm

এখন, AD = OA − OD = 12 − 5 = 7 cm ; AC = OA + OC = 12 + 5 = 17 cm

সুতরাং, খুঁটিদ্বয় A প্রান্ত থেকে যথাক্রমে 7 cm ও 17 cm দূরে অবস্থান করছে।

08. **[CB'22]**



(ক) α কোণে ক্রিয়ারত 3 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং একই কোণে ক্রিয়ারত 6 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি 2R. α এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সমান্তরাল বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থান বিনিময় করলেও যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে তবে দেখাও যে, F = G. 4

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের অবস্থান পরিবর্তন করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু FG বরাবর x দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $x = \frac{F-G}{F+G}AB; F > G$. 4

সমাধান

ক. ১ম ক্ষেত্রে, $R^2 = 3^2 + 2^2 + 2.3.2.\cos\alpha \Rightarrow R^2 = 9 + 4 + 12\cos\alpha \Rightarrow R^2 = 13 + 12\cos\alpha$ ……… (i)

২য় ক্ষেত্রে, $(2R)^2 = 6^2 + 2^2 + 2.6.2\cos\alpha \Rightarrow 4R^2 = 36 + 4 + 24\cos\alpha$

$\Rightarrow 4(13 + 12\cos\alpha) = 36 + 4 + 24\cos\alpha \Rightarrow 52 + 48\cos\alpha = 40 + 24\cos\alpha$

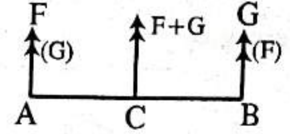
$\Rightarrow 48\cos\alpha - 24\cos\alpha = 40 - 52 \Rightarrow 24\cos\alpha = -12$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$ ∴ $\alpha = 120°$ সুতরাং, α এর মান 120°

খ. ১ম ক্ষেত্রে, $F.AC = G.BC \Rightarrow \frac{F}{BC} = \frac{G}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{G}{F}$ ……… (i)

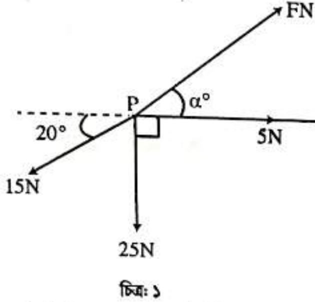
২য় ক্ষেত্রে, $G.AC = F.BC \Rightarrow \frac{G}{F} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{F}{G} = \frac{AC}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{F}{G} \Rightarrow \frac{G}{F} = \frac{F}{G}\left[\because \frac{AC}{BC} = \frac{G}{F}\right] \Rightarrow F^2 = G^2 \therefore F = G$ (**Proved.**)

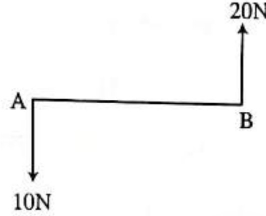


গ. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

09. **[Din.B'22]**



চিত্র: ১



চিত্র: ২

(ক) প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। 2

(খ) চিত্র-১ এর বলগুলো P বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকলে F এবং α এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) চিত্র-২ থেকে দেখাও যে, বল দুটিকে সমপরিমাণে বৃদ্ধি করলে নতুন লব্ধি আরও দূরে সরে যাবে। 4

সমাধান

ক. মনে করি, সমান বল দুটি P এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α ; ধরি, বল দুটির লব্ধি P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে ক্রিয়া করে।

অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha} \Rightarrow \tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P+P\cos}$ [$\because P = Q$]

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1+\cos} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

সুতরাং দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

খ. 5N বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$5\cos 0° + F\cos\alpha + 15\cos(180° + 20°) + 25\cos 270° = 0$ [∵ সাম্যবস্থায় ধরে লব্ধি, R = 0]

$\Rightarrow F\cos\alpha = 9.09$ ……… (i)

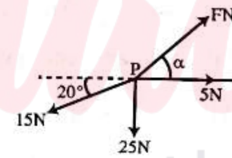
5N এর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$5\sin 0° + F\sin\alpha + 15\sin(180° + 20°) + 25\sin(270°) = 0$

$\Rightarrow F\sin\alpha = 30.13$ ……… (ii)

এখন, $(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow F^2 = (9.09)^2 + (30.13)^2 \therefore F = 31.47$ N (প্রায়)

আবার, $(ii) \div (i) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{30.13}{9.09}$ [১ম চতুর্ভাগে] $\therefore \alpha = 73.21°$ (প্রায়)



গ. মনে করি, P = 20N ও Q = 10N ; A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Q ও P অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C হলে,

$P.BC = Q.AC$ ……… (i)

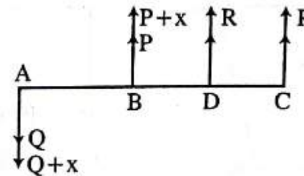
ধরি উভয় বলকে x পরিমাণ বৃদ্ধি করলে লব্ধির নতুন ক্রিয়া বিন্দু D হলে,

$(P + x).BD = (Q + x).AD$ ……… (ii)

$(i) \Rightarrow P.BC = Q.AC \Rightarrow P.BC = Q.(AB + BC)$

$\Rightarrow P.BC = Q.AB + Q.BC$

$\Rightarrow Q.AB = BC(P - Q) \therefore BC = \frac{Q}{P-Q}.AB$ ……… (iii)



$(ii) \Rightarrow (P + x).BD = (Q + x).AD \Rightarrow (P + x).BD = (Q + x).(AB + BD)$

$\Rightarrow P.BD + x.BD = Q.AB + x.AB + Q.BD + x.BD \Rightarrow BD(P - Q) = (Q + x).AB$

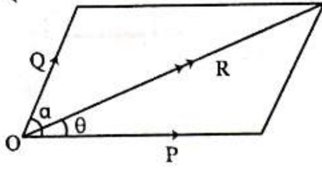
$\therefore BD = \frac{Q+x}{P-Q}.AB$ ……… (iv)

$(iv) \div (iii), \frac{BD}{BC} = \frac{(Q+x)}{P-Q}.AB \times \frac{P-Q}{Q.AB} = \frac{Q+x}{Q} = 1 + \frac{x}{Q} \therefore \frac{BD}{BC} = 1 + \frac{x}{Q} \therefore \frac{BD}{BC} > 1 \Rightarrow BD > BC$

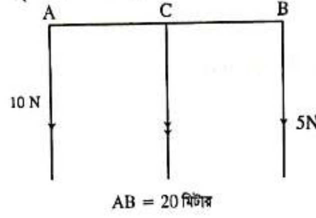
সুতরাং, লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু আরও দূরে সরে যাবে। (**Showed**)

10. [MB'22]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $P = Q$, $R = 3\sqrt{3}$ N এবং $\alpha = 60°$ হলে সমান বলদ্বয় নির্ণয় কর। 2

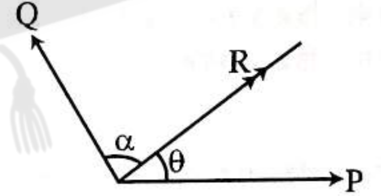
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\alpha = 3\theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{P^2-Q^2}{Q}$; $(P > Q)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি AB বরাবর কত মিটার দূরে সরে যাবে তা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $\alpha = 3\theta$; বলের সাইন সূত্র হতে পাই, $\frac{P}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{P}{\sin(3\theta-\theta)} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 3\theta}$



$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2\theta} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 3\theta} \Rightarrow \frac{P}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$

এখন, $\frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$ ……… (i)

আবার, $\frac{P}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{Q}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{P}{2\cos\theta} = \frac{Q}{1} \therefore \cos\theta = \frac{P}{2Q}$ ……… (ii)

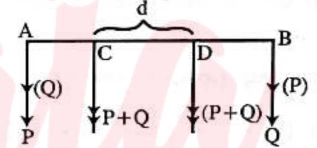
(i) থেকে পাই, $\frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{3\sin\theta-4\sin^3\theta} \Rightarrow Q = \frac{R}{3-4\sin^2\theta} \Rightarrow Q = \frac{R}{3-4(1-\cos^2\theta)}$

$\Rightarrow Q = \frac{R}{3-4+4\cos^2\theta} \Rightarrow Q = \frac{R}{4\cos^2\theta - 1} \Rightarrow Q = \frac{R}{4\times\frac{P^2}{4Q^2}-1}$ [(ii) নং হতে মান বসিয়ে]

$\Rightarrow Q = \frac{R}{\frac{P^2}{Q^2}-1} \Rightarrow R = Q\times\left(\frac{P^2}{Q^2}-1\right) \Rightarrow R = Q\left(\frac{P^2-Q^2}{Q^2}\right) \therefore R = \frac{P^2-Q^2}{Q}$; $(P > Q)$ **(Proved.)**

গ. মনে করি, $P = 10N, Q = 5N, AB = 20m$

P ও Q বলের লব্ধি $(P + Q)$ বলটি AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।



$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB} \therefore AC = \frac{Q}{P+Q}\cdot AB$ ……… (i)

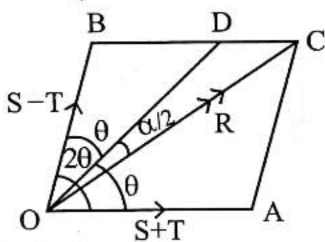
আবার, বল দুটি স্থান বিনিময় করলে লব্ধি $(P + Q)$ বলটি AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$\frac{P}{AD} = \frac{Q}{BD} = \frac{P+Q}{AB} \therefore AD = \frac{P}{P+Q}\cdot AB$ ……… (ii)

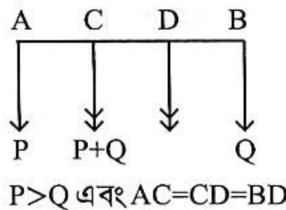
(ii) − (i), $AD - AC = \frac{P-Q}{P+Q}\cdot AB \Rightarrow d = \frac{10-5}{10+5}\times 20 \therefore d = \frac{20}{3}$ মিটার।

11. [DB'21]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) 2α কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধি, 2θ কোণে ক্রিয়ারত বল দুটির লব্ধির দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর: $\cos\alpha = 2\cos\theta$ 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $T\tan\theta = S\tan\frac{\alpha}{2}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে এবং বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে প্রমাণ কর যে, $P: Q = 2:1$. 4

সমাধান

ক.

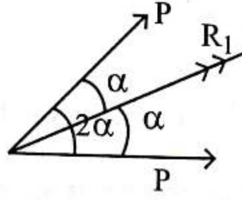
$R_1 = 2P\cos\alpha$

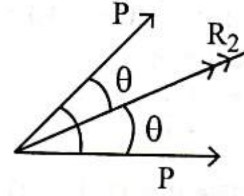
$R_2 = 2P\cos\theta$

$R_1 = 2R_2$

$\Rightarrow 2P\cos\alpha = 2 \times 2P\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\alpha = 2\cos\theta$ **[Proved]**





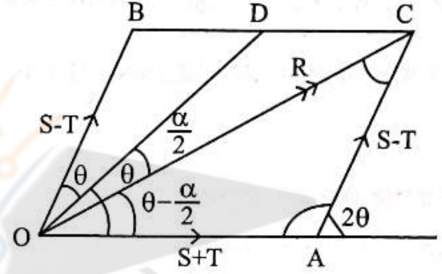
খ.

ΔOAC –এ sin সূত্রানুসারে, $\frac{S+T}{\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{S-T}{\sin\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{R}{\sin(\pi-2\theta)}$

$\Rightarrow \frac{S+T}{S-T} = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \frac{S+T+S-T}{S+T-S+T} = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{2\sin\theta\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\theta\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{S}{T} = \tan\theta\cot\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{S}{\cot\frac{\alpha}{2}} = T\tan\theta$

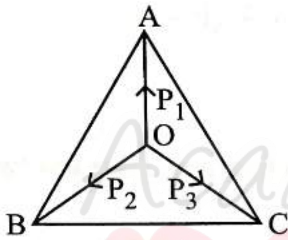
$\therefore S\tan\frac{\alpha}{2} = T\tan\theta$ **[Proved]**



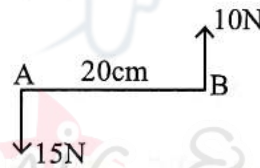
গ. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

12. **[DB'21]**

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) বলের লম্বাংশ এর সংজ্ঞা দাও। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে **O, ABC** ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে,
$P_1^2 : P_2^2 : P_3^2 = (1+\cos A) : (1+\cos B) : (1+\cos C)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে বলদ্বয়ের প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ কত বল যোগ করলে নতুন লব্ধি পূর্বের লব্ধি থেকে **8 cm** দূরে সরে যাবে? 4

সমাধান

ক. লব্ধি বলকে যখন পরস্পর সমকোণে অবস্থিত দুইটি অংশকে বিভক্ত করা হয়, তখন অংশকদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে লব্ধির লম্বাংশ বলে।

খ. $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 180° - \frac{1}{2}(180° - A)$

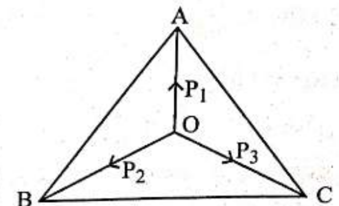
$= 90° + \frac{1}{2}A \therefore \angle COA = 90° + \frac{1}{2}B; \angle AOB = 90° + \frac{1}{2}C$; লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P_1}{\sin\angle BOC} = \frac{P_2}{\sin\angle AOC} = \frac{P_3}{\sin\angle AOB}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\sin\left(90°+\frac{A}{2}\right)} = \frac{P_2}{\sin\left(90°+\frac{B}{2}\right)} = \frac{P_3}{\sin\left(90°+\frac{C}{2}\right)} \Rightarrow \frac{P_1}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{P_2}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{P_3}{\cos\frac{C}{2}}$

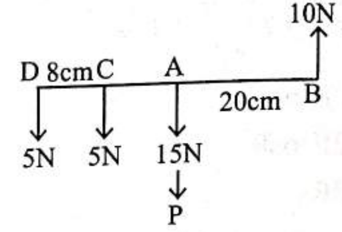
$\Rightarrow \frac{P_1^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{P_2^2}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{P_3^2}{\cos^2\frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{P_1^2}{2\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{P_2^2}{2\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{P_3^2}{2\cos^2\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow \frac{P_1^2}{(1+\cos A)} = \frac{P_2^2}{(1+\cos\ )} = \frac{P_3^2}{(1+\cos\ )}$

$\therefore P_1^2 : P_2^2 : P_3^2 = (1+\cos A) : (1+\cos B) : (1+\cos C)$ **[Showed]**



গ. ১ম ক্ষেত্রে, $10 \times (20 + AC) = 15 \times AC \Rightarrow 2(20 + AC) = 3AC$
$\Rightarrow 40 + 2AC = 3AC \Rightarrow AC = 40$ cm $\therefore AD = 48$ cm
এখন, $(10 + P).68 = (15 + P) \times 48$
$\Rightarrow 680 + 68P = 720 + 48P \Rightarrow 20P = 40 \therefore P = 2$
∴ অতিরিক্ত 2N বল যোগ করতে হবে।
Shortcut: লব্ধির সরণ $= \frac{\text{প্রযুক্ত বলের মোমেন্ট}}{\text{লব্ধি}} \Rightarrow 8 = \frac{P\times20}{5} \Rightarrow P = 2N$ **(Ans.)**

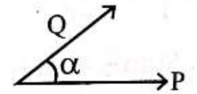


13. একটি বিন্দুতে **α** কোণে ক্রিয়ারত **P** ও **Q** (**P > Q**) মানের বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে **L** ও **M**। **[RB'21]**
(ক) এক বিন্দুতে **120°** কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি নির্ণয় কর। 2
(খ) **P** এর দিক বরাবর লব্ধির লম্বাংশের পরিমাণ **Q** হলে, প্রমাণ কর যে, $\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$ 4
(গ) দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধির মান $\sqrt{L\cos^2\frac{\alpha}{2} + M\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ 4

সমাধান

ক. **01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।**

খ. প্রশ্নমতে, $Q = P + Q\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$
$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$ (প্রমাণিত)



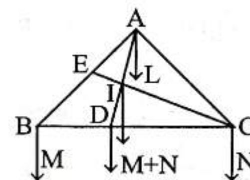
গ. প্রশ্নমতে, $L = P + Q$; $M = P - Q$; বলদ্বয়ের লব্ধির মান $= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$
$= \sqrt{P^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) + Q^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2PQ\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$
$= \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}(P^2 + 2PQ + Q^2) + \sin^2\frac{\alpha}{2}(P^2 - 2PQ + Q^2)} = \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}(P+Q)^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}(P-Q)^2}$
$= \sqrt{L^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + M^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (দেখানো হল) [প্রশ্নে, L ও M এর জায়গায় L^2 ও M^2]

14. উদ্দীপক-১: তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল **L, M, N** যথাক্রমে **ΔABC** এর শীর্ষবিন্দু **A, B, C** তে কার্যরত এবং এদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রগামী।
উদ্দীপক-২: **l** দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেয়ালে আটকানো। অন্য প্রান্ত **'a'** ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ও **W** ওজনের একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত আছে। **[RB'21]**
(ক) একটি বস্তুর উপর **A** ও **B** বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল **L** ও **M** (**L > M**) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু **AB** বরাবর **x** দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $x = \frac{L-M}{L+M}AB$। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\frac{L}{a} = \frac{M}{b} = \frac{N}{c}$. 4
(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, সুতার টান $= \frac{W(a+l)}{\sqrt{l^2+2al}}$. 4

সমাধান

ক. **03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।**

খ. ∴ M, N এর লব্ধি I বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হওয়ায় M + N, D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হবে। $\therefore \frac{M}{N} = \frac{DC}{BD} \cdots\cdots\cdots$ (i)
আবার, ΔABD-এ $\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin B} \cdots\cdots\cdots$ (ii)
ΔADC-এ $\frac{CD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin C} \cdots\cdots\cdots$ (iii)
(iii) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{\sin B}{\sin C} \cdots\cdots\cdots$ (iv)
(i) & (iv) $\Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{\sin B}{\sin C}$
অনুরূপভাবে দেখানো যায়– $\frac{L}{M} = \frac{\sin A}{\sin B} \therefore \frac{L}{\sin A} = \frac{M}{\sin B} = \frac{M}{\sin C} \Rightarrow \frac{L}{ak} = \frac{M}{bk} = \frac{N}{ck}$ [$\because a \propto \sin A$]
$\Rightarrow \frac{L}{a} = \frac{M}{b} = \frac{N}{c}$ **(Proved)**

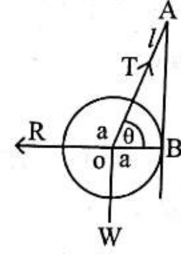


গ. লামির উপপাদ্য অনুযায়ী- $\frac{W}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{T}{\sin 90°} \Rightarrow \frac{W}{\sin\theta} = T$

$\Rightarrow T = \frac{W}{\frac{AB}{OA}} \Rightarrow T = \frac{OA \times W}{AB}$

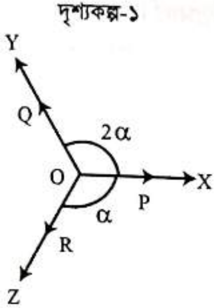
$\Rightarrow T = (a+l) \times \frac{W}{\sqrt{(l+a)^2 - a^2}}$

$\Rightarrow T = \frac{W(a+l)}{\sqrt{l^2+2al}}$ **(Showed)**

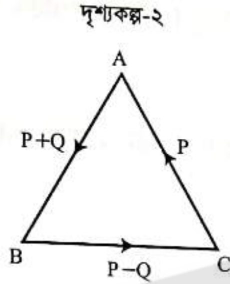


15. [Ctg.B'21; CB'21]

দৃশ্যকল্প-১



দৃশ্যকল্প-২



(ক) বলের লম্বাংশের উপপাদ্যটি লিখ। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q-P)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ ΔABC সমবাহু হলে বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. "কোনো নির্দিষ্ট দিকে এক বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বলের লম্বাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।"

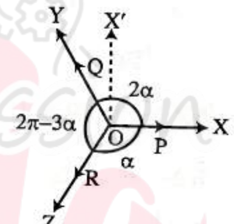
খ. OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে, $P + Q\cos 2\alpha + R\cos(-\alpha) = 0$

$\Rightarrow P + Q\cos 2\alpha + R\cos\alpha = 0 \cdots\cdots\cdots(i)$

OX′ বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$P\sin 0° + Q\sin 2\alpha + R\sin(-\alpha) = 0$

$\Rightarrow Q.2\sin\alpha\cos\alpha - R\sin\alpha = 0 \Rightarrow 2Q\cos\alpha = R \therefore \cos\alpha = \frac{R}{2Q} \cdots\cdots\cdots(ii)$



(i) এ $\cos\alpha$ এর মান বসিয়ে,

$P + Q(2\cos^2\alpha - 1) + R\cos\alpha = 0 \Rightarrow P + Q\left(2 \times \frac{R^2}{4Q^2} - 1\right) + \frac{R^2}{2Q} = 0 \Rightarrow P + \frac{R^2}{2Q} - Q + \frac{R^2}{2Q} = 0$

$\Rightarrow \frac{R^2}{Q} = Q - P \therefore R^2 = Q(Q-P)$ **(Proved)**

গ. OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

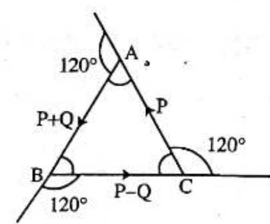
$R\cos\theta = (P-Q)\cos 0° + P\cos 120° + (P+Q)\sin 240°$

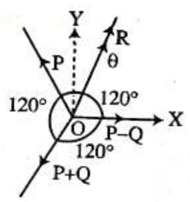
$= P - Q - \frac{P}{2} - \frac{P+Q}{2} = \frac{2P-2Q-P-}{2} = -\frac{3Q}{2} \cdots\cdots\cdots(i)$

OY বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$R\sin\theta = (P-Q)\sin 0° + P\sin 120° + (P+Q)\sin 240°$

$= \frac{\sqrt{3}P}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(P+Q) = -\frac{\sqrt{3}Q}{2} \cdots\cdots\cdots(ii)$





$\{(i)^2 + (ii)^2\} \Rightarrow R^2 = \frac{9Q^2}{4} + \frac{3Q^2}{4} = 3Q^2 \therefore R = \sqrt{3}Q$

$\{(ii) \div (i)\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

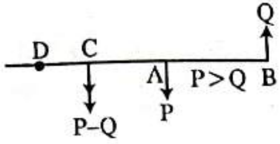
[$\sin\theta$ ও $\cos\theta$ উভয়ই (+) ve হওয়ায় θ, 3rd Quadrant এ অবস্থিত]

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6} = 210°$ **(Ans.)**

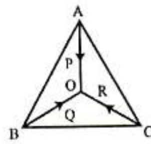
∴ লব্ধির মান $\sqrt{3}Q$ ও লব্ধি $(P-Q)$ বলের সাথে 210° কোণে ক্রিয়াশীল।

16. [Ctg.B'21]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) সাম্যাবস্থায় লামির সূত্রটি লিখ। 2

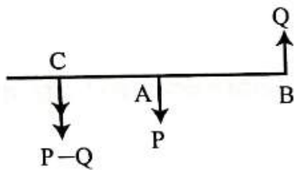
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ **P** ও **Q** উভয় বলের মান **R** পরিমাণ বৃদ্ধি করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু **D** তে স্থানান্তরিত হয়। প্রমাণ কর যে, $CD = \frac{R}{P-Q}AB$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ **O** ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। **P, Q** ও **R** বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, $\frac{P^2}{a(b+c-a)} = \frac{Q^2}{b(c+a-b)} = \frac{R^2}{c(a+b-c)}$. 4

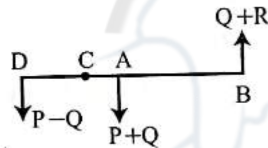
সমাধান

ক. "ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর কার্যরত তিনটি সমবিন্দু সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, তাদের প্রতিটি বলের মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে।"

খ.



চিত্র-১



চিত্র-২

চিত্র-১ নং ক্ষেত্রে, $P.AC = Q.BC \Rightarrow P.AC = Q.(AB + AC) \Rightarrow (P - Q).AC = Q.AB \Rightarrow AC = \frac{Q.AB}{P-Q}$ .... (i)

চিত্র-২ নং ক্ষেত্রে, $(P + R).AD = (Q + R).BD \Rightarrow (P + R).AD = (Q + R)(AB + AD)$

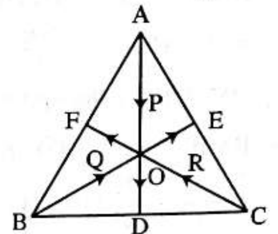
$\Rightarrow (P + R).AD = (Q + R).AB + (Q + R).AD$

$\Rightarrow (P + R - Q - R).AD = (Q + R).AB \Rightarrow AD = \frac{(Q+R).AB}{P-Q}$ .... (ii)

(ii) – (i) $\Rightarrow AD - AC = \frac{(Q+R).AB-Q.AB}{P-Q} \Rightarrow CD = \frac{R}{P-Q}.AB$ **[Proved]**

গ. O অন্তঃকেন্দ্র হওয়ায়, $\angle OBD = \angle OBF = \frac{1}{2}\angle B$; $\angle OCD = \angle OCA = \frac{1}{2}\angle C \therefore \angle OBD + \angle OCD + \angle BOC = 180°$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \angle BOC = 180° \Rightarrow \angle BOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$



এখন, সাম্যাবস্থায় লামির উপপাদ্য অনুসারে,

$\frac{P}{\sin\angle EOF} = \frac{Q}{\sin\angle DOF} = \frac{R}{\sin\angle DOE} \Rightarrow \frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle AOC} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$ [বিপ্রতীপ কোণ]

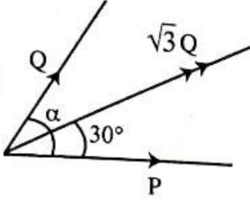
$\Rightarrow \frac{P}{\sin(90°+\frac{A}{2})} = \frac{Q}{\sin(90°+\frac{B}{2})} = \frac{R}{\sin(90°+\frac{C}{2})} \Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow \frac{P^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{Q^2}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{R^2}{\cos^2\frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{P^2}{2\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{Q^2}{2\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{R^2}{2\cos^2\frac{C}{2}}$

$\Rightarrow \frac{P^2}{1+\cos A} = \frac{Q^2}{1+\cos} = \frac{R^2}{1+\cos} \Rightarrow \frac{P^2}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{Q^2}{1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \frac{R^2}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

$\Rightarrow \frac{P^2\times 2bc}{(b+c)^2-a^2} = \frac{Q^2\times 2ca}{(c+a)^2-b^2} = \frac{R^2\times 2ab}{(a+b)^2-c^2} \Rightarrow \frac{P^2\times bc}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{Q^2\times ca}{(c+a+b)(c+a-b)} = \frac{R^2\times ab}{(a+b+c)(a+b-c)}$

$\Rightarrow \frac{P^2\times abc}{a(b+c-a)} = \frac{Q^2\times abc}{b(c+a-b)} = \frac{R^2\times abc}{c(a+b-c)} \Rightarrow \frac{P^2}{a(b+c-a)} = \frac{Q^2}{b(c+a-b)} = \frac{R^2}{c(a+b-c)}$ **[Proved]**

17. দৃশ্যকল্প-১: 

[SB'21]

দৃশ্যকল্প-২: Δ**ABC**-এর **A, B** ও **C** বিন্দুতে যথাক্রমে **P, Q, R** সদৃশ সমান্তরাল বলত্রয় কার্যরত এবং ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র **O.**

(ক) দুটি বলের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন লব্ধির মান যথাক্রমে **9N** ও **4N** হলে বলদ্বয় নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, **P = Q** ও **P = 2Q.** 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা **O** বিন্দুগামী হলে, প্রমাণ কর যে, **P: Q: R = sin 2A : sin 2B : sin 2C** 4

সমাধান

ক. ধরি, বলদ্বয় P ও Q

প্রশ্নমতে, $P + Q = 9N \cdots\cdots\cdots (i); P - Q = 4N \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow 2P = 13N \Rightarrow P = \frac{13}{2}N$

$(i) - (ii) \Rightarrow 2Q = 5N \Rightarrow Q = \frac{5}{2}N$ $\therefore$ বলদ্বয় $\frac{13}{2}N, \frac{5}{2}N$ **(Ans.)**

খ. চিত্রানুযায়ী, $Q = \frac{\sqrt{3}Q\sin 30°}{\sin(30+\alpha)} \cdots\cdots\cdots (i)$

$\sin(30 + \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

১ম ক্ষেত্রে, $\sin(30 + \alpha) = \sin 60 \therefore \alpha = 30°$; ২য় ক্ষেত্রে, $\sin(30 + \alpha) = \sin 120 \therefore \alpha = 90°$

$P = \frac{\sqrt{3}Q\sin\alpha}{\sin(30+\alpha)} \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(ii) \div (i) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin 30} \Rightarrow P = 2Q\sin\alpha$

$\alpha = 30°$ হলে, $P = 2Q \times \sin 30° \Rightarrow P = Q$; $\alpha = 90°$ হলে, $P = 2Q.\sin 90° \Rightarrow P = 2Q$

$\therefore P = Q$ বা, $P = 2Q$ **(Proved)**

গ. লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করায়, Q ও R এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} \cdots\cdots\cdots (i)$



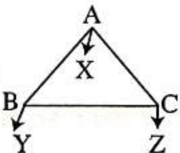
ΔOCD- এ $\frac{CD}{\sin(\pi - \angle AOC)} = \frac{DO}{\sin\angle OCD} \Rightarrow \frac{CD}{DO} = \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle OCD} \Rightarrow \frac{CD}{DO} = \frac{\sin 2B}{\sin\angle OCD} \cdots\cdots\cdots (ii)$

ΔODB- এ $\frac{BD}{\sin(\pi - \angle AOB)} - \frac{DO}{\sin\angle OBD} \Rightarrow \frac{BD}{DO} = \frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle OBD}$

$\Rightarrow \frac{BD}{DO} = \frac{\sin 2C}{\sin\angle OCD} \cdots\cdots\cdots (iii)$ $[\because \angle OBD = \angle OCD]$

$(ii) \div (iii) \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$ [(i) নং থেকে]

অনুরূপভাবে, $\frac{P}{Q} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B} \therefore \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C} \Rightarrow P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ **(Proved)**

18. দৃশ্যকল্প-১: 

[SB'21]

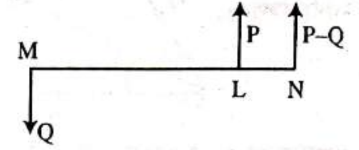
দৃশ্যকল্প-২: **P** ও **Q** দুটি অসদৃশ সমান্তরাল বল।

(ক) **P** ও **Q** (যখন **P > Q**) অসদৃশ সমান্তরাল বল দুটি যথাক্রমে **L** ও **M** বিন্দুতে কার্যরত হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু $\frac{Q}{P-Q}$**LM** দূরত্বে কার্যরত হবে। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বলত্রয়ের লব্ধি ত্রিভুজটির লম্ব বিন্দুগামী হলে, প্রমাণ কর যে, **X: Y: Z = tan A : tan B : tan C** 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর **P** বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়ারেখা **d** দূরত্বে সরালে, দেখাও যে, এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু $\frac{Pd}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। 4

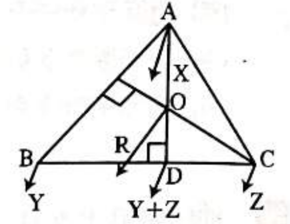
সমাধান



ক. শর্তমতে, $P \times LN = Q(LM + LN)$

$\Rightarrow P \times LN = Q \times LM + Q \times LN$

$\Rightarrow LN = \frac{Q}{P-Q} \times LM$ **(Proved)**

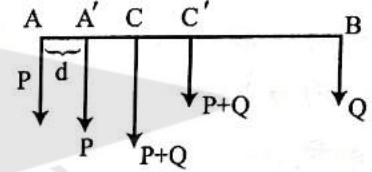


খ. বলগুলোর লব্ধি লম্বকেন্দ্র O তে ক্রিয়া করায় Y ও Z এর লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore \frac{Y}{Z} = \frac{CD}{DB} \cdots\cdots\cdots (i)$

$\Rightarrow \frac{Y}{Z} = \frac{AD}{DB} \times \frac{1}{\frac{AD}{CD}} \Rightarrow \frac{Y}{Z} = \frac{\tan B}{\tan C}$

অনুরূপভাবে, $\frac{X}{Y} = \frac{\tan A}{\tan B} \therefore \frac{X}{\tan A} = \frac{Y}{\tan B} = \frac{Z}{\tan C} \Rightarrow X:Y:Z = \tan A : \tan B : \tan C$ (প্রমাণিত)



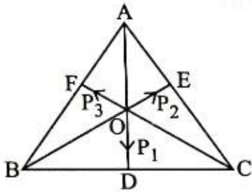
গ. ১ম ক্ষেত্রে, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB} \cdots\cdots\cdots (i)$

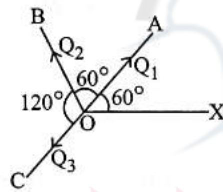
২য় ক্ষেত্রে, $\frac{P}{BC'} = \frac{Q}{A'C'} - \frac{P+Q}{A'B} \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i) \Rightarrow BC = \frac{AB \times P}{P+Q} \cdots\cdots\cdots (iii)$

$(ii) \Rightarrow BC' = \frac{A'B \times P}{P+Q} \cdots\cdots\cdots (iv)$

$(iii) - (iv) \Rightarrow BC - BC' = \frac{P}{P+Q}(AB - A'B) \Rightarrow CC' = \frac{Pd}{P+Q}$ **(Showed)**

19. 



[BB'21]

(ক) পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি 12N বলদ্বয় নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ O, ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র এবং P_1, P_2, P_3 বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P_1 : P_2 : P_3 = BC : CA : AB$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বলত্রয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ.

এখানে, $A + \angle EOF = 180°$

$\Rightarrow \angle EOF = 180° - A$

অনুরূপভাবে $\angle DOE = 180° - C$

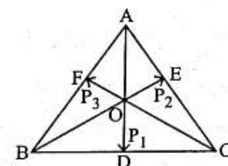
$\angle DOF = 180° - B$

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ [এখানে, R ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

লামির সূত্রানুযায়ী $\frac{P_1}{\sin \angle EOF} = \frac{P_2}{\sin \angle DOF} = \frac{P_3}{\sin \angle DOE}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\sin(180°-A)} = \frac{P_2}{\sin(180°-B)} = \frac{P_3}{\sin(180°-C)}$

$\Rightarrow \frac{P_1}{\sin A} = \frac{P_2}{\sin B} = \frac{P_3}{\sin C} \Rightarrow \frac{P_1}{\frac{BC}{2R}} = \frac{P_2}{\frac{CA}{2R}} = \frac{P_3}{\frac{AB}{2R}} \Rightarrow \frac{P_1}{BC} = \frac{P_2}{CA} = \frac{P_3}{AB}$



$\therefore P_1 : P_2 : P_3 = BC : CA : AB$ **(Proved)**

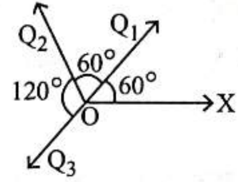
গ. ধরি, লব্ধি OX এর সাথে θ কোণ তৈরি করে, OX বরাবর বলগুলোর এবং তাদের লব্ধির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$Q\cos\theta = Q_x = Q_1\cos 60° + Q_2\cos 120° + Q_3\cos(240°)$

$= \frac{Q_1}{2} - \frac{Q_2}{2} - \frac{Q_3}{2} = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2}$

OX এর লম্বদিকে বলগুলো এবং তাদের লব্ধির লম্বাংশ নিয়ে পাই,

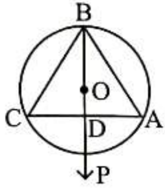
$Q\sin\theta = Q_y = Q_1\sin 60° + Q_2\sin 120° + Q_3\sin 240° = \frac{\sqrt{3}(Q_1+Q_2-Q_3)}{2}$



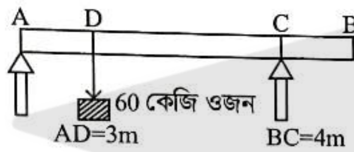
∴ লব্ধির মান $R = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{\frac{3(Q_1+Q_2-Q_3)^2 + (Q_1-Q_2-Q_3)^2}{4}}$

$= \sqrt{(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + Q_1Q_2 - 2Q_1Q_2 - 2Q_1Q_3}$

∴ লব্ধি OX এর সাথে θ কোণ তৈরি করলে $\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}(Q_1+Q_2-Q_3)}{(Q_1-Q_2-Q_3)}\right\}$

20. 

দৃশ্যকল্প-1



দৃশ্যকল্প-2

[BB'21]

(ক) একটি বস্তুর উপর পরস্পর 20 মিটার দূরত্বে ক্রিয়াশীল বিসদৃশ, সমান্তরাল বল **8N** ও **12N** এর লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু নির্ণয় কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, **C** ও **A** বিন্দুতে **P** বলের সমান্তরাল অংশকদ্বয়ের অনুপাত **sin 2C : sin 2A.** **4**

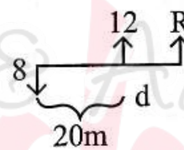
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ **50** কেজি ওজনের **AB** সমরূপ তক্তাটির দৈর্ঘ্য **20** মিটার হলে খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. ধরি লব্ধি 12N বল থেকে d দূরত্বে ক্রিয়া করে।

$\therefore \frac{d}{8} = \frac{20}{12-8} \Rightarrow d = 40\text{ m}$

∴ 8N বল থেকে দূরত্ব $(40 + 20)\text{m} = 60\text{ m}$

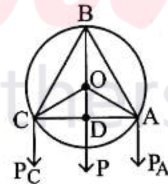


খ. এখানে $OA = OB = OC = r$ এবং $\angle BOC = 2A, \angle AOB = 2C, \angle AOC = 2B$ [∵ বৃত্তস্থ কোণ অর্ধবৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

O, A ও O, C যোগ করি। ধরি A ও C বিন্দুতে সমান্তরাল অংশকদ্বয় যথাক্রমে P_A ও P_C

এখানে, $\frac{AD}{CD} = \frac{\Delta ABD \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta BCD \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\Delta AOD \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta COD \text{ এর ক্ষেত্রফল}}$

$\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{\Delta ABD \text{ এর ক্ষেত্রফল} - \Delta AOD \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta BCD \text{ এর ক্ষেত্রফল} - \Delta COD \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\Delta AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta BOC \text{এর ক্ষেত্রফল}}$



$\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{1}{2}\times r^2 \sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\times r^2 \sin\angle BOC} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$

আবার, $P_A \times AD = P_C \times CD \Rightarrow \frac{P_A}{P_C} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C}$ **(Proved)**

গ. ধরি, A ও C বিন্দুতে খুঁটির চাপ যথাক্রমে P_A ও P_C

$\therefore P_A + P_C = 60 + 50 = 110\text{kg} - \text{wt}$

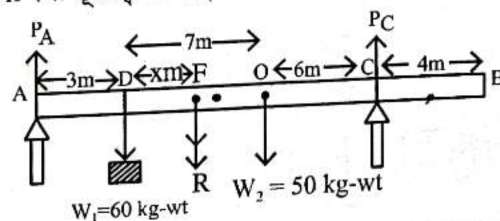
আবার ধরি, বলদ্বয়ের লব্ধি $R = 110\text{ kg} - \text{wt}$ যা D থেকে DF=x মি. দূরত্বে F বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore \frac{R}{DO} = \frac{W_2}{DF} \Rightarrow \frac{110}{DO} = \frac{50}{x} \Rightarrow x = \frac{35}{11}\text{ m}$

এবং $\frac{R}{AC} = \frac{P_C}{AF} \Rightarrow \frac{110}{(20-4)} = \frac{P_C}{\left(3+\frac{35}{11}\right)}$

$\therefore P_C = 42.5\text{ kg} - \text{wt}$

(i) হতে পাই $P_A = 67.5\text{ kg} - \text{wt}$



21. দৃশ্যকল্প-১: কোনো একটি বিন্দুতে পরস্পর $120°$ কোণে $3N, 4N, 6N$ বলত্রয় ক্রিয়ারত আছে। **[JB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $16N$ ও $12N$ দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে।

(ক) P ও Q দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধির মান ক্ষুদ্রতম লব্ধির মানের দ্বিগুণ হলে বল দুইটির অনুপাত নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলগুলোর লব্ধি নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশকল্প-২ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে LM বরাবর তাদের লব্ধির সরণ নির্ণয় কর। 4

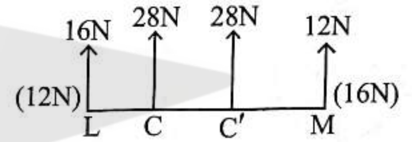
সমাধান

ক. প্রশ্নমতে, $P + Q = 2(P - Q) \Rightarrow P + Q = 2P - 2Q \Rightarrow 3Q = P \Rightarrow \frac{P}{Q} = 3 \Rightarrow P : Q = 3 : 1$ **(Ans)**

খ. **01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।**

গ. ১ম ক্ষেত্রে, $\frac{16}{CM} = \frac{12}{LC} = \frac{28}{LM} \cdots\cdots (i)$

২য় ক্ষেত্রে, $\frac{12}{C'M} = \frac{16}{LC'} = \frac{28}{LM} \cdots\cdots (ii)$



$\Rightarrow LC = \frac{LM \times 12}{28} \cdots\cdots (iii)$

$(ii) \Rightarrow LC' = \frac{LM \times 16}{28} \cdots\cdots (iv)$

$(iv) - (iii)\ LC' - LC = LM\left(\frac{16}{28} - \frac{12}{28}\right) \Rightarrow CC' = LM \times \frac{4}{28} \Rightarrow CC' = \frac{LM}{7}$

$\therefore$ লব্ধির সরণ হবে $\frac{LM}{7}$ একক **(Ans.)**

22. দৃশ্যকল্প-১: একটি হালকা লাঠির এক প্রান্ত হতে $2, 8, 6$ ফুট দূরে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে F_1, F_2, F_3 মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। **[JB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত F_1 ও F_2 মানের দুইটি বলের লব্ধি F তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশ বিভক্ত করে।

(ক) $4N$ ও $3N$ মানের দুইটি বল $90°$ কোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের লব্ধির মান কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে লাঠিটি ভারসাম্যে থাকলে দেখাও যে, $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$. 4

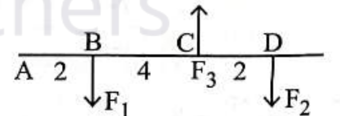
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, বল দুইটির লব্ধি $F = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_2} (F_1 > F_2)$. 4

সমাধান

ক. লব্ধির মান $= \sqrt{4^2 + 3^2 + 2.3.4.\cos 90}\ N = 5N$ **(Ans)**

খ. লাঠিটি ভারসাম্যে থাকলে, $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_3} \therefore F_1 + F_2 = F_3 \cdots\cdots (i)$

$F_1 \times BC = F_2 \times CD \Rightarrow F_1 \times 4 = F_2 \times 2 \Rightarrow \frac{F_1}{1} = \frac{F_2}{2} \Rightarrow \frac{F_1}{1} = \frac{F_2}{2} = \frac{F_1 + F_2}{3}$

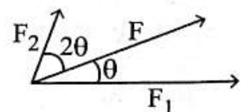


$\Rightarrow \frac{F_1}{1} = \frac{F_2}{2} = \frac{F_3}{3}$ [(i) থেকে]

$\therefore F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$ **(Showed)**

গ. এখানে, $F_1 = \frac{F \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$; $F_2 = \frac{F \sin\theta}{\sin 3\theta} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta \therefore \cos\theta = \frac{F_1}{2F_2}$

লব্ধি, $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2(\cos 3\theta)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)}$



$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left(4.\frac{F_1^3}{8.F_2^3} - \frac{3F_1}{2F_2}\right)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left(\frac{F_1^3 - 3F_1F_2^2}{2F_2^3}\right)}$

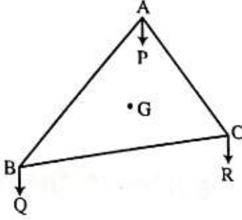
$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \left(\frac{F_1^4 - 3F_1^2F_2^2}{F_2^2}\right)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \frac{F_1^4 - 3F_1^2F_2^2}{F_2^2}} = \sqrt{\frac{F_1^2F_2^2 + F_2^4 + F_1^4 - 3F_1^2F_2^2}{F_2^2}}$

$= \sqrt{\frac{F_1^4 - 2F_1^2F_2^2 + F_2^4}{F_2^2}} = \sqrt{\frac{(F_1^2 - F_2^2)^2}{F_2^2}} = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_2}$ $[F_1 > F_2]$ (দেখানো হল)

23. দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে কার্যরত $Q-R, Q, Q+R$ মানের বলগুলোর দিক একইক্রমে কোনো সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরাল।

[CB'21]

দৃশ্যকল্প-২:



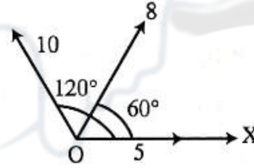
(ক) মূল বিন্দুতে **5, 8** ও **10** একক মানের তিনটি বল **X** -অক্ষের সাথে যথাক্রমে **0°, 60°** ও **120°** কোণে ক্রিয়া করছে। **OX** বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি নির্ণয় কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর বলগুলোর লব্ধি নির্ণয় কর। **4**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সদৃশ সমান্তরাল বল **P, Q, R** এর লব্ধি যদি **ABC** ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র **G** - তে ক্রিয়া করে তবে প্রমাণ কর যে, **P = Q = R.** **4**

সমাধান

ক. OX বরাবর লম্বাংশ $= 5\cos 0° + 8\cos 60° + 10\cos 120° = 5 + 4 - 5$ একক $= 4$ একক



খ. $Q-R$ বরাবর লম্বাংশ $P_x = (Q-R) + Q\cos120° + (Q+R)\cos240° = Q - R - \frac{Q}{2} - \frac{Q+R}{2} = -\frac{3R}{2}$

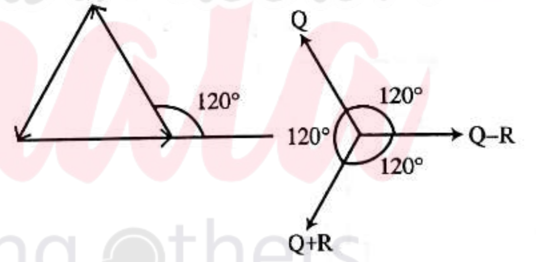
$Q-R$ বরাবর, লম্বাংশ $P_y = (Q-R)\sin 0° + Q\sin 120° + (Q+R)\sin(240°)$

$= \frac{Q\sqrt{3}}{2} - \frac{(Q+R)\sqrt{3}}{2} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ লব্ধি $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{4} + \frac{3R^2}{4}} = \sqrt{3R^2} = \sqrt{3}\,R$

দিক $\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{-R\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{2}{3R}\right)$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$



গ. এখানে, $\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$ যেহেতু লব্ধি G বিন্দুগামী,

$\therefore$ Q ও R এর লব্ধি BC ও AD এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ D বিন্দুগামী।

$\therefore (Q+R) \times GD = P \times AG$

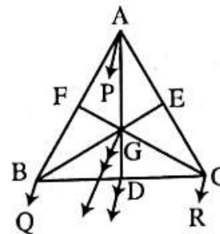
বা, $2P = Q + R \cdots\cdots\cdots$ (i)

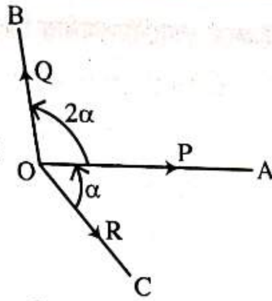
অনুরূপভাবে $2Q = P + R \cdots\cdots\cdots$ (iii)

(i) – (ii) $\Rightarrow P - Q = 0$ বা $P = Q$

(i) হতে পাই, $P = R$

$\therefore P = Q = R$ (প্রমাণিত)



24. দৃশ্যকল্প-১: 

[CB'21]

দৃশ্যকল্প-২: দুটি অসদৃশ সমান্তরাল বল 10 একক এবং 3 একক যথাক্রমে একটি বস্তুর **A** ও **B** বিন্দুতে ক্রিয়া করছে।

(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত **P** ও **2P** মানের বলদ্বয়ের লব্ধি যদি **P** এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয় তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল **P, Q, R** বলত্রয় সাম্যবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q - P)$. 4

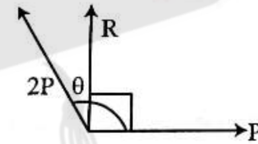
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ যদি $AB = a$ একক এবং উভয় বলকে যদি x পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয় তাহলে দেখাও যে, তাদের লব্ধি $\frac{ax}{7}$ দূরত্বে সরে যাবে। 4

সমাধান

ক. এখানে, $\tan 90° = \frac{2P\sin\theta}{P+2P\cos\theta} \Rightarrow \cot 90° = \frac{P+2P\cos\theta}{2P\sin\theta}$

$\Rightarrow P \times 2P\cos\theta = 0\ [\cot 90° = 0]$

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}\ \therefore \theta = 120°$



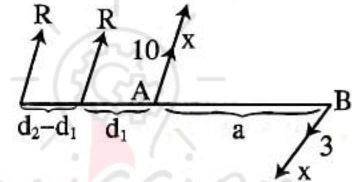
খ. 15 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. লব্ধি $R = (10-3) = 7$ একক। A হতে লব্ধির দূরত্ব d_1 হলে $\frac{d_1}{3} = \frac{a}{7} \Rightarrow d_1 = \frac{3a}{7}$

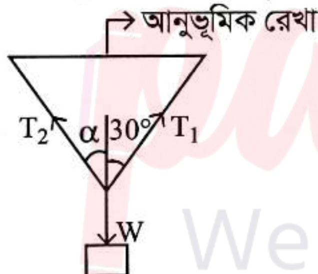
উভয় বলকে x পরিমাণ বাড়ালে লব্ধি $\{(10+x)-(3+4)\}$ একক = 7 একক

A হতে নতুন লব্ধির দূরত্ব d_2 হলে $\frac{d_2}{3+x} = \frac{a}{7} \Rightarrow d_2 = \frac{3a}{7} + \frac{ax}{7}$

$\therefore$ লব্ধি সরে যাবে $d_2 - d_1 = \left(\frac{3a}{7} + \frac{ax}{7}\right) - \frac{3a}{7} = \frac{ax}{7}$ **(Showed)**



25. **W** এর ওজনের বস্তুটি দুইটি সুতার সাহায্যে বেঁধে ঝুলিয়ে সাম্যাবস্থায় রাখা হল। **[Din.B'21; MB'21]**



(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল **3P, 4P** ও **5P** মানের বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, প্রথম বল দুইটি পরস্পর লম্ব। 2

(খ) **α** এর মান কত হলে T_2 টানের মান সর্বনিম্ন হবে? 4

(গ) $\alpha = 30°$ হলে, T_1 ও T_2 নির্ণয় কর যখন, **W = 10N.** 4

সমাধান

ক. প্রশ্নমতে, $\sqrt{(3P)^2 + (4P)^2 + 2.3P.4P.\cos\theta} = 5P$

$\Rightarrow 25P^2 + 24P^2\cos\theta = 25P^2 \Rightarrow 24P^2\cos\theta = 0 \therefore \theta = 90° \therefore$ 3P ও 4P পরস্পর লম্ব (প্রমাণিত)

খ. $\frac{T_2}{\sin 150} = \frac{T_1}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+30)} \Rightarrow T_2 = \frac{W\sin 150}{\sin(\alpha+30)}$

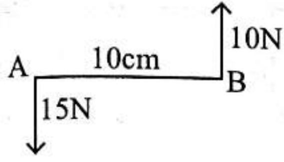
এখন $\sin(\alpha+30)$ Maxximum হলে T_2 minimum হবে। সেক্ষেত্রে $\alpha + 30° = 90°$; $\alpha = 60°$ **(Ans.)**

গ. $\alpha = 30°$ এবং $W = 10N$ হলে, $\frac{T_2}{\sin 150} = \frac{T_1}{\sin 150} = \frac{10}{\sin 60}$

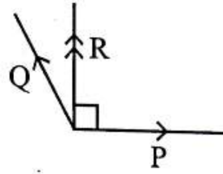
$\therefore T_1 = T_2 = \sin 30.\frac{10}{\sin 60} = \frac{1}{2}.\frac{10}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{10}{\sqrt{3}}N \therefore T_1 = T_2 = \frac{10}{\sqrt{3}}N$ **(Ans.)**

26. [Din.B'21]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো বিন্দুতে F মানের দুইটি সমান বল পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর বল দুটির সাথে সমমানের কত বল যোগ করলে নতুন লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 5cm দূরে সরে যাবে? 4

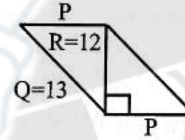
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $Q = 13N$ এবং P ও Q এর লব্ধি $R = 12N$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

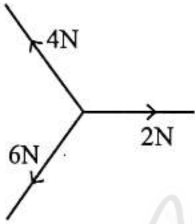
গ. পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী –



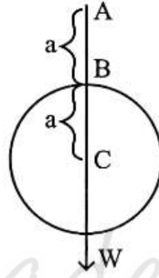
$P^2 = Q^2 - R^2$

$\Rightarrow P = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5N$ **(Ans.)**

27. [MB'21]



চিত্র-১



চিত্র-২

(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি 20N যা P বলের সাথে লম্ব। Q এর মান 25N হলে P এর মান কত? 2

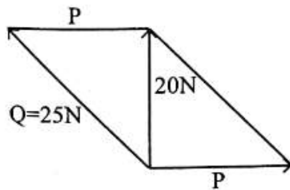
(খ) চিত্র-১ এ বলগুলির ক্রিয়ারেখা কোনো সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল বরাবর হলে, তাদের লব্ধি মান নির্ণয় কর। 4

(গ) চিত্র ২ এ AB সুতার A প্রান্ত একটি খাড়া দেওয়ালে আটকানো এবং গোলকটির ওজন W হলে AB সুতাটির টান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

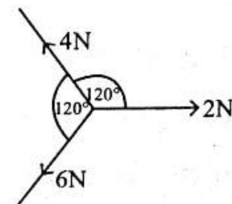
ক. শর্তমতে, $P = \sqrt{25^2 - 20^2}N$

$= 15N$ **(Ans.)**



খ. 2N বরাবর বলগুলোর উপাংশের যোগফল $-R_x = 2 + 4\cos120° + 6\cos240° = 2 - 2 - 3 = -3$

2N এর লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে –



$R_y = 4\sin120 + 6\sin240 = 2\sqrt{3} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$\therefore R = \sqrt{R_{x^2} + R_{y^2}} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ লব্ধির মান $2\sqrt{3}N$ **(Ans.)**

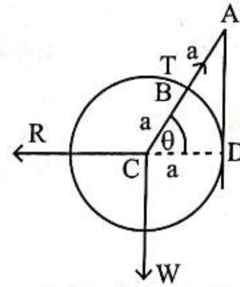
গ. লামির উপপাদ্য অনুযায়ী-

$\frac{T}{\sin 90} = \frac{W}{\sin(\pi-\theta)}$

$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin\theta} \Rightarrow T = \frac{W}{\frac{AD}{AC}} \Rightarrow T = W \times \frac{AC}{AD}$

$\Rightarrow T = W \times \frac{2a}{\sqrt{4a^2-a^2}} \Rightarrow T = W \times \frac{2a}{\sqrt{3}a}$

$\Rightarrow T = \frac{2}{\sqrt{3}} W$ **(Ans.)**



28. দৃশ্যকল্প-১: একটি কাঁঠাল গাছের তিনটি ডালের **A, B, C** বিন্দুতে যথাক্রমে **8kg, 7kg** ও **5kg** ওজনের তিনটি কাঁঠাল ঝুলছে। **[MB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: **AB = 15** মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি হালকা তক্তা দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে অবস্থিত। **A** ও **B** প্রান্তে যথাক্রমে **24kg** ও **32kg** ওজনের দুইজন বালক ঝুলছে।

(ক) **3N, 7N** ও **5N** বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে **3N** ও **5N** বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ কাঁঠালগুলোর ওজনের লব্ধি **ABC** ত্রিভুজের লম্ববিন্দুগামী হলে দেখাও যে,
cos A : cos B : cos C = 35: 50: 28 যেখানে **a = 4, b = 5, c = 2.** **4**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ খুঁটি দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব **AB** এর এক-তৃতীয়াংশ হলে খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. 25 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. লব্ধি বল 20 kg এবং A বিন্দু থেকে 8kg ওজনের বল AD বরাবর ক্রিয়ারত।

∴ 7kg ও 5kg বলের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

$\therefore 5 \times CD = 7 \times BD \Rightarrow 5 \times AC \times \cos C = 7 \times AB \times \cos B$

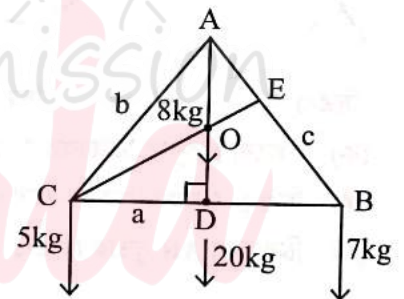
$\Rightarrow 5b\cos C = 7c\cos B \Rightarrow \cos B : \cos C = 5b : 7c$

$\Rightarrow \cos B : \cos C = 25 : 14$ .... (i)

একই ভাবে, $8 \times AE = 7 \times BE \Rightarrow 8 \times AC \times \cos A = 7 \times BC \times \cos B$

$\Rightarrow 8b\cos A = 7a\cos B \Rightarrow \cos A : \cos B = 28 : 40$

$\Rightarrow \cos A : \cos B = 7 : 10$ .... (ii)



(i) $\Rightarrow \cos B : \cos C = 25 : 14$

$\Rightarrow \cos B : \cos C = (25 \times 2) : (14 \times 2)$

$\Rightarrow \cos B : \cos C = 50 : 28$ .... (iii)

(ii) $\Rightarrow \cos A : \cos B = (7 \times 5) : (10 \times 5)$

$\Rightarrow \cos A : \cos B = 35 : 50$ .... (iv)

(iii) & (iv) $\Rightarrow \cos A : \cos B : \cos C = 35 : 50 : 28$ **(Showed)**

গ. ধরি খুটি দুটির প্রতিক্রিয়া বল সমান। $\therefore CE = \frac{CD}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ m

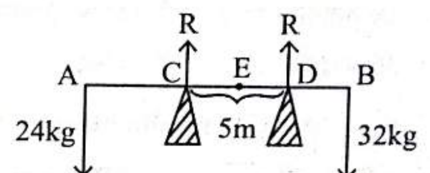
আবার, $AE \times 24 = 32 \times (15 - AE) \Rightarrow 3AE = 60 - 4AE$

$\Rightarrow 7AE = 60 \Rightarrow AE = \frac{60}{7} \therefore AC = AE - CE = \left(\frac{60}{7} - 2.5\right) m = \frac{85}{14} m$

∴ একটি খুটি A বিন্দু থেকে B বিন্দুর দিকে $\frac{85}{14}$ m দূরে। **(Ans.)**

আবার, $BD = AB - (AE + ED) = 15 - \left(\frac{60}{7} + \frac{5}{2}\right) m = \frac{55}{14} m$

অন্যটি B বিন্দু থেকে A বিন্দুর দিকে $\frac{55}{14}$ m দূরে। **(Ans.)**



29. দৃশ্যকল্প-১: P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরানো হলো।
দৃশ্যকল্প-২: P ও Q(P > Q) বল দুটি পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি θ কোণে ঘুরে যায়। [DB'19]
(ক) 8N ও 6N মানের দুটি বল পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, বল দুটির লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যায়। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$. 4

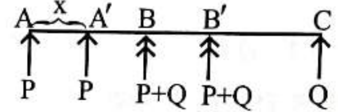
সমাধান

ক. লব্ধি $= \sqrt{8^2 + 6^2 + 2.8.6\cos 120} = 2\sqrt{13}$N

খ. এখানে, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AB} = \frac{P+Q}{AC}$

পরবর্তীতে, $\frac{P}{B'C} = \frac{Q}{A'B'} = \frac{P+Q}{A'C}$

$\therefore BB' = BC - B'C = \frac{P}{P+Q}AC - \frac{P}{P+Q}A'C = \frac{P}{P+Q}(AC - A'C) = \frac{Px}{P+Q}$ **(Proved)**



গ. এখানে, OA' = OB = Q, OA = OB' = P, লব্ধি যথাক্রমে OC ও OC'

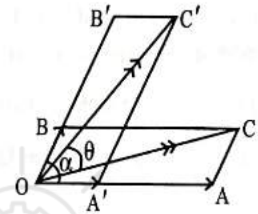
ধরি, $\angle B'OC' = \angle AOC = x$ [$\Delta B'OC' \equiv \Delta AOC$]

$\therefore x + x + \theta = \alpha \quad \therefore x = \frac{\alpha-\theta}{2}$ এবং $\angle BOC = x + \theta = \frac{\alpha-\theta}{2} + \theta = \frac{\alpha+\theta}{2}$

এখন, ΔOAC এ $\frac{OA}{\sin ACO} = \frac{AC}{\sin AOC} \Rightarrow \frac{P}{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}} = \frac{Q}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}$

$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2} + \sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\theta}{2} - \sin\frac{\alpha-\theta}{2}} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}$

$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$ **[Proved]**



30. দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে 2P এবং Q মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত আছে। [RB'19]
দৃশ্যকল্প-২: 5N ও 3N মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে AB = 10 সে.মি.।
(ক) কোনো বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়ারত একই মানের দুইটি বলের লব্ধি 4N হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি Q = 3P হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক করে বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ, প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয়, তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরত্বে সরে যায়। 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

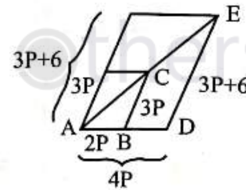
খ. ΔABC ও ΔADE সদৃশ।

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{2P}{3P} = \frac{4P}{3P+6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4P}{3P+6}$

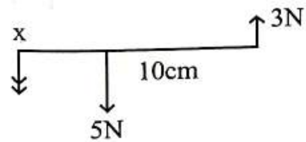
$\Rightarrow 6P + 12 = 12P \Rightarrow 6P = 12$

$\therefore P = 2$ একক।

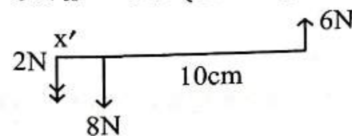
$\therefore Q = 3 \times 2 = 6$ একক।



গ. $5 \times x = 3 \times (10 + x) \therefore x = 15$ cm

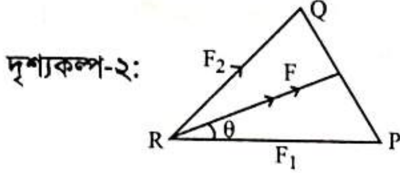


$8 \times x' = 6 \times (10 + x') \therefore x' = 30$ cm $\therefore$ লব্ধি সরবে $= (30 - 15)$cm $= 15$cm



31. দৃশ্যকল্প-১: **16N** ও **12N** দুইটি সমমুখী সমান্তরাল একটি কঠিন বস্তুর উপর যথাক্রমে **L** ও **M** বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প-২: **[Ctg.B'19]**



(ক) কোন বিন্দুতে **1, 2** এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P, F_2 \propto \cos Q$ এবং F_1, F_2 এর লব্ধি **F** হলে দেখাও যে, $R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে **LM** বরাবর তাদের লব্ধির সরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $P = 1,\ Q = 2,\ R = \sqrt{3}$; $P^2 + R^2 = Q^2 \Rightarrow 1 + 3 = 4$ অর্থাৎ P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 90°

লামির উপপাদ্য অনুযায়ী, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin 90} = \frac{R}{\sin\beta}$; $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\beta} = 2$

$\alpha = 30°$; $\beta = 60°$ ∴ P, Q এর কোণ 60° Q, R এর কোণ 30° P, R এর কোণ 90°

খ. $F_1 = k\cos P$; $F_2 = k\cos Q$; RP বরাবর উপাংশ নিলে, $F\cos\theta = F_1 + F_2\cos R = k\cos P + k\cos Q\cos R$

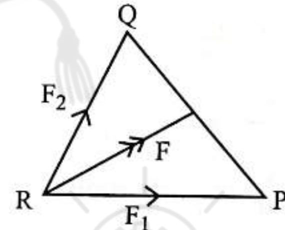
$= k\cos(\pi - (Q + R)) + k\cos\theta\cos\pi = -k\cos.(Q + R) + k\cos Q\cos R$

$F\cos\theta = k\sin Q\sin R$ ... ... (i)

আবার, $F\sin\theta = F_2\sin R = k\cos Q\sin R$ ... ... (ii)

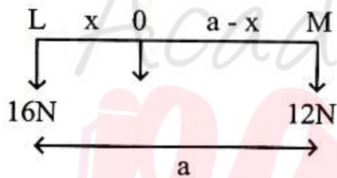
(ii) ÷ (i), $\tan\theta = \cot Q = \tan\left(\frac{\pi}{2} - Q\right)$

$\theta = \frac{\pi}{2} - Q = \frac{1}{2}(P + Q + R) - Q = \frac{1}{2}(P + R - Q)$

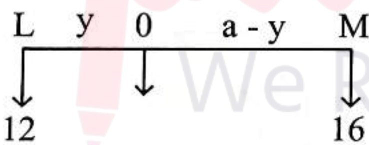


∴ অপর অংশ, $P - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$ **(Showed)**

গ. $16x = 12(a - x) \Rightarrow 16x = 12a - 12x \Rightarrow 28x = 12a$ ∴ $x = \frac{3}{7}a$

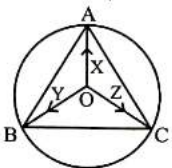


আবার,



$12y = 16a - 16y$ ∴ $y = \frac{4}{7}a$ ∴ সরণ $= y - x = \frac{1}{7}a$

32. **O** হলো বৃত্তটির কেন্দ্র। **[SB'19]**



(ক) **S** মানের দুইটি সমান বল পরস্পর **120°** কোণে ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর। 2

(খ) **X, Y, Z** বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, **X : Y : Z = a cos A : b cos B : c cos C** 4

(গ) যদি **X, Y, Z** মানের বলত্রয় যথাক্রমে **A, B, C** বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি **O** বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে, **X cosec 2A = Y cosec 2B = Z cosec 2C.** 4

সমাধান

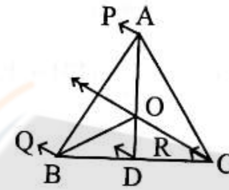
ক. $R = \sqrt{S^2 + S^2 + 2.S.S.\cos 120°} = \sqrt{2S^2 - S^2}$ $\therefore R = S$

খ. $\angle BOC = 2\angle A$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

অনুরূপে $\angle AOC = 2\angle B$; $\angle AOB = 2\angle C$; এখন, $\frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C} \Rightarrow \frac{X}{2\sin A\cos A} = \frac{Y}{2\sin B\cos B} = \frac{Z}{2\sin C\cos C}$

$\Rightarrow \frac{X}{\frac{a}{2R}\times\cos A} = \frac{Y}{\frac{b}{2R}\times\cos B} = \frac{Z}{\frac{c}{2R}\times\cos C}$ $\therefore X:Y:Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$ **(Showed)**

গ. মনে করি ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং বর্ধিত AO রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, B ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Q ও R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি, (Q + R), BC রেখাস্থ কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। অতএব (Q + R) বলটি BC ও AD এর ছেদবিন্দু D তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore Q \times BD = R \times CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ ……… (i)

এখন, ΔBOD-এ, $\frac{BD}{\sin BOD} = \frac{OB}{\sin ODB}$ ………… (ii)

এবং ΔCOD-এ, $\frac{CD}{\sin COD} = \frac{OC}{\sin ODC} = \frac{OB}{\sin(\pi - \angle ODB)}$ [$\because OC = OB$]

$\therefore \frac{CD}{\sin COD} = \frac{OB}{\sin ODB}$ ………… (iii)

(ii) ও (iii) হতে, $\frac{CD}{\sin COD} = \frac{BD}{\sin BOD} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{\sin COD}{\sin BOD}$ ……. (iv)

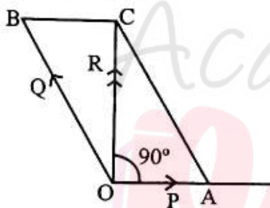
(i) ও (iv) হতে, $\frac{Q}{R} = \frac{\sin COD}{\sin BOD} = \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)} = \frac{\sin AOC}{\sin AOB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

$\therefore \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ [তদ্রুপ, $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{R}{\sin 2C}$] $\therefore \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$

এখন, P, Q ও R এর স্থলে X, Y ও Z বসাই,

$\therefore \frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C}$ $\therefore X \operatorname{cosec} 2A = Y \operatorname{cosec} 2B = Z \operatorname{cosec} 2C$ **(Showed)**

33. দৃশ্যকল্প-১: **[BB'19]**



দৃশ্যকল্প-২: P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের সাথে একই সদৃশ সমান্তরাল বলের সাথে একই সমতলে r দূরত্বে X মানের দুটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত।

(ক) লামির সূত্রটি বর্ণনা কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে যদি $R = \frac{2}{3}Q$ হয় তবে, P ও Q বলের অনুপাত নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, এদের লব্ধি $\frac{rX}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। 4

সমাধান

ক. লামির সূত্রানুসারে, একই বিন্দুতে আলাদা রেখা বরাবর কার্যরত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রতিটি বলের মান অপর বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের sine অনুপাতের সমান হবে। $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

খ. প্রশ্নানুসারে, $R = \frac{2}{3}Q$; এখন, x অক্ষে উপাংশ নিলে, $P + Q\cos\alpha = 0$ ……… (i)

y অক্ষে উপাংশ নিলে, $P\sin 0 + Q\sin\alpha = R \Rightarrow Q\sin\alpha = \frac{2}{3}Q \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$ [(−) হবে কেননা স্থূলকোণ]

(i) নং হতে, $P + Q.\frac{-\sqrt{5}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{P}{Q} = +\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\therefore P:Q = \sqrt{5}:3$

গ. মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে, P, Q-এর লব্ধি $(P+Q)$, C বিন্দুগামী। E ও F বিন্দুদ্বয়ে X, X মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে যেখানে $EF = r$.

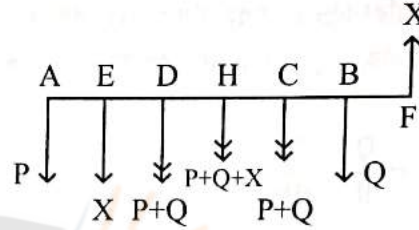
ধরি, C ও E তে কার্যরত বলদ্বয়ের লব্ধি $(P+Q+X)$, H বিন্দুগামী,

অতএব, $(P+Q)\times CH = X \times EH \Rightarrow CH = \frac{X}{P+Q}EH$ ……… (i)

আবার ধরি, H ও F বিন্দুতে কার্যরত বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি $(P+Q+X) - X = (P+Q)$, D বিন্দুগামী।

$\therefore (P+Q+X)\times DH = X \times DF$

$\Rightarrow \frac{DF}{P+Q+X} = \frac{DH}{S} = \frac{DF-DH}{P+Q+X-X} = \frac{FH}{P+Q}$



$\Rightarrow DH = \frac{X}{P+Q}FH$ ……….. (ii)

(ii) ÷ (i) $\Rightarrow DH + CH = \frac{X}{P+Q}(FH+EH)$

$\Rightarrow CD = \frac{X}{P+Q}EF = \frac{rX}{P+Q}$; যেখানে লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু C থেকে D বিন্দুতে সরে গেছে। **(Showed)**

34. P ও Q দুইটি বল যেখানে P > Q. **[JB'19]**

(ক) যদি **P, Q, R** বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে **P, Q** এবং **R, P** এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। **2**

(খ) যদি উদ্দীপকে উল্লিখিত বলগুলোসমবিন্দুগামী হয় এবং উহাদের লব্ধি অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করে তবে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ ও লব্ধি নির্ণয় কর। **4**

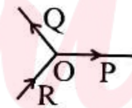
(গ) যদি উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে **F** ও **G** হয় এবং উহারা পরস্পর একটি বিন্দুতে **α** কোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে বল দুইটির লব্ধিকে **F, G** ও $\frac{\alpha}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। **4**

সমাধান

ক. $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$

যেহেতু, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos P\hat{}Q$

$\Rightarrow \cos P\hat{}Q = \frac{R^2-P^2-Q^2}{2PQ} = \frac{2P^2-P^2-P^2}{2P^2} = 0 \therefore P\hat{}Q = \frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**



একইভাবে, $\cos R\hat{}P = \frac{Q^2-P^2-R^2}{2PR} = \frac{Q^2-Q^2-2Q^2}{2.Q.\sqrt{2}Q} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore R\hat{}P = \frac{3\pi}{4}$

খ. লামির উপপাদ্য হতে $\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{P}{2\cos\alpha} = Q = \frac{R}{3-4\sin^2\alpha}$

অর্থ্যাৎ, $Q = \frac{P}{2\cos} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right) \therefore$ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $3\alpha = 3\cos^{-1}(\frac{P}{2Q})$

আবার, $R\cos\alpha = P\cos 0 + Q\cos 3\alpha = P + Q\cos 3\alpha$ ……… (i)

এবং $R\sin\alpha = R\sin 0 + Q\sin 3\alpha = Q\sin 3\alpha$ ……… (ii)

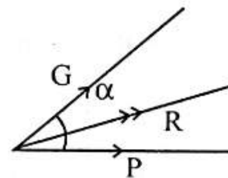
$\therefore R^2 = P^2 + Q^2\cos^2 3\alpha + 2PQ\cos 3\alpha + Q^2\sin^2 3\alpha = P^2 + Q^2 + 2PQ(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ\left\{4.\left(\frac{P}{2Q}\right)^3 - 3.\frac{P}{2Q}\right\} = P^2 + Q^2 + P^2.\frac{P^2-3Q^2}{Q^2} = \frac{P^4+Q^4-2P^2Q^2}{Q^2} \therefore R = \frac{P^2-Q^2}{Q}$

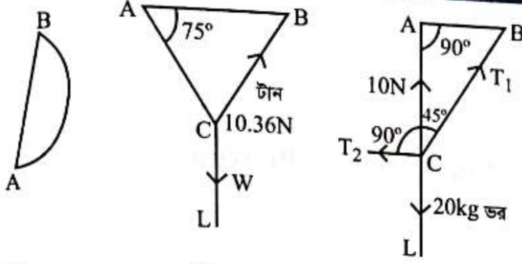
গ. $F = P + Q; G = P - Q \therefore$ লব্ধি R হলে $R^2 = F^2 + G^2 + 2FG\cos\alpha$

$= F^2 + G^2 + 2FG\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$

$= (F-G)^2 + 4FG\cos^2\frac{\alpha}{2}$



$\therefore$ লব্ধি, $R = \left((F-G)^2 + 4FG\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

35. 

[CB'19]

চিত্র-১ চিত্র-২ চিত্র-৩

প্রতিটি চিত্রে **A** ও **B** বিন্দুতে হাল্কা মসৃণ দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে।

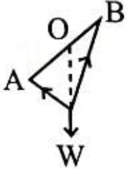
(ক) ১নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভেতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে সেটি কোথায় কীভাবে ঝুলবে চিত্র অঙ্কনপূর্বক দেখাও। 2

(খ) ২নং চিত্রের ক্ষেত্রে **W** ওজন সাম্যাবস্থায় থাকলে **W** এর মান কত নিউটন নির্ণয় কর। 4

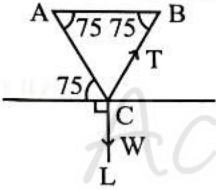
(গ) ৩নং চিত্রে **C** বিন্দুতে **20 kg** ভরকে সাম্যাবস্থায় ঝুলানোর জন্য T_1 এবং T_2 এর মান কত হওয়া প্রয়োজন তা নিউটন এককে নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. O বরাবর নিচে লম্বভাবে ক্রিয়া করবে, O, BA এর মধ্যবিন্দু।

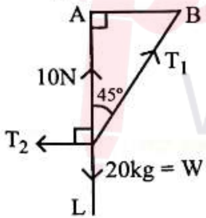


খ. $\frac{T}{\sin\angle ACL} = \frac{W}{\sin\angle ACB} \Rightarrow \frac{T}{\sin 165} = \frac{W}{\sin 30} \therefore W = 10.36 . \frac{\frac{1}{2}}{\sin 165} = 20.014\text{N}$



গ. $\frac{T_1}{\sin 90°} = \frac{T_2}{\sin(180-45)} = \frac{W-1}{\sin(90+\quad)} \Rightarrow \frac{T_1}{1} = \frac{T_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{186}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\therefore T_2 = 186\text{N},\ T_1 = \sqrt{2}T_2 = 263.044\text{N}$



36. দৃশ্যকল্প-১: Q R α P , Q > P [Din.B'19]

দৃশ্যকল্প-২: 17 সে.মি. দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় 13 সে.মি. দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সে.মি. দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো।

(ক) **P** ও **Q** বলদ্বয় সমান হলে, **R** বল **α** কে সমদ্বিখণ্ডিত করে-প্রমাণ কর। 2

(খ) **R = 15 N** এবং **P** ও **Q** বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি **25 N** হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী সুতাটির প্রত্যেক অংকের টান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, লব্ধি R এর সাথে P বল θ কোণ তৈরি করে।

$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Qc}$; P = Q হলে $\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1+\cos} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$ **[Proved]**

খ. প্রশ্নমতে, $P + Q = 25N$ ……… (i)

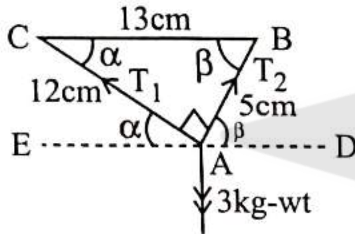
আবার, $\tan 90° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\text{co}} \Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow Q\cos\alpha = -P$

আবার, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2P(-P) = Q^2 - P^2 = (Q - P)(Q + P)$

$\Rightarrow Q - P = \frac{15^2}{25} = 9N$ ……… (ii)

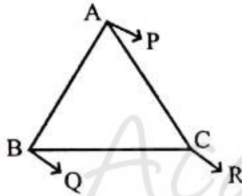
(i) + (ii) $\Rightarrow Q = 17N \therefore P = 8N$

গ.



লামির উপপাদ্য হতে $\frac{T_1}{\sin(90+\beta)} = \frac{T_2}{\sin(90+\alpha)} = \frac{3}{\sin 90°} \therefore T_1 = 3\cos\beta = 3.\frac{5}{13} = \frac{15}{13}$ kg − wt **(Ans.)**

এবং $T_2 = 3\cos\alpha = 3.\frac{12}{13} = \frac{36}{13}$ kg − wt **(Ans.)**

37. 

[All.B'18]

P, Q, R বলত্রয় সমমুখী সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত।

(ক) 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধি কত? 2

(খ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে, দেখাও যে, P: Q: R = sinA: sinB: sinC.. 4

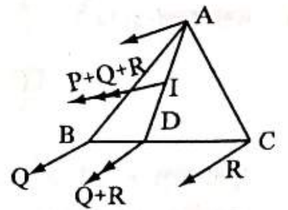
(গ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর ভরকেন্দ্রগামী হলে P, Q এবং R বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, সমান বল F ∴ লব্ধির মান $= \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2\cos 60°} = \sqrt{3}F = \sqrt{3} \times$ (যে কোন একটি বলের মান)

∴ দিক যে কোন একটি বলের সাথে $\frac{60°}{2} = 30°$ কোণে।

খ. ধরি, অন্তঃ কেন্দ্র I. AI যোগ করে বর্ধিত করি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং Q ও R এর লব্ধি (Q+ R), D বিন্দুতে ক্রিয়া করতে বাধ্য।



$\therefore Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

[ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখন্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে]

$\therefore Q: R = b: c$

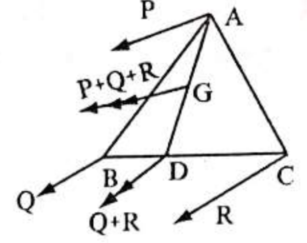
অনুরূপভাবে $P: Q = a: b$

$\therefore P: Q: R = a: b: c; \Rightarrow P: Q: R = 2R\sin A : 2R\sin B: 2R\sin C \left[\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right]$

$\therefore P: Q: R = \sin A : \sin B: \sin C$ **[Showed]**

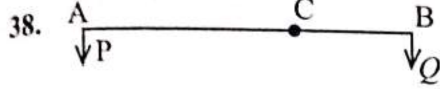
গ. ধরি, ভরকেন্দ্র G। AG কে বর্ধিত করলে তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এই Q ও R এর লব্ধি Q + R, D

বিন্দুতে ক্রিয়া করতে বাধ্য



$\therefore Q.BD = R.CD \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ [$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = 1 \therefore Q = R$; অনুরূপভাবে, $P = Q \therefore P = Q = R$ (**Ans.**)

38. 

[DB'17]

(ক) **100N ও 70N মানের দুইটি বলের লব্ধি কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 62° হলে বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।** 2

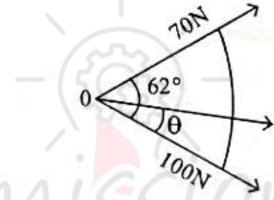
(খ) **P কে (R + 3) পরিমাণে এবং Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, $R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$** 4

(গ) **উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের সমতলে x দূরত্বের ব্যবধানে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলো। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।** 4

সমাধান

ক. লব্ধির মান $= \sqrt{(100)^2 + (70)^2 + 2.100.70 \cos 62°}$

$= 146.54$ N (প্রায়)



এবং লব্ধির দিক, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{70 \sin 62°}{100+70\cos 62°}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{61.80}{132.86}\right)$

$\Rightarrow 24.95°$ (প্রায়)

খ. মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q এর লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

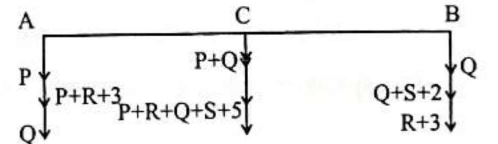
সুতরাং আমরা পাই, $P.AC = Q.BC$ ……… (i)

প্রদত্ত বলদ্বয়কে যথাক্রমে (R + 3) ও (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের মান হয়। (P + R + 3) ও (Q + S + 2) এবং এদের লব্ধিও C বিন্দুগামী হয়।

সুতরাং আমরা পাই, $(P + R + 3)AC = (Q + S + 2)BC$ …………… (ii)

আবার, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়কে যথাক্রমে Q ও (R + 3) দ্বারা প্রতিস্থাপন করলেও লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং আমরা পাই, $Q.AC = (R + 3).BC$ ……………… (iii)



সমীকরণ (i) ÷ (iii) হতে পাই $\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R+3} \Rightarrow \frac{P}{Q}$

$= \frac{Q}{R+3} = \frac{(P-Q)}{Q-R-3}$ ……………… (iv)

আবার, (ii) − (i) $\Rightarrow (R + 3)AC = (S + 2)BC$ ……………………… (v)

আবার, (iii) ÷ (v) $\Rightarrow \frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2} \Rightarrow \frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2} = \frac{Q-R-3}{R-S+1}$ ……………… (vi)

(iv) ও (vi) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\frac{P-Q}{Q-R-3} = \frac{Q-R-3}{R-s+1} \Rightarrow R - s + 1 = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} \Rightarrow R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$ (প্রমাণিত)।

গ. প্রদত্ত P ও Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $P + Q$, AB রেখার উপর C বিন্দুতে বলদ্বয়ের সমান্তরালে কার্যরত। মনে করি, AB রেখার মধ্যবর্তী অংশে $EM = x$ দূরত্বে E ও M বিন্দুতে সমমানের বিসদৃশ সমান্তরাল বল R ও R যোগ কার হল।

এখন, E ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সদৃশ সমান্তরাল R ও $(P + Q)$ বলদ্বয়ের লব্ধি $(P + Q + R)$, D বিন্দুতে ক্রিয়া করে। সুতরাং আমরা পাই, $R.ED = (P + Q)CD \Rightarrow \frac{CD}{R} = \frac{ED}{P+Q} \Rightarrow \frac{CD}{R} = \frac{ED}{P+Q} = \frac{CD+ED}{P+Q+R}$

$\Rightarrow \frac{CD}{R} = \frac{EC}{P+Q+R} \Rightarrow CD = \frac{R.EC}{P+Q+R}$ ……… (i)

এখন D ও M বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বিসদৃশ, অসমান ও সমান্তরাল বল যথাক্রমে $(P + Q + R)$ ও $R[P + Q + R > R]$ এর লব্ধি বল $(P + Q + R - R)$ বা $(P + Q)$, MD বরাবর, N বিন্দুতে বৃহত্তম বলের ক্রিয়ারেখার বাহিরে ক্রিয়া করে। কাজেই আমরা পাই, $(P + Q + R)DN = R.MN \Rightarrow DN = \frac{R.MN}{P+Q+R}$ ……… (ii)

এখন,(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $CD + DN = \frac{R.EC}{P+Q+R} + \frac{R.MN}{P+Q+R} \Rightarrow CN = \frac{R(EC+MN)}{P+Q+R}$

$\Rightarrow CN(P + Q + R) = R(CN + EN + MN) \quad \Rightarrow CN(P + Q + R) = R(CN + EM)$

$\Rightarrow CN(P + Q) = xR \Rightarrow CN = \frac{xR}{P+Q}$ অর্থাৎ, $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্ব সারে যাবে। **(Proved)**

39. **[RB'17]**

দৃশ্যকল্প-১: দৃশ্যকল্প-২:

LD, ME ও NF যথাক্রমে MN, NLও LM এর উপর লম্ব।

(ক) বলের অংশক ও লব্ধি ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে কোন বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে? যদি বলদ্বয়ের লব্ধি P বলের $\frac{\sqrt{5}}{2}$ গুণ হয় তবে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ ও লব্ধির দিক নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত বলগুলির লব্ধি শূন্য হলে প্রমাণ কর যে, $W_1 = W_2 = W_3$ যখন $l = m = n$. 4

সমাধান

ক. কোন বস্তুকণার উপর একই সময়ে একাধিক বল কার্যরত হলে, এদের সম্মিলিত ক্রিয়াফল, যদি বস্তুকণার উপর নির্দিষ্ট দিকে একটি মাত্র বলের ক্রিয়াফলের সমান হয়, তবে ঐ একটিমাত্র বলকে উপরিউক্ত একাধিক বলের লব্ধি বলে এবং একাধিক বলের প্রত্যেকটিকে লব্ধি বলের অংশক বা উপাংশ বলে। চিত্রে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বল দুইটির সম্মিলিত ক্রিয়াফল একটি মাত্র $\vec{R}$ বলের ক্রিয়াফলের সমান হলে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি হলো $\vec{R}$ এবং $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ হলো $\vec{R}$ এর অংশক বা উপাংশ। ভেক্টর সংকেতে লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

খ. দৃশ্যকল্প-১: এ $\frac{1}{2}\vec{P}$ বলকে AC বাহু বরাবর স্থানান্তর করা যাবে যেহেতু OACB একটি সামান্তরিক।

প্রশ্নমতে, লব্ধির মান, $= \frac{\sqrt{5}P}{2}$ ∴ P ও $\frac{1}{2}$P বল দুইটি লব্ধি $= \frac{\sqrt{5}P}{2}$; $\left(\frac{\sqrt{5}P}{2}\right)^2 = P^2 + \left(\frac{1}{2}P\right)^2 + 2.P.\frac{1}{2}.P\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{5P^2}{4} = P^2 + \frac{P^2}{4} + P^2\cos\alpha \Rightarrow P^2\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \therefore \alpha = 90°$

∴ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = 90°$; $\tan\theta = \frac{\frac{P}{2}\sin\alpha}{P+\frac{P}{2}\cos\alpha} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{P}{2}\sin 90°}{P+\frac{P}{2}\cos 90°} = \frac{\frac{P}{2}}{P+0} = \frac{P}{2}\times\frac{1}{P}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.56°$ ∴ লব্ধি P বলের সাথে 26.56° কোণ উৎপন্ন করে।

গ. LMN ত্রিভুজের L, M, N কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত তিনটি বল W_1, W_2, W_3 এর লব্ধি শূন্য।

লামির সূত্র থেকে পাই, $\frac{W_1}{\sin FIE} = \frac{W_2}{\sin DIF} = \frac{W_3}{\sin EID} \Rightarrow \frac{W_1}{\sin(\pi-L)} = \frac{W_2}{\sin(\pi-M)} = \frac{W_3}{\sin(\pi-N)}$

$\Rightarrow \frac{W_1}{\sin L} = \frac{W_2}{\sin M} = \frac{W_3}{\sin N}$ ……………… (i)

আবার, ΔMNL হতে ত্রিভুজের সাইন সূত্র থেকে পাই, $\frac{l}{\sin L} = \frac{m}{\sin M} = \frac{n}{\sin N}$ ……………… (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{W_1}{l} = \frac{W_2}{m} = \frac{W_3}{n}$

আবার, দেওয়া আছে, $l = m = n \therefore W_1 = W_2 = W_3$ (প্রমাণিত)

40. দৃশ্যকল্প-১: ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 5, 7, 9 একক মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত।
দৃশ্যকল্প-২: 8 মিটার দীর্ঘ 12kg ওজনের একটি সুষম তক্তা দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি খুঁটি A প্রান্ত এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 1 মিটার ভিতরে অবস্থিত। **[Ctg.B'17]**

(ক) 8N ও 5N মানের দুইটি বল 60° কোণে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলত্রয়ের লব্ধি নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে একজন বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌছালে বালকের ওজন কত? 4

সমাধান

ক. 22 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. মনি করি, সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর BC, CA, ও AC বাহুর সমান্তরালে ক্রিয়ারত যথাক্রমে 5,7 ও 9 একক মানের বল তিনটির লব্ধি R বল 5 একক মানের বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

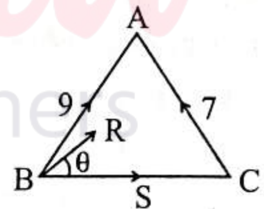
এখন 5 একক মানের বল বরাবর এবং এর উপর লম্বরেখা বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = 5\cos 0° + 7\cos(180° - 60°) + 9\cos(180 + 60) = 5 - 7\cos 60° - 9\cos 60°$

$R\cos\theta = -3$ ……………… (i)

এবং $R\sin\theta = 5\sin 0° + 7\sin(180° - 60°) + 9\sin(180° + 60°)$

$= 7\sin 60° - 9\sin 60° = 7.\frac{\sqrt{3}}{2} - 9.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ ……………… (ii)



এখন, $(i)^2 + (ii)^2$ থেকে পাই, $R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (-3)^2 + (-\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow R^2 = 9 + 3 \Rightarrow R^2 = 12 \therefore R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

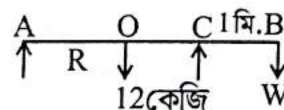
∴ নির্ণেয় লব্ধি, $R = 2\sqrt{3}$ একক।

গ. মনে করি, 12 কেজি ওজনের AB সমরূপ তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে ক্রিয়া করে। একটি অবলম্বন A বিন্দুতে এবং অপর অবলম্বন B বিন্দু থেকে 1 মিটার ভিতরে C বিন্দুতে অবস্থিত।

∴ AB = 8 মিটার $AO = BO = \frac{8}{2} = 4$ মিটার।

BC = 1 মিটার

OC = OB = BC = 4 − 1 = 3 মিটার।

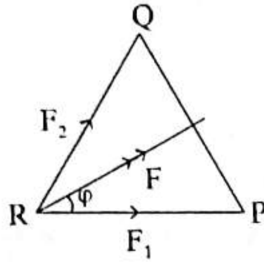


ধরি, বালকটির ওজন W যা B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। যেহেতু বালকটি তক্তাটিকে না উল্টিয়ে B বিন্দুতে পৌছাতে সক্ষম। তক্তাটি সুস্থিত থাকবে যদি ১২ কেজি ও W ওজনদ্বয়ে লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

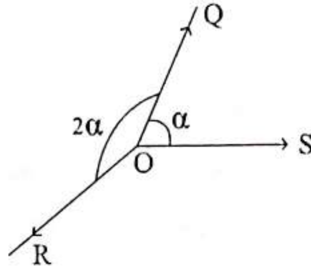
∴ 12.OC − W.BC ⇒ 12 × 3 = W.1 = 36 কেজি। ∴ বালকটির ওজন 36 কেজি।

41. [SB'17]

দৃশ্যকল্প-১



দৃশ্যকল্প-২



(ক) বলের লম্বাংশ কী ব্যাখ্যা কর 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $F_1 \propto \cos P, F_2 \propto \cos Q$ এবং F_1, F_2 এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \varphi = \frac{1}{2}(R + Q - P)$ 4

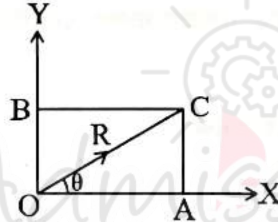
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ Q, R, S বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $S^2 = R(R - Q)$. 4

সমাধান

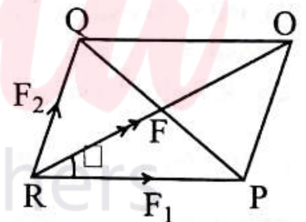
ক. একটি প্রদত্ত বলকে এর উভয় পার্শ্বে α, β দুইটি নির্দিষ্ট কোণে আনত রেখা বরাবর দুইটি অংশক বলে বিভাজন করা যায়। α ও β এর মান পরিবর্তন করে প্রত্যেকবার এক জোড়া অংশক বল নির্ণয় করা যায়, যখন $(\alpha + \beta) < 180°$. যদি $(\alpha + \beta) = 90°$ হয়, অর্থাৎ অংশক বল দুইটি যখন পরস্পর লম্ব হয় তখন ঐ অংশদ্বয়কে বলের লম্বাংশ বলে।

সুতরাং লম্বাংশ হল অংশকের একটি বিশেষ অবস্থা অর্থাৎ সকল লম্বাংশই অংশক কিন্তু সকল অংশক লম্বাংশ নয়।

মনে করি, পরস্পর লম্বরেখা OX ও OY বরাবর প্রদত্ত বল R এর লম্বাংশ নির্ণয় করতে হবে। বলটিকে R রেখাংশ দ্বারা সূচিত করি। OC রেখা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখন θ থেকে CA ⊥ OX ও CB ⊥ OY অঙ্কন করি। তাহলে OACB একটি আয়ত এবং OA ও OB হল R বলের লম্বাংশ।



খ. দৃশ্যকল্প-১ এ OPRQ সামান্তরিকটি পূর্ণ করি।



ধরি, $F_1 = K\cos P \Rightarrow F_2 = K\cos Q$

F_1 ও F_2 এর মধ্যবর্তীকোণ R এবং লব্ধি F

$\therefore F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos R = K^2\cos^2 P + K^2\cos^2 Q + 2k\cos P.\, K\cos Q.\cos R.$

$= K^2(\cos^2 P + \cos^2 Q + \cos^2 R + 2\cos P.\cos Q.\cos R - \cos^2 R)$

$= K^2(1 - \cos^2 R)$[∵ $P + Q + R = \pi$ হলে,

$\cos^2 P + \cos^2 Q + \cos^2 R + 2\cos P.\cos Q.\cos R = 1$]

$= K^2\sin^2 R \quad \therefore F = K\sin R$

এখন $\tan\varphi = \frac{F_2\sin R}{F_1 + F_2\cos R} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{K\cos Q.\sin R}{K\cos P + K\cos Q\cos R} = \frac{\cos Q.\sin R}{\cos\{180° - (Q+R)\} + \cos Q.\cos R}$

[দৃশ্যকল্প 1 এ $P + Q + R = 180°$]

$= \frac{\cos Q.\sin R}{-\cos(Q+R) + \cos Q.\cos R} = \frac{\cos Q.\sin R}{-\text{co}\quad.\cos R + \sin Q\sin R + \cos Q.\cos R} = \frac{\cos Q.\sin R}{\sin Q.\sin R}$

$\therefore \tan\varphi = \cot Q = \tan\left(\frac{\pi}{2} - Q\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - Q \Rightarrow \varphi = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2} + \frac{R}{2} - Q \;\therefore\; \varphi = \frac{P}{2} + \frac{R}{2} - \frac{Q}{2}$

$\therefore R - \varphi = R - \left(\frac{P}{2} + \frac{R}{2} - \frac{Q}{2}\right) = R - \frac{P}{2} - \frac{R}{2} + \frac{Q}{2} = \frac{R}{2} + \frac{Q}{2} - \frac{P}{2} = \frac{1}{2}(R + Q - P)$ (দেখানো হল)।

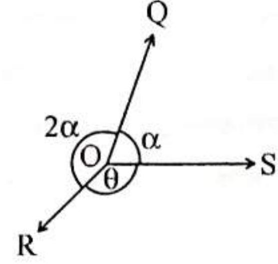
গ. $\angle QOS = \alpha \Rightarrow \angle QOR = 2\alpha \Rightarrow \angle ROS = \theta$ যেহেতু Q, R, S বলত্রয় O বিন্দুতে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে, সেহেতু লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{Q}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin2\alpha} \Rightarrow \frac{Q}{\sin(2\pi-3\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{Q}{-(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha(4\sin^2\alpha-3)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{2\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow \frac{Q}{4\sin^2\alpha-3} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{Q}{4-4\cos^2\alpha-3} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{Q}{1-4\cos^2\alpha} = \frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha}$ ……………………(i)



(i) হতে পাই, $\frac{R}{1} = \frac{S}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{S}{2R}$ ……(ii)

এবং $\frac{Q}{1-4\cos^2\alpha} = \frac{R}{1} \Rightarrow 1-4\cos^2\alpha = \frac{Q}{R} \Rightarrow 1-4\left(\frac{S}{2R}\right)^2 = \frac{Q}{R} \Rightarrow 1-4.\frac{S^2}{4R^2} = \frac{Q}{R} \Rightarrow 1-\frac{S^2}{R^2} = \frac{Q}{R} \Rightarrow \frac{R^2-S^2}{R^2} = \frac{Q}{R}$

$\Rightarrow \frac{R^2-S^2}{R} = Q \Rightarrow R^2-S^2 = RQ \Rightarrow S^2 = R^2-RQ \therefore S^2 = R(R-Q)$ (দেখানো হল)

42. দৃশ্যকল্প-১: কোনো বিন্দুতে P এবং 3P দুইটি বল ক্রিয়াশীল। **[BB'17]**

দৃশ্যকল্প-২: P_1 এবং P_2 দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে **A** ও **B** বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

(ক) একটি বিন্দুর উপর ক্রিয়ারত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে এবং শেষ বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ **45°** হলে বল তিনটির মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ, প্রথমটিকে চারগুণ ও দ্বিতীয়টির মান **18** একক বৃদ্ধি করলে উভয়ক্ষেত্রে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। **P** এর মান নির্ণয় কর। **4**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ, $P_2 = 8$, $P_2 = 6$ হলে এবং বল দুইটির প্রত্যেককে **2** একক পরিমাণে বৃদ্ধি করলে লব্ধির সরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. মনে করি, কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল R, P, Q; P, Q এর মধ্যবর্তী কোণ 45°। বল তিনটি সাম্যবস্থায় থাকলে R হবে P ও Q বলেরর লব্ধির সমান এবং এর দিক হবে P ও Q বলের লব্ধির বিপরীত দিক।

$\therefore R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos45° \Rightarrow R^2 = P^2+Q^2+2PQ.\frac{1}{\sqrt{2}} \therefore R^2 = P^2+Q^2+\sqrt{2}PQ$ ইহা নির্ণেয় সম্পর্ক।

খ. মনে করি, P এবং 3P বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\theta = \frac{3P\sin}{P+3P\cos\alpha}$; আবার, বলদ্বয় 4P এবং 3P + 18 হলে $\tan\theta = \frac{(3P+18)\sin\alpha}{4P+(3P+18)\cos\alpha}$

শর্তমতে, $\frac{3P\sin\alpha}{P+3\cos\alpha} = \frac{(3P+18)\sin\alpha}{4P+18\cos\alpha+3P\cos\alpha} \Rightarrow \frac{4P+18\cos\alpha+3}{P+3p\cos\alpha} = \frac{3P+18}{3P}$

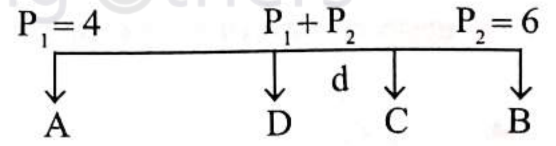
$\Rightarrow \frac{4P+18\cos\alpha+3P\cos\alpha-P-3P\cos}{P+3P\cos\alpha} = \frac{3P+18-3P}{3P}$ [বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{3P+18\cos\alpha}{P+3P\cos\alpha} = \frac{18}{3P} \Rightarrow \frac{3P+18\cos\alpha}{P(1+3\cos\alpha)} = \frac{18}{3P} \Rightarrow \frac{3P+18\cos\alpha}{1+3\cos} = 6 \Rightarrow 3P+18\cos\alpha = 6+18\cos\alpha \Rightarrow 3p = 6 \therefore P = 2$

গ. A বিন্দুতে $P_1 = 4$ একক B বিন্দুতে $P_2 = 6$ একক বল ক্রিয়া করছে।

ধরি, তাদের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত যার মান $P_1 + P_2$

$\therefore P_1AC = P_2BC \Rightarrow 4AC = 6BC \therefore 2AC = 3BC$ ……………………(i)



আবার, P_1 ও P_2 বলদ্বয়ের সাথে 2 একক বল যোগ করা হলে নতুন বলদ্বয় হবে, 6 একক ও 8 একক|

ধরি, এর ফলে বল দুইটির লব্ধি C বিন্দু হতে d দূরত্ব D বিন্দুতে সরে যায়।

$\therefore CD = d \therefore 6AD = 8BD \Rightarrow 6(AC-CD) = 8(BC+CD) \Rightarrow 6(AC-d) = 8(BC+d)$

$\Rightarrow 6AC-6d = 8BC+8d \Rightarrow 6AC-8BC = 8d+6d \Rightarrow 3.2AC-8BC = 14d$

$\Rightarrow 3.3CB-8BC = 14d$ [(i) নং হতে পাই] $\Rightarrow 9BC-8BC = 14d \Rightarrow BC = 14d \therefore d = \frac{BC}{14}$ ………………(ii)

আবার, (i) হতে পাই, $2AC = 3BC \Rightarrow 2(AB-BC) = 3BC \Rightarrow 2AB-2BC = 3BC \Rightarrow 2AB = 5BC \therefore BC = \frac{2}{5}AB$

এই মান (ii) এ বসিয়ে পাই, $d = \frac{BC}{14} = \frac{1}{14}\times\frac{2}{5}AB = \frac{AB}{35} = \frac{\text{বলদ্বয়রে মধ্যর্বতী দূরত্ব}}{35}$

$\therefore$ লব্ধির সরণ $= \frac{\text{বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব}}{35}$

43. **দৃশ্যকল্প-১: L, M, N মানের সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25, 60, 65 সে.মি। L ও M মানের বলদ্বয়ের সমষ্টি 51 গ্রাম ওজন।** **[JB'17]**

দৃশ্যকল্প-২: 20 সে.মি. ব্যবধানে একটি সুষম হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে 8N ও 4N মানের বিপরীতমুখী দুইটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে।

(ক) **4N ও $2\sqrt{3}$N মানের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়া করে। 4N মানের বল বরাবর বলদ্বয়ের লম্বাংশের সমষ্টি নির্ণয় কর।** 2

(খ) **দৃশ্যকল্প-১ হতে বলগুলির মান নির্ণয় কর।** 4

(গ) **দৃশ্যকল্প-২ প্রত্যেক বলের মান 4N করে বৃদ্ধি করা হলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরত্বে সরে যাবে?** 4

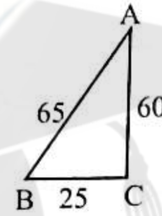
সমাধান

ক. 4N মানের বল বরাবর $2\sqrt{3}$N বলের লম্বাংশ, $F_1 = 2\sqrt{3}\cos 30° = 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3N$

$\therefore$ 4N মানের বল বরাবর লম্বাংশের সমষ্টি $= 4N + 3N = 7N$

খ. দেওয়া আছে, BC = 25 সে.মি. ; CA = 60 সে.মি. ; AB = 65 সে.মি.

$\therefore \Delta ABC$ এর $\angle C = 90°$



যেহেতু বলগুলো সুস্থিত এবং ΔABC এর বাহুগুলোর সমান্তরাল কাজেই,

$\frac{L}{BC} = \frac{M}{CA} = \frac{N}{AB} \Rightarrow \frac{L}{25} = \frac{M}{60} = \frac{N}{65} \Rightarrow \frac{L}{5} = \frac{M}{12} = \frac{N}{13}$

$\Rightarrow \frac{L}{5} = \frac{M}{12} \Rightarrow 12L = 5M \therefore M = \frac{12}{5}L$ ……………… (i)

আবার, $\frac{M}{12} = \frac{N}{13} \Rightarrow 13M = 12N \Rightarrow \frac{13.12}{5}L = 12N$ [(i) হতে]

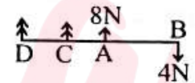
$L = \left(\frac{5\times12}{13\times12}\right)N \therefore L = \frac{5}{13}N$ ………………………….(ii)

$\therefore \frac{L+M}{5+12} = \frac{N}{13} \Rightarrow \frac{51}{17} = \frac{N}{13} \Rightarrow N = 39$; এখন N এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই, $L = \frac{5}{13}\times 49 \therefore L = 15$

L এর মান (i) এ বসিয়ে পাই $M = \frac{12}{5}\times 15 \therefore M = 36 \therefore L = 15$ গ্রাম ওজন, M = 36 গ্রাম ওজন এবং N = 39 গ্রাম ওজন।

গ. মনে করি, একটি 20 সে.মি. সুষম হালকা দন্ডের A ও B প্রান্তে 8N ও 4N মানের বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করা হলো।

$\therefore 8\times AC = 4\times BC \Rightarrow 2AC = 1BC \Rightarrow \frac{AC}{1} = \frac{BC}{2} = \frac{BC-AC}{2-1} = AB = 20$ সে.মি.



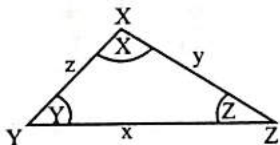
$\Rightarrow AC = 20$ সে.মি. এবং $BC = 20\times 2 = 40$ সে.মি.

শর্তমতে, উভয় বলের সাথে 4N বল বৃদ্ধি করা হলো এবং (8 + 4) বা 12N এবং (4 + 4) বা 8N বল দুটির লব্ধি D বিন্দুগামী।

$\therefore 12\times AD = 8\times BD \Rightarrow \frac{AD}{8} = \frac{BD}{12} = \frac{BD-AD}{12-8} = \frac{AB}{4} = \frac{20}{4} = 5 \therefore AD = 8\times 5 = 40$

$\Rightarrow AC + CD = 8\times 5 \Rightarrow 20 + CD = 40 \Rightarrow CD = 40 - 20 \therefore CD = 20$ সে.মি.

প্রত্যেক বলের মান 4N করে বৃদ্ধি করা হলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 20 সে.মি. দূরত্ব সরে যাবে।

44. 

[CB'17]

P, Q, R বলত্রয় ΔXYZ এর লম্ব কেন্দ্র হতে যথাক্রমে YZ, ZX ও XY বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় থাকে। আবার বলত্রয় যথাক্রমে X, Y , Z বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্ত:কেন্দ্রে ক্রিয়া করে।

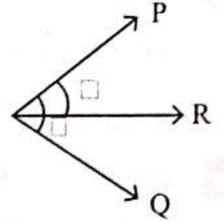
(ক) **"দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে"- উক্তিটির সত্যতা যাচাই কর।** 2

(খ) **উদ্দীপকের বলত্রয়ের সাম্যাবস্থায় থাকার ক্ষেত্রে প্রমা-। কর যে, P: Q: R = x: y: z** 4

(গ) **উদ্দীপকের বলত্রয় সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, P: Q: R = x: y: z** 4

সমাধান

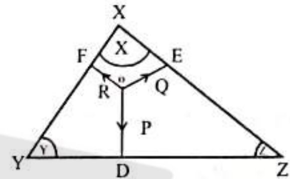
ক. ধরি, পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত দুইটি বল $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি $\vec{R}$, $\vec{P}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই,
লব্ধির দিক $\theta = \tan^{-1}(\frac{Q \sin\alpha}{P+Q\cos\alpha})$



ধরি, $P = Q = x \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{x\sin}{x+x\text{co}} = \tan^{-1}\frac{\sin\alpha}{1+\cos} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{\sin(2.\frac{\alpha}{2})}{1+\cos(2.\frac{\alpha}{2})} = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= \tan^{-1}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (প্রমাণিত)।

খ. Δ XYZ এর লম্বকেন্দ্র O বিন্দু থেকে YZ, ZX, XY বাহুর উপর OD, OE, OF লম্ব তিনটি বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যবস্থায় থাকলে লামির সূত্র থেকে আমরা পাই,



$\frac{P}{\sin\angle EOF} = \frac{Q}{\sin\angle DOF} = \frac{R}{\sin\angle EOD} \Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi-X)} = \frac{Q}{\sin(\pi-Y)} = \frac{P}{\sin(\pi-Z)}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\text{si}}$ ……………(i)

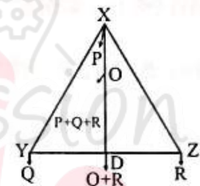
ত্রিভুজের ধর্ম থেকে $\frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y} = \frac{z}{\sin Z} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$\Rightarrow \sin X = kx, \sin Y = ky, \sin Z = kz$

(i) থেকে পাই, $\frac{P}{kx} = \frac{Q}{ky} = \frac{R}{kz} \quad \therefore P:Q:R = x:y:z$ (প্রমাণিত)।

গ. মনে করি, ΔXYZ এর অন্তঃকেন্দ্র O এবং বর্ধিত রেখা XO, YZ রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ∠X কোণের সমদ্বিখন্ডক XD। অর্থাৎ $\angle YXD = \angle ZXD = \frac{1}{2}\angle X$

এখন Y ও Z বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R এর লব্ধি, (Q + R), YZ রেখাস্থ কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।
আবার বলত্রয়ের লব্ধি O বিন্দুতে এবং P বলটি X বিন্দুতে ক্রিয়া করে। কাজেই (Q + R) বলটি XD রেখার কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। সুতরাং Q ও R এর লব্ধি YZ ও XD এর ছেদবিন্দু D তে।



$\therefore Q \times YD = R \times ZD \Rightarrow \frac{YD}{ZD} = \frac{R}{Q}$ ……………………………(i)

আবার, ΔXYD থেকে, $\frac{YD}{\sin YXD} = \frac{XD}{\sin XYD} \Rightarrow \frac{YD}{\sin\frac{1}{2}X} = \frac{XD}{\sin Y}$ ……………(ii)

তদ্রূপ ΔXZD হতে, $\frac{ZD}{\sin ZXD} = \frac{XD}{\sin XZD} \Rightarrow \frac{ZD}{\text{si}x\frac{1}{2}X} = \frac{XD}{\text{si}x\,Z}$ ……………(iii)

(ii) ÷ (iii) হতে $\frac{YD}{ZD} = \frac{\sin Z}{\sin Y}$ ……………………………(iv)

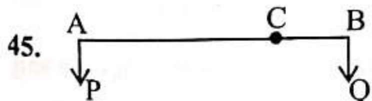
(i), (iv) হতে $\frac{R}{Q} = \frac{\sin Z}{\sin Y} \Rightarrow \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z}$ অনুরূপ ভাবে, $\frac{P}{\sin X} = \frac{R}{\sin Z}$ সুতরাং $\frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z}$

অর্থাৎ $P:Q:R = \sin X:\sin Y:\sin Z$

ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা জানি, $\frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y} = \frac{z}{\sin Z} = \frac{1}{k}$ (ধরি)

$\Rightarrow \sin X = kx, \sin y = ky, \sin Z = kz$

অতএব, $\frac{P}{\sin X} = \frac{Q}{\sin Y} = \frac{R}{\sin Z} \Rightarrow \frac{P}{kx} = \frac{Q}{ky} = \frac{r}{kz} \quad \therefore P:Q:R = x:y:z$ (প্রমাণিত)।

45. 

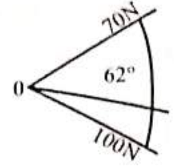
[Din.B'17]

(ক) 100 N ও 70 N মানের দুইটি বলের লব্ধি কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে। এদের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ 62^0 হলে বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। 2

(খ) P কে (R + 3) পরিমাণে এবং Q কে (S + 2) পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P, Q এর পরিবর্তে যথাক্রমে Q, (R + 3) ক্রিয়া করলেও লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।প্রমাণ কর যে, $R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$. 4

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বলদ্বয়ের সমতলে x দূরত্বের ব্যবধানে R মানের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল প্রয়োগ করা হলো। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে। 4

সমাধান



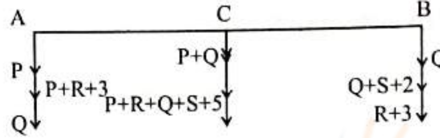
ক. লব্ধির মান $= \sqrt{(100)^2 + (70)^2 + 2.100.70 \cos 62°} = 146.54$ N (প্রায়)

এবং লব্ধির দিক $= \tan^{-1}\left(\frac{70 \sin 62°}{100+70\cos 62°}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{61.80}{132.86}\right) = 24.95°$ (প্রায়)

খ. মনে করি, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q এর লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

সুতরাং আমরা পাই, $P.AC = Q.BC$ ……….. (i)



প্রদত্ত বলদ্বয়কে যথাক্রমে $R + 3$ ও $S + 2$ পরমিাণে বৃদ্ধি করলে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত যথাক্রমে সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের মান হয় যথাক্রমে $P + R + 3$ ও $Q + S + 2$ এবং এদের লব্ধি ও C বিন্দুগামী হয়| কাজেই আমরা পাই,

$(P + R + 3)AC = (Q + S + 2)BC$ ……………….. (ii)

আবার, A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয়কে যথাক্রমে Q ও $(R + 3)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করলেও লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং আমরা পাই, $Q.AC = (R + 3).BC$ ………………… (iii)

(i) কে (iii) দ্বারা ভাগ করে, $\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R+3} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R+3} = \frac{(P-Q)}{Q-R-3}$ ………………… (iv)

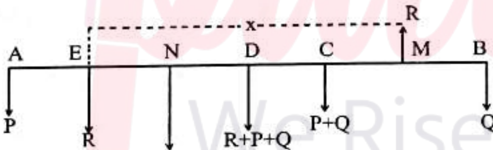
আবার, (ii) − (i) $\Rightarrow (R + 3)AC = (S + 2)BC$ ……………………………… (v)

(iii) কে (v) দ্বারাভাগ করে, $\Rightarrow \frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2} \Rightarrow \frac{Q}{R+3} = \frac{R+3}{S+2} = \frac{Q-R-3}{R-S+1}$ ……………………… (vi)

(iv) ও (vi) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{P-Q}{Q-R-3} = \frac{Q-R-3}{R-s+1}$

$\Rightarrow R - s + 1 = \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} \Rightarrow R = S + \frac{(Q-R-3)^2}{P-Q} - 1$ (প্রমাণিত)।

গ. প্রদত্ত P ও Q মানের বল দ্বয়ের লব্ধি $P + Q$, AB রেখার উপর C বিন্দুতে বলদ্বয়ের সমান্তরালে কার্যরত | মনে করি, AB রেখার মধ্যবর্তী অংশে $EM = x$ দূরত্ব E ও M বিন্দুতে সমমানের সাদৃশ সমান্তরাল বল R ও R যোগ করা হল।



এখন, E ও C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সদৃশ সমান্তরাল R ও $P + Q$ বলদ্বয়ের লব্ধি $P + Q + R$, D বিন্দুতে ক্রিয়া করে। সুতরাং আমরা পাই,

$R.ED = (P + Q)CD \Rightarrow \frac{CD}{R} = \frac{ED}{P+Q} \Rightarrow \frac{CD}{R} = \frac{ED}{P+Q} = \frac{CD+ED}{P+Q+R} \Rightarrow \frac{CD}{R} = \frac{EC}{P+Q+R} \Rightarrow CD = \frac{R.EC}{P+Q+R}$ ………… (i)

এখন D ও M বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বিসদৃশ, অসমান ও সমান্তরাল বল যথাক্রমে $P + Q + R$ I $R(P + Q + R > R)$ এর লব্ধি বল $(P + Q + R - R)$ বা $P + Q$, MD বরাবর, D বিন্দুতে বৃহত্তম বলের ক্রিয়ারেখার বাহিরে DN দূরত্ব N বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

কাজেই আমরা পাই, $(P + Q + R)DN = R.MN \Rightarrow DN = \frac{R.MN}{P+Q+R}$ ………… (ii)

$CD + DN = \frac{R.EC}{P+Q+R} + \frac{R.MN}{P+Q+R} \Rightarrow CN = \frac{R(EC+MN)}{P+Q+R} \Rightarrow CN(P + Q + R) = R(CN + EN + MN)$

$\Rightarrow CN(P + Q + R) = R(CN + EM) \Rightarrow CN(P + Q) = xR \Rightarrow CN = \frac{xR}{P+Q}$

অর্থাৎ $\frac{xR}{P+Q}$ দূরত্ব সরে যাবে। **(Proved)**

◆ **CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান**

01. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল **P, Q, R** যথাক্রমে **ΔABC** এর কৌণিক বিন্দু **A, B, C** তে ক্রিয়াশীল করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজটির লম্ব কেন্দ্রগামী।

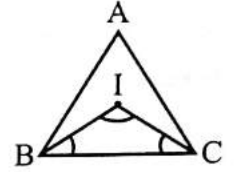
(ক) ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র **I** হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $P: Q: R = \tan A : \tan B : \tan C$। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2) = R(a^2 + b^2 - c^2)$। 4

সমাধান

ক. $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \therefore \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$

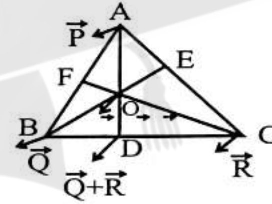


$\therefore \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle A$

Now, $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \angle BIC = 180°$

$\therefore \angle BIC = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C\right) = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ **(Proved)**

খ. মনে করি ABC এর লম্বকেন্দ্র O থেকে AO এর বর্ধিত OD রেখা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, AD ⊥ BC. বলটি B ও C বিন্দুতে কার্যরত। এখন, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ এর লব্ধি D বিন্দুতে কার্যরত।



$Q.BD = R.CD \therefore Q.\frac{BD}{AD} = R.\frac{CD}{AD} \Rightarrow Q\cot B = R\cot C$

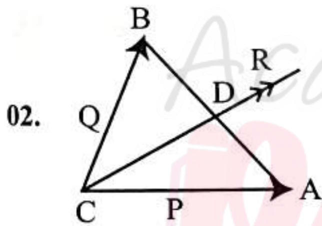
অনুরূপভাবে, $P\cot A = Q\cot B \therefore P\cot A = Q\cot B = R\cot C$

$\therefore P: Q: R = \tan A: \tan B: \tan C$ **(Proved)**

গ. $P.\cot A = Q.\cot B = R.\cot C \Rightarrow P\frac{\cos A}{si} = Q\frac{\cos B}{\sin B} = R\frac{\cos C}{\sin C}$

$\Rightarrow P\frac{b^2+c^2-a^2}{a.k.2bc} = Q\frac{c^2+a^2-b^2}{b.k2ca} = R.\frac{a^2+b^2-c^2}{c.k.2ab} \Rightarrow P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2) = R(a^2 + b^2 - c^2)$ **(Proved)**

02.



(ক) বলের ত্রিভুজ সূত্রটি লিখ। 2

(খ) চিত্রে **P** ও **Q** বলদ্বয় যথাক্রমে **cos A** ও **cos B** এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, ইহাদের লব্ধি **R, sin C** এর সমানুপাতিক 4

(গ) প্রমাণ কর যে, লব্ধির ক্রিয়ারেখা **CA** এর সাথে $\frac{1}{2}(A + C - B)$ কোণ উৎপন্ন করে। 4

সমাধান

ক. যদি এক বিন্দুতে কার্যরত দুটি বলের মান এবং দুটি বলের মান এবং দিক কোনো ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা সূচিত করা হয়, তাহলে এদের লব্ধির মান এবং দিক ঐ ত্রিভুজের বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু দ্বারা সূচিত হবে।

খ. $P = k\cos A,\ Q = k\cos B \therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos C \Rightarrow R^2 = k^2(\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C)$

$A + B + C = \pi \therefore \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$

$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C = 1 - \cos^2 C = \sin^2 C$

$\therefore R^2 = k^2\sin^2 C \therefore R = k\sin C \therefore R \propto \sin C$ **(Proved)**

গ. $\angle ACD = \alpha, \angle BCD = \beta$; $\tan\alpha = \frac{Q\sin C}{P+Q\,co} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{k\cos B\sin C}{k\cos A+k\cos B\cos C} = \frac{\cos B\sin C}{\cos A+\cos B\cos}$

এখন, $A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$; $\cos(B + C) = \cos(\pi - A) \Rightarrow \cos B\cos C - \sin B\sin C = -\cos A$

$\therefore \cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C \therefore \tan\alpha = \frac{\cos B\sin C}{\sin B\sin C} = \cot B = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - B = \frac{A+B+C}{2} - B = \frac{A+B+C}{2} - B = \frac{1}{2}(A + C - B)$ **(Proved)**

03. O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q, R তিনটি একতলীয় বল ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে।

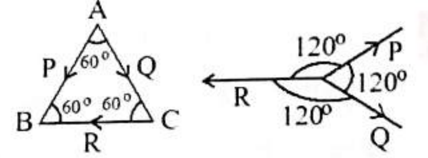
(ক) $P = Q = R$ হলে বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ কত হবে? 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{\sin Q\hat{}R} = \frac{Q}{\sin R\hat{}P} = \frac{R}{\sin P\hat{}Q}$

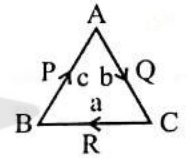
(গ) O বিন্দুটি ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র এবং OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বলগুলো ক্রিয়ারত হলে, প্রমাণ কর যে, $P: Q: R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ 4

সমাধান

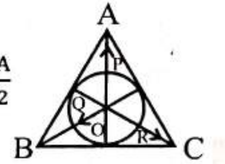
ক. যেহেতু P, Q, R সাম্যাবস্থায়, তাই এরা ত্রিভুজ গঠন করবে,
এবং যেহেতু $P = Q = R$, সেহেতু ত্রিভুজটির সমবাহু ত্রিভুজ হবে।
অতএব P, Q ও R এদের মধ্যবর্তী কোণ $120°$ করে হবে।



খ. যেহেতু P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে, সেহেতু, এরা ত্রিভুজ গঠন করতে পারবে,
এখন, $AB \propto P, BC \propto R, CA \propto Q \therefore AB = KP = c, BC = KR = a, CA = KQ = b$
ত্রিভুজের সাইন সূত্র অনুযায়ী, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
$\therefore \frac{KR}{\text{Sin } Q\hat{}P} = \frac{KQ}{\sin P\hat{}R} = \frac{KP}{\sin Q\hat{}R} \therefore \frac{P}{\sin Q\hat{}R} = \frac{Q}{\sin P\hat{}R} = \frac{R}{\sin Q\hat{}P}$ **(Proved)**

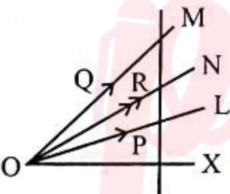


গ. $A + B + C = 180° \therefore \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° \therefore \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2} \cdots\cdots (i)$
ΔBOC হতে, $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180° \Rightarrow \angle BOC + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180° \Rightarrow \angle BOC = 90° + \frac{A}{2}$
একইভাবে, $\angle COA = 90° + \frac{B}{2}$ এবং $\angle AOB = 90° + \frac{C}{2}$



এখন, P, Q, R মানের বলত্রয় O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হয়ে সাম্যাবস্থায় থাকলে লামির সূত্র থেকে পাই,
$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB} \Rightarrow \frac{P}{\sin\left(90° + \frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(90° + \frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(90° + \frac{C}{2}\right)}$
$\Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}} \therefore P: Q: R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ **(Proved)**

04. O বিন্দুগামী P ও Q দুইটি বলের লব্ধি R।



(ক) বলের লম্বাংশ ও অংশকের পার্থক্য বর্ণনা কর। 2

(খ) কোনো সরলরেখা P, Q, R এর ক্রিয়ারেখাকে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$। 4

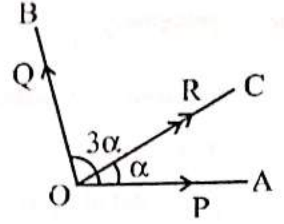
(গ) যদি $P > Q$ এবং লব্ধি R এদের অন্তর্গত কোণকে এক তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে বল দুটির অন্তর্গত কোণ $3\cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$ এবং লব্ধি $R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$। 4

সমাধান

ক. লব্ধি নির্দেশকারী একটি কর্ণের উভয় পার্শ্বে নির্দিষ্ট কোণে আনত জোড়া জোড়া সন্নিহিত বাহু ধরে অসংখ্য সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়। প্রত্যেক জোড়া সন্নিহিত বাহু হবে ১টি বলের অংশক বা উপাংশ। প্রদত্ত বলকে এর উভয় পার্শ্বে α, β দুটি নির্দিষ্ট কোণে আনত রেখা বরাবর দুটি অংশক বলে বিভাজন করা যায়। যদি $\alpha + \beta = 90°$ হয় অর্থাৎ অংশক বল দুটি যখন পরস্পর লম্ব হয় তখন ঐ অংশকদ্বয়কে প্রদত্ত বলের লম্বাংশ বলে।

খ. OX বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $P\cos\angle XOL + Q\cos\angle XOM = R\cos\angle XON$
$\Rightarrow P\frac{OX}{OL} + Q.\frac{OX}{OM} = R.\frac{OX}{ON} \therefore \frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$ **(Proved)**

গ. $\angle AOB = 3\alpha, \angle AOC = \alpha \therefore \angle BOC = 2\alpha$



বলের সাইন সূত্র হতে, $\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha}$

এখন, $\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} \therefore \frac{P}{2Q} = \cos\alpha$ [$\because \sin\alpha \neq 0$]

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= 3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

আবার, $\frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha} \Rightarrow R = \frac{Q\,si}{\sin\alpha} = \frac{Q(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)}{\sin\alpha} = Q(3 - 4\sin^2\alpha)$

$= Q(3 - 4 + 4\cos^2\alpha) = Q(4\cos^2\alpha - 1) \therefore R = Q\left\{4\left(\frac{P}{2Q}\right)^2 - 1\right\} = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$ [দেখানো হলো]

05. **(i)** **P ও Q বল দুইটি একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভ‚মির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থেকে প্রত্যেকে এককভাবে তলের উপর W ওজনের বস্তুকে ধরে রাখতে পারে।**

(ii) A —— 14cm —— B ; P=2N (A বিন্দুতে), Q=5N (B বিন্দুতে)

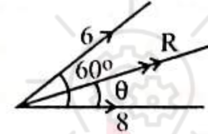
(ক) **6N ও 8N বল দুইটি পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়াশীল। বলদ্বয়ের লব্ধি ও লব্ধি বলটি 8N বলের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।** **2**

(খ) **(i) নং হতে দেখাও যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$।** **4**

(গ) **(ii) নং হতে, P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দু d দূরে সরালে দেখাও যে, তাদের লব্ধি $\frac{2d}{7}$ দূরে সরে যাবে।** **4**

সমাধান

ক. ধরি, লব্ধি R $\therefore R^2 = 6^2 + 8^2 + 2 \times 6 \times 8\cos 60°$



$\therefore R = 12.17$ N

$\tan\theta = \frac{6\sin\ \ °}{8 + 6\cos 60°} = 0.47 \therefore \theta = \tan^{-1}(0.47) = 25.28°$

খ. লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{P}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin 90°} \therefore \frac{P}{\sin\alpha} = W$

(১ম ক্ষেত্র) (২য় ক্ষেত্র)

$\therefore P\,\text{cosec}\,\alpha = W \therefore \text{cosec}^2\alpha = \frac{W^2}{P^2}$ ………………(i)

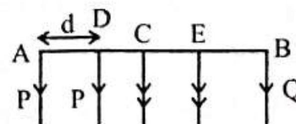
লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{Q}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90° + \alpha)} \Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{W}{Q} \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{W^2}{Q^2}$ ………(ii)

(i) − (ii)

$\frac{W^2}{P^2} - \frac{W^2}{Q^2} = \text{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = 1 \therefore \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$ [দেখানো হলো]

গ. মনে করি, A ও B তে কার্যরত P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C তে ক্রিয়া করে।

$P \times AC = Q \times BC \Rightarrow \frac{BC}{P} = \frac{AC}{Q} = \frac{AC + BC}{P + Q} = \frac{AB}{P + Q}$

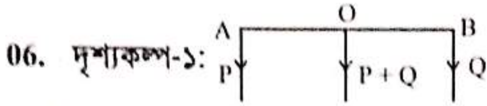


$\therefore BC = \frac{P}{P + Q}AB$ ………(i)

ধরি P বলটির প্রয়োগ বিন্দু A থেকে D তে সরানো হলে P ও Q এর লব্ধি P + Q, E তে কার্যরত হবে।

$\therefore P \times DE = Q \times BE \Rightarrow \frac{DE}{Q} = \frac{BE}{P} = \frac{BE + DE}{P + Q} = \frac{BD}{P + Q} \therefore BE = \frac{P}{P + Q}BD$

$\therefore BC - BE = \frac{P}{P + Q}(AB - BD) = \frac{P}{P + Q}d = \frac{2d}{7}$ [P ও Q এর মান বসিয়ে] **(Showed)**

06. দৃশ্যকল্প-১: 

দৃশ্যকল্প-২: l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার একপ্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালে আটকানো এবং অন্যপ্রান্ত a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকের সাথে সংযুক্ত।

(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের একটির মান অপরটির দ্বিগুণ হলে এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতরটির উপর লম্ব হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। 2

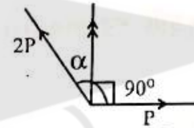
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলে লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P ও Q এর বদলে যথাক্রমে Q ও R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর গোলকটির ওজন W হলে, দেখাও যে, সুতার টান $T = \frac{w(a+l))}{\sqrt{2al+l^2}}$ 4

সমাধান

ক. $\tan 90° = \frac{2P \sin\alpha}{P+2P\cos\alpha} \Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{2\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}$

$\Rightarrow 1 + 2\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$



খ. দৃশ্যকল্প-১ থেকে, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore P \times AO = Q \times BO \cdots\cdots\cdots (i)$

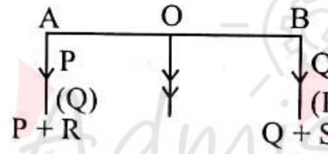
দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $P + R$ ও $Q + S$ এর লব্ধি O বিন্দুগামী।

$\therefore (P+R) \times AO = (Q+S) \times BO \Rightarrow P \times AO + R \times AO = Q \times BO + S \times BO$

$\therefore R \times AO = S \times BO \cdots\cdots\cdots (ii) [\because P \times AO = Q \times BO]$

পুনরায়, Q ও R এর লব্ধি O বিন্দুগামী।

$\therefore Q \times AO = R \times BO \cdots\cdots\cdots (iii)$



$\Rightarrow (i) \div (iii) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P-Q}{Q-R} \cdots\cdots\cdots (iv)$

$\Rightarrow (iii) \div (ii) \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{R}{S} = \frac{Q-R}{R-S} \cdots\cdots\cdots (v)$

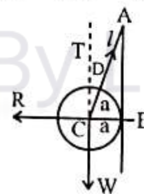
(iv) এবং (v) থেকে পাই, $\frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q-R}{R-S} \Rightarrow R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q} \Rightarrow S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ [দেখানো হলো]

গ. ΔABC এ বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্রানুসারে, $\frac{T}{CA} = \frac{W}{AB} = \frac{R}{BC}$

যখন, $AD = l, BC = CD = a$

$\therefore T = W \times \frac{CA}{AB} = \frac{W \times (AD+C\ )}{\sqrt{AC^2 - BC^2}}$

$= \frac{W(l+a)}{\sqrt{(1+a)^2 - a^2}} = \frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$ **(Showed)**



07. দৃশ্যকল্প-১: $P + Q$ ও $P - Q$ বলদ্বয় 2α কোণে ক্রিয়ারত এদের লব্ধি বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

দৃশ্যকল্প-২: P ও Q দুটি অসদৃশ সমান্তরাল বল A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

(ক) 8N ও 5N বলদ্বয়ের লব্ধি 7N হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $P : Q = \tan\alpha : \tan\theta$ । 4

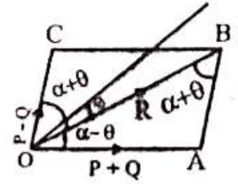
(গ) P ও Q বলদ্বয়কে x পরিমাণে বৃদ্ধি করা হলে এদের লব্ধির সরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $7^2 = 8^2 + 5^2 + 2 \times 8 \times 5 \cos\alpha \therefore \alpha = 120°$

খ. $OC \parallel AB$ ও OB ছেদক। $\angle COB =$ একান্তর $\angle OBA$

$\overline{AB} = \overline{OC} = P - Q$ ΔOAB তে ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)}$ $\therefore \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$

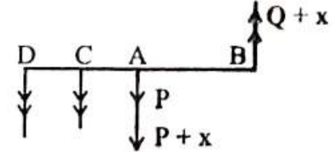


$\Rightarrow \frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}$ [যোজন বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2\sin\alpha\cos\theta}{2\cos\alpha\sin\theta} \therefore \frac{P}{Q} = \frac{\tan\alpha}{\tan\theta} \therefore P:Q = \tan\alpha : \tan\theta$] **(Showed)**

গ. ধরি, $P > Q$; $P \times AC = Q \times BC$ $\therefore \frac{AC}{Q} = \frac{BC}{P} = \frac{BC-AC}{P-Q} = \frac{AB}{P-Q}$ $\therefore AC = \frac{Q}{P-Q}AB$

এখন, P ও Q কে x পরিমাণ বৃদ্ধি করার পর $(P+x) \times AD = (Q+x) \times BD$



$\therefore \frac{AD}{Q+x} = \frac{BD}{P+x} = \frac{BD-AD}{P-Q} = \frac{AB}{P-Q} \therefore AD = \frac{Q+x}{P-Q}AB$

$\therefore$ লব্ধির সরণ $= AD - AC = \frac{Q+x}{P-Q}AB - \frac{Q}{P-Q}AB = \frac{x}{P-Q}AB$

08. **কোনো অনড় বস্তু ও B বিন্দুতে যথাক্রমে P ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত যেখানে $P > Q$ । বল দুইটির লব্ধি AB রেখার O বিন্দুতে ক্রিয়ারত। আবার কোন বিন্দুতে R ও S মানরে দুটি বল θ কোণে ক্রিয়াশীল।**

(ক) **সমতলীয় বলের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত কি?** 2

(খ) **দেখাও যে, P ও Q বল দুইটি পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে উহাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু y AB বরাবর d দূরত্বে সরে যাবে যখন $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$ ।** 4

(গ) **R ও S বলদ্বয়ের লব্ধির মান $(2m+1)\sqrt{R^2+S^2}$ এবং যখন তার $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ কোণে ক্রিয়া করে তখন লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{R^2+S^2}$ হলে প্রমাণ কর, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$** 4

সমাধান

ক. বলগুলো একই ক্রমে কোনো ত্রিভুজের তিন বাহু বরাবর মান ও দিক অনুযায়ী স্থাপনযোগ্য হতে হবে।

খ. ধরি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

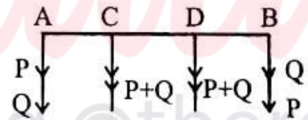
$\therefore P \times AC = Q \times BC \Rightarrow \frac{BC}{P} = \frac{AC}{Q} = \frac{BC+AC}{P+Q} = \frac{AB}{P+Q} \therefore AC = \frac{Q}{P+Q}AB \cdots\cdots$ (i)

আবার ধরি, বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore Q \times AD = P \times BD \Rightarrow \frac{AD}{P} = \frac{BD}{Q} = \frac{AD+BD}{P+Q} = \frac{AB}{P+Q} \Rightarrow AD = \frac{P}{P+Q}AB \cdots\cdots$ (ii)

(ii) − (i) $\Rightarrow AD - AC = CD = d = \frac{P}{P+Q}AB - \frac{Q}{P+Q}AB \therefore d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$ [দেখানো হলো]

গ. আমরা পাই, $(2m+1)^2(R^2+S^2) = R^2+S^2+2RS\cos\theta$



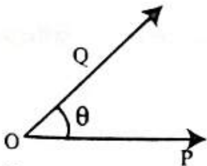
$\Rightarrow (4m^2+4m+1)(R^2+S^2) = R^2+S^2+2RS\cos\theta$

$\Rightarrow (4m^2+4m)(R^2+S^2) = 2RS\cos\theta \cdots\cdots$ (i)

বলদ্বয় $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ কোণে ক্রিয়া করলে, $(2m-1)^2(R^2+S^2) = R^2+S^2+2RS\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$(4m^2-4m)(R^2+S^2) = 2RS\sin\theta \cdots\cdots$ (ii)

$\frac{ii}{i}$ হতে পাই, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4m^2-4}{4m^2+4m} = \frac{m-1}{m+1} \Rightarrow \tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$ **[Proved]**

09. 

চিত্রে, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ।

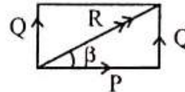
(ক) **$\theta = 90°$ হলে লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।** 2

(খ) **P এর দিক বরাবর এদের লব্ধির লম্বাংশ Q হলে দেখাও যে, $\theta = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$** 4

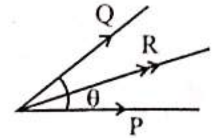
(গ) **দেখাও যে, লব্ধির মান, $\sqrt{Q^2-P^2+2PQ}$ ।** 4

সমাধান

ক. $\therefore R^2 = P^2 + Q^2 \therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \therefore \tan\beta = \frac{Q}{P} \therefore \beta = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$



খ. $P\cos 0° + Q\cos\theta = Q \Rightarrow P + Q\cos\theta = Q \Rightarrow Q - Q\cos\theta = P \Rightarrow Q(1-\cos\theta) = P$



$\Rightarrow 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{P}{Q} \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{P}{2Q} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}} \therefore \theta = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{P}{2Q}}$

আমরা পাই, $Q = P + Q\cos\theta \Rightarrow Q\cos\theta = Q - P \Rightarrow \cos\theta = \frac{Q-P}{Q} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$ **[Showed]**

গ. $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta = P^2 + Q^2 + 2P(Q-P)$ [∵'খ' থেকে প্রাপ্ত $Q(1-\cos\theta) = P$]

$= P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2$; $R^2 = Q^2 - P^2 + 2PQ \therefore R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$ **[Showed]**

10. বাংলাদেশ ক্রিকেট দলের ব্যাটসম্যান তামিম ইকবাল তার ব্যাটিং প্র্যাকটিসের জন্য **15** ইঞ্চি একটি সুতার **A** ও **B** প্রান্তদ্বয়কে ছাদের **12** ইঞ্চি দূরত্বে অবস্থিত দুইটি ভিন্ন অনুভূমিক বিন্দুতে বেঁধে দিলেন। এরপর একটি মসৃণ ওজনহীন আংটার সাহায্যে **W** ওজনের একটি বলকে ঐ সুতা থেকে ঝুলিয়ে দিলেন।

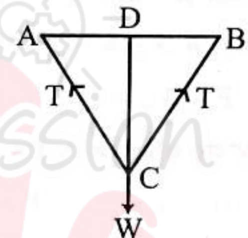
(ক) ছাদ থেকে আংটার সর্বনিম্ন বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) বলটির ওজন **6N** হলে সুতার টান নির্ণয় কর। 4

(গ) বলটিকে যদি **AB** সুতার যে কোন বিন্দু **C**-তে গিট দিয়ে ঝুলিয়ে দেওয়া হয় তবে দেখাও যে, **CA** অংশের টান $\frac{W \cdot AC}{4 \cdot AB \cdot \Delta}(AB^2 + BC^2 - CA^2)$ যেখানে **Δ** হল **ABC** ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল। 4

সমাধান

ক. একটি সুতার A ও B প্রান্ত ছাদের দুইটি ভিন্ন অনুভূমিক বিন্দুতে বেঁধে দিলেন। এরপর একটি ওজনহীন আংটার সাহায্যে W ওজনের একটি বলকে ঝুলিয়ে দিলেন। AB = 12 ইঞ্চি। যেহেতু বলটি অবাধে চলাচল করতে পারে কাজেই বলটি ACB সুতার মধ্যবিন্দু C তে ক্রিয়া করবে।



$\therefore AC = BC = \frac{15}{2} = 7.5$ ইঞ্চি বলটির ওজন DC বরাবর খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

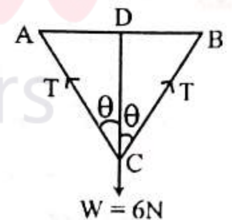
$AD = DB = \frac{12}{2} = 6$ ইঞ্চি। সমকোণী ΔBCD হতে পাই।

$CD = \sqrt{BC^2 - DB^2} = \sqrt{7.5^2 - 6^2} = \sqrt{20.25} = 4.5$ ইঞ্চি। **(Ans.)**

খ. সমকোণী ত্রিভুজ ACD ও সমকোণী ত্রিভুজ BCD হতে BC = AC, DC সাধারণ বাহু $\therefore \angle ACD = \angle BCD$

ধরি, $\angle ACB = 2\theta \quad \therefore \angle ACD = \angle BCD = \theta$

মনেকরি, CA ও CB বরাবর সুতার টান T ও T

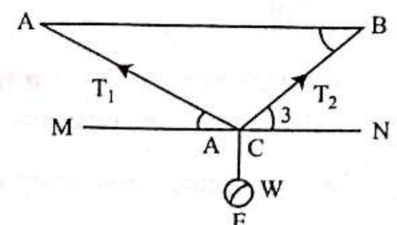


W, T, T সাম্যাবস্থায় থাকলে, $\frac{T}{\sin(180°-\theta)} = \frac{T}{\sin(180°-\theta)} = \frac{W}{\sin 2\theta} \Rightarrow \frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta} = \frac{6}{\sin 2\theta}$

$\therefore T = \frac{6\sin\theta}{\sin 2\theta} = \frac{6\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{3}{\cos} \therefore T = \frac{3}{\cos\theta} = \frac{3}{\frac{CD}{BC}} = \frac{3}{\frac{4.5}{7.5}}$ ['ক' হতে মান বসিয়ে]

$= \frac{3 \times 7.5}{4.5} = \frac{22.5}{4.5} = 5N$ **(Ans.)**

গ. মনে করি, CA ও CB অংশের টানদ্বয় যথাক্রমে T_1 ও T_2, W ওজন খাড়াভাবে নিচের দিকে CE বরাবর ক্রিয়াশীল। C বিন্দুতে T_1, T_2 ও W বলত্রয় সাম্যাবস্থায় রয়েছে। কাজেই লামির উপপাদ্য হতে পাই।



$\frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{T_2}{\sin ACE} = \frac{W}{\sin ACB} \therefore \frac{T_1}{\sin BCE} = \frac{W}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin(90+B)} = \frac{W}{\sin C}$ [AB||MN এবং একান্তর $\angle BCN = \angle ABC = \angle B$]

$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C}$; $T_1 = \frac{W\cos B}{\sin C} = \frac{\frac{W(c^2+a^2-b^2)}{2ca}}{\frac{2\Delta}{ab}} = \frac{Wb}{4c}(c^2 + a^2 - b^2)$

$= \frac{W \cdot AC}{4 \cdot AB \cdot \Delta}(AB^2 + BC^2 - CA^2)$ (দেখানো হলো)

অধ্যায় ০৯ সমতলে বস্তুকণার গতি

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	2	1	1	4					1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
রাজশাহী	1	1	1	4					1	1	1	1					1	1	1	2
চট্টগ্রাম	1	1	1	4					1	1	1	2					1	1	1	2
সিলেট	1	1	1	3					1	1	1	2					1	1	1	1
বরিশাল	1	1	1	3					1	1	1	4		সকল বোর্ড			1	1	1	2
যশোর	1	1	1	2					1	1	1	3					1	1	1	1
কুমিল্লা	1	1	1	5					1	1	1	1					1	1	1	2
দিনাজপুর	1	1	1	4					1	1	1	2					1	1	1	3
ময়মনসিংহ	1	1	1	3																

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই, ২০২১ সালে শর্ট সিলেবাসে অধ্যায়-০৯ ছিল না। ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

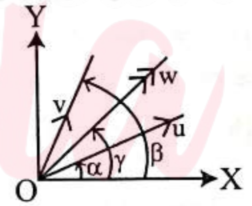
গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ বেগের লম্বাংশ উপপাদ্য:

এক বিন্দুগামী দুইটি বেগের কোন নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশদ্বয়ের বীজগাণিতীয় সমষ্টি ঐ দিকে ইহাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান। $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ হলে-

OX এর দিকে লম্বাংশ : $u\cos\alpha + v\cos\beta = w\cos\gamma$

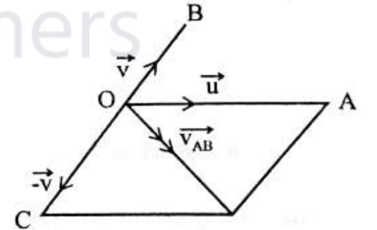
OY এর দিকে লম্বাংশ : $u\sin\alpha + v\sin\beta = w\sin\gamma$



◈ আপেক্ষিক বেগ: আপেক্ষিক বেগ যার সাপেক্ষে তাকে স্থির ধরতে হবে। এটি যেদিকে আছে বেগ তার বিপরীত দিকে নিতে হবে।

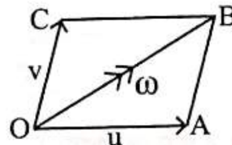
$\overline{OB}$ এর সাপেক্ষে $\overline{OA}$ এর বেগ $\vec{V}_{AB}=\vec{V}_A-\vec{V}_B=\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

ত্বরণ, মন্দন, সমবেগ ইত্যাদি সমস্যাগুলো v − vs − t গ্রাফ দিয়ে সমাধান করলে খুব সহজেই হয়ে যায়।

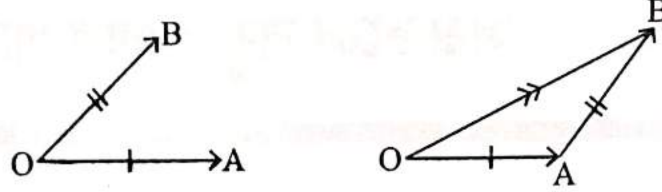


◈ সময়ের সাপেক্ষে বেগ বাড়লে ত্বরণ হয়, বেগ কমলে মন্দন হয়, বেগ স্থির থাকলে সমবেগ হয়।

◈ বেগের সামান্তরিক সূত্র: যদি কোনো একটি কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বেগ কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হয়, তাহলে এদের লব্ধির মান ও দিক সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।



◈ বেগের ত্রিভুজ সূত্র: যদি এক বিন্দুতে কার্যরত দুইটি বেগের মান এবং দিক কোনো ত্রিভুজের একইক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তাহলে এদের লব্ধির মান এবং দিক ত্রিভুজের বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু দ্বারা সূচিত হবে।



এখানে, O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ কে ΔOAB এর যথাক্রমে OA ও AB বাহু দ্বারা সূচিত করা হয়েছে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

➲ বেগের সামান্তরিক সূত্র:

(a) $u^v = \alpha$, $w^u = \theta$ লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

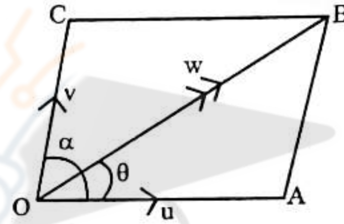
(b) $\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

(c) যদি $u = v$ হয়, তবে $w = 2u\cos\frac{\alpha}{2}$ এবং $\theta = \frac{\alpha}{2}$

(d) বৃহত্তম লব্ধি $= u + v$ $[\alpha = 0°]$

(e) ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= u \sim v$ $[\alpha = 180°]$

(f) $[\alpha = 90°]$ হলে লব্ধি $= \sqrt{u^2 + v^2}$



➲ নদী পারাপারের সূত্র:

সাঁতারু বা নৌকার বেগ = v একক, স্রোতের বেগ = u একক $[v > u]$

(a) স্রোতের অনুকূলে বেগ $= u + v$

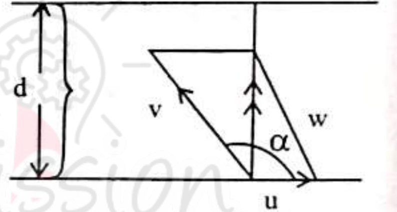
(b) স্রোতের প্রতিকূলে লব্ধি বেগ $= v - u (v > u)$

(c) নদী পার হওয়ার সময়, $t = \frac{d}{V\sin\alpha}$

(d) নদী পার হওয়ার ন্যূনতম সময়, $t_{min} = \frac{d}{v}$

(e) নদী পার হওয়ার ন্যূনতম দূরত্ব, $d = \sqrt{v^2 - u^2} \times t$,

(f) যে কোন দিকে দূরত্ব, x = (x বরাবর লব্ধি বেগের উপাংশ) × t = (x বরাবর নৌকার ও স্রোতের বেগের উপাংশের সমষ্টি) × t



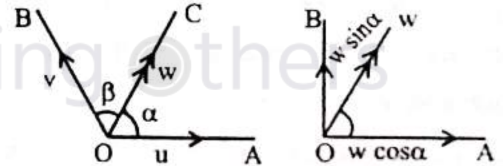
◈ কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল u, v, w বেগ তিনটির পরস্পরের অন্তর্গত কোণ যথাক্রমে α, β, γ হলে লব্ধি,

$$[R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\alpha + 2vw\cos\beta + 2wu\cos\gamma}]$$

◈ (a) বেগের সাইন সূত্র:

u, v বেগ দুটির লব্ধি w হলে,

$$\frac{u}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin(\alpha + \beta)}$$



(b) বেগের অংশক, OA বরাবর W এর লম্বাংশ $= w\cos\alpha$; OB বরাবর W এর লম্বাংশ $= W\sin\alpha$

◈ সমত্বরণে চলমান বস্তুর গতির সমীকরণ: গড় বেগ, $\bar{v} = \frac{u+v}{2}$

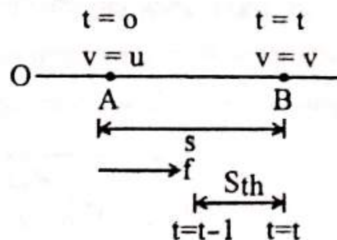
(a) $v = u + ft$

(b) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

(c) $v^2 = u^2 + 2fs$

(d) $s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t = \bar{v}t$

(e) $s_{th} = u + \frac{1}{2}f(2t - 1) = v - \frac{f}{2}$



◈ একটি বস্তু আদিবেগসহ t তম সেকেন্ডে S_{t-th} এবং n তম সেকেন্ডে S_{n-th} দূরত্ব অতিক্রম করলে, ত্বরণ, $f = \frac{S_{t-t} - S_{n-th}}{t-n}$

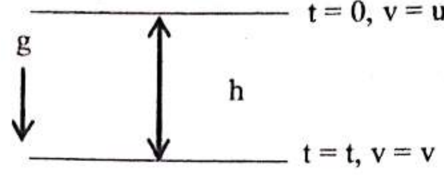
◈ উচ্চস্থান হতে অভিকর্ষের অধীনে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

(a) $v = u + gt$

(b) $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

(c) $v^2 = u^2 + 2gh$

(d) $h_{th} = u + \frac{1}{2}g(2t-1) = v - \frac{g}{2}$

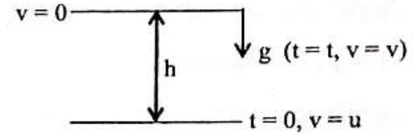


◈ খাড়াভাবে উর্ধ্বে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি

(a) $v = u - gt$; (b) $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ (c) $v^2 = u^2 - 2gh$

(d) t তম second এ সরণ $h_{th} = u - \frac{1}{2}g(2t-1) = v + \frac{g}{2}$

(e) $H = \frac{u^2}{2g}$ (f) $t = \frac{u}{g}$ (g) $T = \frac{2u}{g}$

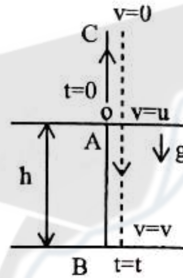


◈ h উচ্চতা হতে উর্ধ্বে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি

(a) $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

(c) $h_{th} = -u + \frac{1}{2}g(2t-1) = v - \frac{g}{2}$

(b) $v = -u + gt$



◈ প্রক্ষেপক

(a) ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের ক্ষেত্রে

(i) $v\cos\theta = u\cos\alpha$; $v\sin\theta = u\sin\alpha - gt$

(ii) $\tan\theta = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}$ [(i) ও (ii) থেকে]

(iii) $x = (u\cos\alpha)t$

(iv) $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

(v) $y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$

(vi) $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

(vii) $y = ax - bx^2$; $a = \tan\alpha$, $b = \frac{g}{2(u\cos\alpha)^2}$

(viii) আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = (u\cos\alpha)T$

(ix) সর্বোচ্চ আনুভূমিক পাল্লা, $R_{max} = \frac{u^2}{g}(\alpha = 45°)$

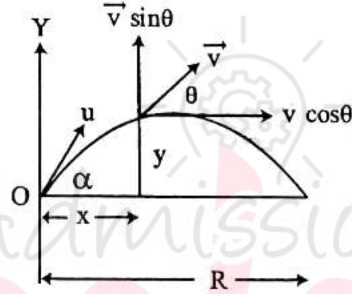
(x) মোট বিচরণ কাল, $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

(xi) উত্থানকাল = পতনকাল $t = \frac{u\sin\alpha}{g}$

(xii) সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

(xiii) $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$

(xiv) $\frac{T^2}{R} = \frac{2\tan\alpha}{g}$

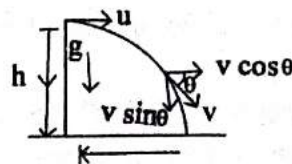


(b) আনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত প্রাস

(i) $x = ut$, $h = \frac{1}{2}gt^2$

(ii) $v\cos\theta = u$; $v\sin\theta = gt$

(iii) $v = \sqrt{u^2 + (gt)^2}$



(c) উঁচু স্থান হতে α কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপক

(i) $v\cos\theta = u\cos\alpha$ (ii) $v\sin\theta = -u\sin\alpha + gt$

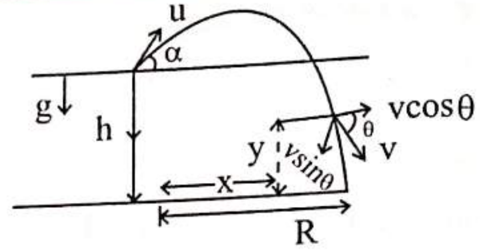
(iii) $h = -u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$ (iv) $x = (u\cos\alpha)t$

(d) প্রক্ষেপকের শীর্ষবিন্দু, $\left(\frac{R}{2}, H\right) = \left(\frac{u^2\sin2\alpha}{2g}, \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$

উপকেন্দ্র $= \left(\frac{u^2\sin2\alpha}{2g}, \left|\frac{u^2\cos2\alpha}{2g}\right|\right)$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = \frac{u^2}{2g}$; অক্ষরেখা, $x = \frac{R}{2}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$



সহজে মনে রাখার কৌশল

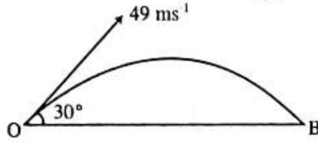
◈ একটি গুলি একটি লক্ষ্যবস্তুর ভেতর x মিটার প্রবেশ করার পর এর বেগ $\frac{1}{n}$ অংশ কমে গেলে এটি লক্ষ্যবস্তুর ভেতর আরও $\frac{(n-1)^2}{(2n-1)}x$ মিটার প্রবেশ করবে।

◈ একটি গুলি একটি লক্ষ্যবস্তুর ভেতর x মিটার প্রবেশ করার পর এর বেগ $\frac{1}{n}$ হলে, এটি লক্ষ্যবস্তুর ভেতর আরও $\frac{x}{n^2-1}$ মিটার প্রবেশ করবে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **MCQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



01. প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল- **[DB, Ctg.B, BB'22; JB'17]**

(a) $\frac{5}{2}$ সেকেন্ড (b) 5 সেকেন্ড (c) 10 সেকেন্ড (d) $\frac{245}{8}$ সেকেন্ড

সমাধান: **(b)**; $T = \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2\times49\times\sin30°}{9.8} = 5sec$

02. প্রক্ষেপকটির সর্বাধিক উচ্চতা- **[DB, Ctg.B, JB, BB'22; Ctg.B, JB, BB'19]**

(a) $\frac{245}{8}$ মিটার (b) $\frac{245}{4}$ মিটার (c) 5 মিটার (d) 10 মিটার

সমাধান: **(a)**; $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(49)^2\times\sin^2 30°}{2\times9.8} = \frac{245}{8}m$

03. একটি তীর একটি দেয়ালের ভিতর 3 ইঞ্চি ঢুকার পর তার অর্ধেক বেগ হারায়। তীরটির বেগ শূন্য হওয়ার পূর্বে দেয়ালের ভিতর আর কত ইঞ্চি ঢুকবে? **[DB'22]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

সমাধান: **(d)**; $x = \frac{d}{n^2-1} = \frac{3}{2^2-1} = 1m$

এখানে, n হল বেগ যতগুন কমে যায় এবং d হল প্রথমবার অতিক্রান্ত দূরত্ব

04. $20\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একখণ্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটি যখন ফেলা হয়েছিল, তখন বেলুনের উচ্চতা কত মিটার ছিল? **[DB'22]**

(a) 780 (b) 690 (c) 580 (d) 290

সমাধান: **(d)**; $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$= -20\times10 + \frac{1}{2}\times9.8\times(10)^2 = 290m$

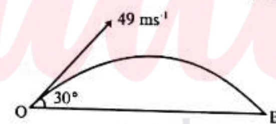
05. $20\ ms^{-1}$ বেগে ও $4\ ms^{-2}$ সমত্বরণে চলমান বস্তুকণার 5-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব- **[Ctg.B, Din.B'22; DB'19]**

(a) 36 m (b) 38 m (c) 42 m (d) 150 m

সমাধান: **(b)**; $h_5 = u + \frac{1}{2}a(2t-1)$

$= 20 + \frac{1}{2}\times4\times(2\times5-1) = 38m$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



06. u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার— **[Ctg.B'22] [Ans: c]**

(i) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{u^2}{g}$

(ii) সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময় $\frac{u}{g}$

(iii) বিচরণকাল $\frac{2u}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. কী পরিমাণ বল 33 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর প্রয়োগ করলে 5 sec এ তার বেগ $15\ ms^{-1}$ হবে। **[RB'22]**

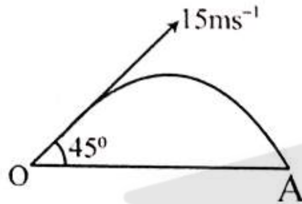
(a) 11 N (b) 33 N (c) 66 N (d) 99 N

সমাধান: **(d)**; $F = m\times\frac{\Delta v}{\Delta t} = 33\times\frac{15}{5} = 99N$

০৮. 54 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর খাড়া নিচে ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে? **[RB, JB'22]**
(a) 3.32 sec (b) 3.34 sec (c) 3.36 sec (d) 3.38 sec
সমাধান: (a); $T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times54}{9.8}} = 3.32$ sec

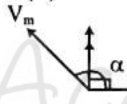
০৯. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে 3 cms^{-2} ত্বরণে চলতে শুরু করলে 1 মিনিট পর তার বেগ কত হবে? **[RB'22]**
(a) 3 cm/sec (b) 60 cm/sec
(c) 120 cm/sec (d) 180 cm/sec
সমাধান: (d); $v = u + at = 0 + 3 \times 60 = 180$cm/sec

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



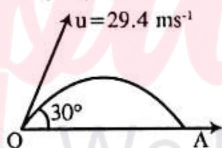
10. উদ্দীপকে OA =? **[RB'22]**
(a) 24.96 m (b) 24 m (c) 22.96 m (d) 22 m
সমাধান: (c); $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(15)^2 \times \sin 90^\circ}{9.8} = 22.96$m

11. একটি গাড়ি ঘন্টায় 8 কি.মি. বেগে চলছে। গাড়ি থেকে 16 কি.মি. বেগে একটি বস্তুকে কোনদিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুর গতিপথ গাড়ির সাথে সমকোণ তৈরি করবে? **[SB'22]**
(a) 30° (b) 45° (c) 100° (d) 120°



সমাধান: (d); $\cos\alpha = -\frac{V_c}{V_m}$
$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{8}{16}\right) = 120^\circ$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



12. উদ্দীপকে OA =? **[SB, Din.B'22; DB'19] [Ans: b]**
(a) 74 m (b) 76.38 m (c) 78 m (d) 78.4 m
সমাধান: (b); $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(29.4)^2 \times \sin(2\times30^\circ)}{9.8} = 76.38$ m

13. u গতিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে একটি বস্তুকণা প্রক্ষিপ্ত হলে– **[SB'22; RB'17]**
(i) বায়ুশূন্য স্থানে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত
(ii) আনুভূমিক পাল্লা R বৃহত্তম হলে, $R = \frac{u^2}{g}$
(iii) বস্তুকণাটির বিচরণকাল $= \frac{u\sin\alpha}{g}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); ব্যাখ্যা: বস্তুটির বিচরণকাল $= \frac{2u\sin\alpha}{g}$

14. 30 মিটার/সেকেন্ডে বেগে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের পাল্লা 60 মিটার হলে নিক্ষেপণ কোণ কত হবে? **[BB'22]**
(a) 20.39° (b) 25° (c) 30° (d) 32.35°
সমাধান: (a); $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \Rightarrow 60 = \frac{30^2 \sin 2\theta}{9.8}$
$\Rightarrow \boxed{\theta = 20.39^\circ}$

15. আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে এবং 9.8 মি/সে. বেগে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি আনুভূমিকভাবে চলবে? **[CB'22]**
(a) $\frac{1}{2}$ সে (b) $\frac{1}{4}$ সে (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ সে (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ সে
সমাধান: (a); $T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{9.8\times\sin30^\circ}{9.8} = \frac{1}{2}$ sec

16. আনুভূমিকের সাথে A কোণে এবং B বেগে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর–
(i) সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \frac{B^2 \sin A}{2g}$ **[CB'22]**
(ii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{2B\sin A}{g}$
(iii) আনুভূমিক পাল্লা $= \frac{B^2 \sin 2\alpha}{g}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii
সমাধান: (b); ব্যাখ্যা: সর্বোচ্চ উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{B\sin A}{g}$

17. স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে চলমান একটি কণা 4 সেকেন্ডে 16 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। ৫ম সেকেন্ডে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? **[CB'22]**
(a) 9 মিটার (b) 11 মিটার (c) 18 মিটার (d) 22 মিটার
সমাধান: (a); $s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 16 = \frac{1}{2}a \times u^2$
$\therefore a = 2ms^{-2}$
$s_5 = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = 0 + \frac{1}{2} \times 2 \times (2\times5-1) = 9$ m

18. 9.8 মিটার/সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপিত কোনো বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা কত? **[CB'22]**
(a) 2.0 মি. (b) 4.9 মি. (c) 9.8 মি. (d) 19.6 মি.
সমাধান: (b); $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(9.8)^2}{2\times9.8} = 4.9$m

19. u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু h উচ্চতায় আসার দুটি সময়ের পার্থক্য কত? **[Din.B'22]**
(a) $\sqrt{u^2-2gh}$ (b) $\frac{2}{g}\sqrt{u^2-2gh}$
(c) $\frac{g}{2}\sqrt{u^2-2gh}$ (d) $g\sqrt{u^2-2gh}$
সমাধান: (b); নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$
$\Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$ ……… (i)
(i) নং এ t চলকের মূল সহগ সম্পর্ক হতে পাই, [ধরি, $t_1 > t_2$]
$t_1 + t_2 = \frac{2u}{g}, t_1t_2 = \frac{2h}{g}$
$\therefore t_1 - t_2 = \sqrt{(t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2}$
$= \sqrt{\left(\frac{2u}{g}\right)^2 - 4\times\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4u^2}{g^2} - \frac{8h}{g}} = \frac{2}{g}\sqrt{u^2-2gh}$

20. কোনো প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা R, বিচরণকাল T, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং প্রক্ষেপণ কোণ α হলে- [Din.B'22] [Ans: d]

(i) $R = 4H\cot\alpha$ (ii) $H = \frac{gT^2}{8}$

(iii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i ও ii (b) i ও iii (c) ii ও iii (d) i, ii ও iii

21. একটি পাথরকে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 5 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দুতে ফিরে আসে। পাথরটির ভূমিতে পতন বেগ কত? [Din.B'22]

(a) $18.56\ ms^{-1}$ (b) $24.5\ ms^{-1}$

(c) $25.57\ ms^{-1}$ (d) $22.40\ ms^{-1}$

সমাধান: (b); $T = \frac{2u}{g} \Rightarrow 15 = \frac{2u}{9.8}$

$\Rightarrow u = 24.5\ ms^{-1}$

22. এক ব্যক্তি 450 মিটার চওড়া একটি স্রোতহীন নদী সাঁতার দিয়ে ঠিক সোজাসুজিভাবে 15 মিনিটে পার হলে সাঁতারুর বেগ কত কি.মি/ঘণ্টা? [MB'22]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{9}{5}$ (c) 3 (d) $\frac{9}{2}$

সমাধান: (b); $v = \frac{\frac{450}{100}}{\frac{15}{60}} = \frac{9}{5}$ কি.মি. / ঘন্টা

23. একটি বস্তু উপর থেকে মুক্তভাবে 5 সেকেন্ডে পড়ল। বস্তুটি শেষের 3 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল? [MB'22]

(a) 336 (b) 256 (c) 192 (d) 128

সমাধান: (a); শেষ 3sec এ অতিক্রান্ত দূরত্ব = 5 sec এ মোট দূরত্ব– প্রথম 2sec এ অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= \frac{1}{2} \times g \times 5^2 - \frac{1}{2} \times g \times 2^2 = \frac{1}{2} \times 32 \times (25 - 4)$

$[g = 32ft/sec^2] = 336ft$

24. u আদিবেগ আনুভূমিকের সাথে α কোণে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হলে- [MB'22] [Ans: d]

(i) বিচরণকাল $\frac{2u\,si}{g}$ (ii) বৃহত্তম পাল্লা $\frac{u^2}{g}$

(iii) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

25. 30 m/s বেগে একটি বস্তুকণা 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত হলে প্রক্ষেপটির- [RB, JB, BB'19]

(i) আনুভূমিক পাল্লা: 79.53m

(ii) সর্বাধিক উচ্চতা: 11.48

(iii) বিচরণকাল: 3.06 sec

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $R = \frac{V^2\sin 2\theta}{g} = 79.53\ m$

$H = \frac{V^2\sin^2\theta}{2g} = 11.48\ m\ ; T = \frac{2V\sin\theta}{g} = 3.06\ s$

26. u বেগে এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার α এর কোন মানের জন্য আনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক হবে? [RB, Ctg.B, BB'19; CB'17] [Ans: b]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

27. u ও v (u < v) বেগদ্বয়ের-

(i) বৃহত্তম লব্ধি = u + v (ii) ক্ষুদ্রতম লব্ধি = u − v

(iii) তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে লব্ধি = $\sqrt{u^2 + v^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); ক্ষুদ্রতম লব্ধি = v − u

28. প্রক্ষেপক কোণ 45° হলে- [Ctg.B'19]

(i) $R = \frac{u^2}{g}$ (ii) $H = \frac{u^2}{4g}$ (iii) $T = \frac{u}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $T = \frac{2u\sin 45°}{g} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{2}u}{g}$

29. X এবং Y দুটি বাস সমান্তরাল দুটি রাস্তা বরাবর একই দিকে যথাক্রমে 20 km/h এবং 10 km/h বেগে চলছে। Y বাসের সাপেক্ষে X বাসের আপেক্ষিক বেগ কত? [SB'19]

(a) 0 (b) 10 (c) 20 (d) 30

সমাধান: (b); $V_{XY} = 20 - 10 = 10km/h$

30. বায়ুশূন্য স্থানে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ একটি- [SB'19] [Ans: a]

(a) পরাবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) বৃত্ত

31. একটি কণা সমত্বরণে 5 মি./সে. আদিবেগে 50 সে.মি. অতিক্রম করে 10 মি./সে. গতিবেগ অর্জন করে। কণাটির ত্বরণ কত? [SB'19]

(a) −75 মি./সে². (b) 75 মি./সে².

(c) $\frac{-3}{4}$ মি./সে². (d) $\frac{3}{4}$ মি./সে².

সমাধান: (b); $(10)^2 = (5)^2 + 2 \times f \times 0.5$

$\therefore f = 75\ ms^{-2}$

32. u ও v দুটি বেগ পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি বেগ হবে- [BB'19] [Ans: c]

(a) $\sqrt{u+v}$ (b) u + v (c) u − v (d) $\sqrt{u-v}$

33. দুটি ট্রেন একই রেলপথে বিপরীত দিক থেকে একই 60 m/sec গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। 1200 m দূরত্বে একে অপরকে দেখতে পেল। মন্দনের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর যাতে সংঘর্ষ এড়ানো যেতে পারে। [JB'19]

(a) $2\ m/sec^2$ (b) $3\ m/sec^2$

(c) $4\ m/sec^2$ (d) $5\ m/sec^2$

সমাধান: (b); আপেক্ষিক বেগ, $v = 60 - 60$
$= 120\ m/s$
$\therefore$ সর্বোচ্চ আপেক্ষিক মন্দন $= \frac{v^2}{2s} = \frac{120^2}{2\times1200} = 6\ m/s^2$
$\therefore$ প্রতি ট্রেনের সর্বোচ্চ মন্দন $= 3\ m/s^2$

34. দুটি নৌকা 3 একক ও 4 একক বেগে পরস্পর বিপরীত দিকে চলছে। ১ম নৌকার সাপেক্ষে ২য় নৌকার আপেক্ষিক বেগ কোনটি? **[CB'19]**
(a) 7 (b) 5 (c) 3 (d) 1
সমাধান: (a); $4 + 3 = 7$, কেননা নৌকাদ্বয় বিপরীত দিকে চলছে।

35. u গতিবেগে ও আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা- **[Din.B'19]**
(a) $(u\sin2\alpha)/g$ (b) $(u^2\sin2\alpha)/g$
(c) $(u\sin2\alpha)/2g$ (d) $(u^2\sin2\alpha)/2g$
সমাধান: (b); আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

36. একখানা গাড়ি সমত্বরণে 25 km/hr আদিবেগে 150 km অতিক্রম করে 60 km/hr চূড়ান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়। গাড়িটির ত্বরণ কত? **[Din.B'19]**
(a) $9.92\ km/h^2$ (b) $14.08\ km/h^2$
(c) $19.83\ km/h^2$ (d) $28.16\ km/h^2$
সমাধান: (a); $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{60^2 - 25^2}{2\times150} = 9.92\ km/h^2$

37. ভূমি হতে v বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতা নিচের কোনটি? **[All.B'18]**
(a) $\frac{v}{g}$ (b) $\frac{v}{2g}$ (c) $\frac{v^2}{g}$ (d) $\frac{v^2}{2g}$
সমাধান: (d); সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগ শূণ্য (0)
$\therefore 0^2 = v^2 - 2gh \therefore h = \frac{v^2}{2g}$

38. $\frac{u}{\sqrt{3}}$ বেগে 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত কণার সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগ কত একক/সে.? **[All.B'18]**
(a) $\frac{2u}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{u}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{u}{2}$ (d) $\frac{u}{2\sqrt{2}}$
সমাধান: (c); $\frac{u}{\sqrt{3}}\cos30° = \frac{u}{2}$ [সর্বোচ্চতায়, $u_y = 0$]

39. একটি গাড়ী 15m/s আদিবেগে এবং $4m/s^2$ সমত্বরণে চলে 150m দূরে অবস্থিত একটি খুঁটিকে অতিক্রম করে। খুঁটিটি অতিক্রমের মুহূর্তে গাড়িটির বেগ কত ছিল? **[DB'17]**
(a) $37.75\frac{m}{s}$ (b) $30.75\frac{m}{s}$
(c) 29.75 m/s (d) 28.75 m/s
সমাধান: (a); $u = 15\ ms^{-1}, f = 4ms^{-2}$
$s = 150\ m, v = ?$
$v^2 = u^2 + 2fs = 15^2 + (2\times4\times150)$
$v = 37.75\ ms^{-1}$

40. ভূমি হতে u আদিবেগে একটি বস্তু উলম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি সর্বাধিক কত উপরে উঠবে? **[DB'17] [Ans: b]**
(a) $\frac{u^2}{g}$ (b) $\frac{u^2}{2g}$ (c) $\frac{u}{g}$ (d) $\frac{2y}{g}$

41. স্থিরাবস্থায় 2m উঁচু থেকে অবাধে খাড়া নিম্নমুখী পড়ন্ত বস্তুর ভূমিতে পতনকাল কত সেকেন্ড? **[RB'17]**
(a) $\sqrt{\frac{2}{g}}$ (b) $2\sqrt{\frac{1}{g}}$ (c) $\sqrt{\frac{1}{g}}$ (d) $\sqrt{\frac{g}{2}}$
সমাধান: (b); $2 = \frac{1}{2}gt^2 \therefore gt^2 = 4 \therefore t^2 = \frac{4}{g}$
$\therefore t = 2\sqrt{\frac{1}{g}}$

42. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $2ms^{-2}$ সমত্বরণে ১ম সেকেন্ডে 1m দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী 1 সেকেন্ডে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত? **[Ctg.B'17]**
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
সমাধান: (c); $S = \frac{1}{2}2\times1^2 = 1; S = \frac{1}{2}\times2\times(2)^2 = 4$
$\therefore$ পরবর্তী 1 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= (4 - 1) = 3$
বিকল্প: $S_t = u + \frac{1}{2}f(2t - 1) = 0 + \frac{1}{2}\times2\times$
$(2\times2 - 1) = 3$

43. u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের– **[Ctg.B'17] [Ans: d]**
(i) সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g}$
(ii) বিচরণকাল $= \frac{2u}{g}$ (iii) উত্থানকাল $= \frac{u}{g}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i ও ii (b) ii ও iiii (c) ও iii (d) i, ii ও iii

44. সরলরেখায় সমত্বরণ চলমান বস্তুর গতিসূত্র কোনটি? **[SB'17] [Ans: a]**
(a) $v = u + ft$ (b) $s = ut - \frac{1}{2}ft^2$
(c) $v^2 = u^2 - 2fs$ (d) $v = u - ft$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
u আদিবেগে ভূমির সাথে 60° কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলে t সময় পর তা ভূমিতে ফিরে আসে।

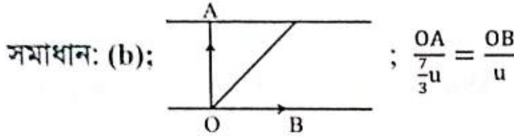
45. উলম্ব দিকে u এর উপাংশ কোনটি? **[BB'17]**
(a) $\frac{2u}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}u}{2}$ (c) $\frac{u}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{u}{2}$
সমাধান: (b); $v\sin\theta = u\sin60° = \frac{\sqrt{3}u}{2}$

46. আনুভূমিক পাল্লা কত? **[BB'17]**
(a) $\frac{u^2}{2g}$ (b) $\frac{u^2}{\sqrt{2}g}$ (c) $\frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$ (d) $\frac{2u^2}{\sqrt{3}g}$
সমাধান: (c); $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = \frac{u^2\sin120°}{g} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$

47. 2.45 km প্রস্থের নদীতে পানির স্রোতের $\frac{7}{3}$ গুণ বেগে ও স্রোতের সাথে লম্বভাবে একজন সাঁতারু নদী সোজাসুজি পাড়ি দেওয়ার জন্য যাত্রা শুরু করল। সে অপর তীরে যাত্রা-বিন্দুর ঠিক বিপরীত স্থান হতে কত দূরত্বে ভাটিতে পৌঁছবে? [Din.B'17]

(a) 0.32 km (b) 1.05 km
(c) 1.50 km (d) 5.72 km

সমাধান: (b);



; $\frac{OA}{\frac{7}{3}u} = \frac{OB}{u}$

$\Rightarrow OB = \frac{OA.3}{7} \therefore OB = \frac{2.45\times3}{7} = 1.05km$

48. একটি শূন্য কূপে একটি পাথর টুকরা ফেলার 4sec পরে উহার তলদেশে পতনের শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ 330 ms^{-1} হলে কূপের গভীরতা কত? [Din.B'17]

(a) 75.5 m (b) 76.5 m
(c) 78.4 m (d) 79.4 m

সমাধান: সঠিক উত্তর নেই। সঠিক উত্তর হল: মোট সময় = পাথর কুয়ার তলদেশে পড়ার সময় + শব্দ পরে আসার সময়।

$4 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} \Rightarrow \frac{2h}{g} = \left(4 - \frac{h}{v}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{2h}{g} = 16 - 8\frac{h}{v} + \frac{h^2}{v^2}$

$\Rightarrow \frac{h^2}{(330)^2} - \left(\frac{8}{330} + \frac{2}{9.8}\right)h + 16 = 0$

$\Rightarrow h = 70.27m$

49. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা $3ms^{-2}$ সমত্বরণে 20 সেকেন্ড যাবৎ চলে গড়বেগ $50ms^{-2}$ প্রাপ্ত হলে তার আদিবেগ কোনটি? [Din.B'17]

(a) 40 ms^{-1} (b) 35 ms^{-1}
(c) 20 ms^{-1} (d) 10 ms^{-1}

সমাধান: (c); $\frac{u+v}{2} = 50 \therefore u + v = 100 \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, $\frac{v-u}{20} = 3 \therefore v - u = 60 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

Solving (i) and (ii), $v = 80ms^{-1}$; $u = 20ms^{-1}$

◆ MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

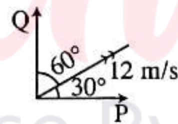
মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. 12 ms^{-1} বেগের দুই পার্শ্বে 30° ও 60° কোণে কার্যরত অংশকদ্বয় নিচের কোনটি?

(a) $6\sqrt{3}, 6$ (b) $6, 6\sqrt{3}$ (c) $24, \frac{24}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{24}{\sqrt{3}}, 24$

সমাধান: (a); $P = \frac{12\sin 60°}{\sin(30°+6\ °)}$

$= \frac{12\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = 6\sqrt{3}\,m/s$;



$Q = \frac{12\sin30°}{\sin(30°+60°)} = \frac{12\times\frac{1}{2}}{1} = 6\,m/s$

02. একটি বস্তু সুষম বেগে চললে এর ত্বরণ কি হবে? [Ans: d]

(a) ধনাত্মক (b) ঋণাত্মক
(c) সুষম (d) কোনো ত্বরণ হবে না

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি চলমান বস্তুকণা 10 ms^{-1} আদিবেগে এবং $-3\ ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে।

03. 2 সেকেন্ড পর বস্তুটির বেগ কত মিটার/সে. হবে?

(a) 4 (b) $4\sqrt{7}$ (c) 16 (d) $2\sqrt{22}$

সমাধান: (a); $u = 10\,m/s, f = -3\,m/s^2, t = 2$ sec হলে, $v = u + ft = 10 - 3\times2 = 4\,m/s$

04. 3 সেকেন্ড পর বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত মিটার হবে?

(a) 16.5 (b) 25.5 (c) 34.5 (d) 43.5

সমাধান: (a); $u = 10\,m/s, f = -3\,m/s^2, t = 3$ sec হলে, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2 = 10\times3\frac{1}{2}\times(-3)\times3^2 = 16.5\,m$

05. 16 মিটার অতিক্রম শেষে বস্তুটির বেগ কত মিটার/সে. হবে?

(a) 196 (b) 14 (c) 4 (d) 2

সমাধান: (d); $u = 10\,m/s, f = -3\,m/s^2, s = 16\,m$ হলে $v^2 = u^2 + 2fs \Rightarrow v^2 = 10^2 + 2(-3)\times16$

$\Rightarrow v^2 = 4 \therefore v = 2\,m/s$

06. বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ-
$s = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t$ হলে–

(i) ১ম সেকেন্ডে অর্জিত বেগ 6 একক
(ii) ১ম সেকেন্ডে অর্জিত ত্বরণ 4 একক
(iii) বস্তুটি 2 একক ত্বরণে যাত্রা শুরু করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $s = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t, v = \frac{ds}{dt}$

$= \frac{1}{3}.3t^2 + 2t + 3 \therefore v = t^2 + 2t + 3$

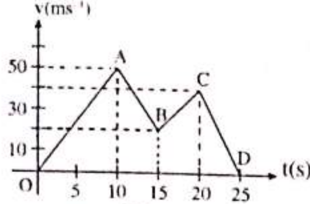
এবং $a = \frac{dv}{dt} = 2t + 2, t = 1$ sec

হলে, $v = 1^2 + 2.1 + 3 = 6$ একক, $t = 1$ sec

হলে, $a = 2\times1 + 2 = 4$ একক, $t = 0$ sec

হলে, $a = 2\times0 + 2 = 2$ একক $\therefore$ i, ii, iii সবই সত্য।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও: বেগ-সময় লেখচিত্রে সোজা রাস্তায় একটি বস্তুকণার গতিপথকে দেখানো হয়েছে।



07. BC অংশের ত্বরণ কত মিটার/সে² ?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) 4 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

সমাধান: (b); $B(15, 20)$ এবং $C(20, 40)$;
ত্বরণ, $f = \frac{40-20}{20-15} = \frac{20}{5} = 4\ m/s^2$

08. C বিন্দুতে বেগ কত মিটার/সে.?

(a) 2 (b) 20 (c) 40 (d) $\frac{1}{2}$

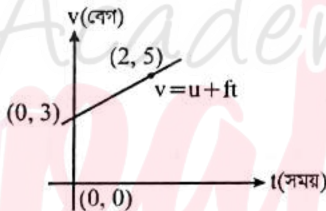
সমাধান: (c); চিত্র হতে C বিন্দুতে বেগ $v = 40\ m/s$

09. 15 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব কত মিটার?

(a) 20 (b) 175 (c) 425 (d) 600

সমাধান: (c); 15 sec- এ অতিক্রান্ত দূরত্ব
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 50 + \frac{1}{2}(50 + 20) \times (15 - 10) = 425\ m$

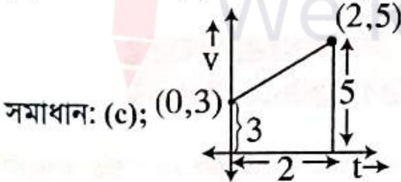
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও: বেগ-সময় লেখচিত্রে সোজা রাস্তায় একটি বস্তুকণার গতিপথকে দেখানো হয়েছে।



10. 2 একক সময়ে বস্তুকণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত?

(a) 2 (b) 5 (c) 8 (d) 16

সমাধান: (c);



2 একক সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = \frac{1}{2}(3 + 5) \times 2 = 8$ একক

11. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে-

(i) বস্তুকণাটির আদিবেগ 0 একক

(ii) বস্তুকণাটির ত্বরণ 1 একক

(iii) 1 একক সময়ে বস্তুকণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 4 একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) iii (d) ii, iii

সমাধান: (b); (i) আদিবেগ, $u = 3$ একক (ii) ত্বরণ, $f = \frac{5-3}{2-0} = 1$ একক (iii) তাহলে,
$s = 3t + \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 = 3t + \frac{t^2}{2}$, $t = 1$ sec হলে,
$s = 3 \times 1 + \frac{1^2}{2} = 3.5$ একক (ii) নং সত্য।

12. ভূমি হতে u আদিবেগে একটি বস্তু উল্লম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি সর্বাধিক কত উপরে উঠবে?

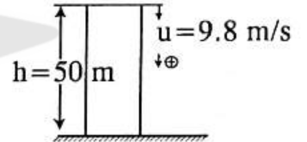
(a) $\frac{u^2}{g}$ (b) $\frac{u^2}{2g}$ (c) $\frac{u}{g}$ (d) $\frac{u}{2g}$

সমাধান: (b); সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g}$

13. $9.8\ ms^{-1}$ বেগে একটি বল 50 m উচ্চতা থেকে খাড়া নিচে নিক্ষিপ্ত হলো। বলটি ভূমিকে স্পর্শ করতে সময় লাগবে-

(a) 2s (b) 2.34s (c) 3.34s (d) 3.5s

সমাধান: (b);



$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$
$\Rightarrow 50 = 9.8t + 4.9t^2$
$\Rightarrow 4.9t^2 + 9.8t - 50 = 0 \therefore t = 2.34$ sec

14. অবাধে পড়ন্ত কোনো বস্তু 4-তম সেকেন্ডে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে?

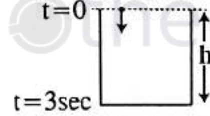
(a) 50.2 (b) 44.3 (c) 39.2 (d) 34.3

সমাধান: (d); $s_{th} = u + \frac{1}{2}g(2t - 1)$;
$s_{4th} = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8(2 \times 4 - 1) = 34.3\ m$

15. কুয়ার মুখ থেকে এক খন্ড পাথর এর তলদেশে পৌঁছতে 3 সেকেন্ড সময় লাগলে, তলদেশ থেকে কুয়ার মুখের উচ্চতা কত মিটার?

(a) 52.2 (b) 49.6 (c) 45.4 (d) 44.1

সমাধান: (d); $h = \frac{1}{2} \times gt^2$
$= 4.9 \times 3^2 = 44.1\ m$



16. একটি প্রক্ষেপককে কত আদিবেগে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা 50 ft হবে?

(a) 22.12 ft/s (b) 40 ft/s (c) 245 ft/s (d) 800 ft/s

সমাধান: (b); $R_{max} = \frac{u^2}{g} \Rightarrow 50 = \frac{u^2}{32} \therefore u = 40\ ft/s$

17. স্রোতের দ্বিগুণ গতিতে নৌকা চালিয়ে নদীর ঠিক অপর পাড়ে পৌঁছাতে হলে স্রোতের গতির দিকে কত কোণে চালাতে হবে?

(a) 150° (b) 120° (c) 90° (d) 45°

সমাধান: (b); $\cos\alpha = -\frac{\text{স্রোতের বেগ}}{\text{নৌকার বেগ}} = -\frac{\text{স্রোতের বেগ}}{2 \times \text{স্রোতের বেগ}}$
$= -\frac{1}{\alpha} \therefore \alpha = 120°$

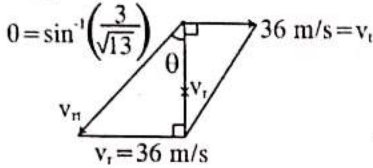
18. 36 মি./সে. বেগে চলন্ত একটি ট্রেনের যাত্রীর নিকট মনে হয় যে বৃষ্টির ধারা উল্লম্বের সাথে $\sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃষ্টির গতিবেগ কত মি./সে. হবে?

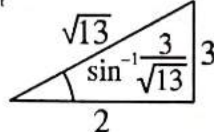
(a) 24 (b) 18 (c) 12 (d) 9

সমাধান: (a); বৃষ্টির প্রকৃত বেগ = v_r হলে,

$\theta = \tan^{-1}\frac{36}{v_r} = \sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{36}{v_r} = \tan^{-1}\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{36}{v_r} = \frac{3}{2} \therefore v_r = 24\ m/s$ nm





19. একটি গাড়ি স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে 180 মি./সে. গতিবেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ কত মি./সে.^{2}?

(a) 30 (b) 32 (c) 36 (d) 40

সমাধান: (c); $u = 0, t = 5\,sec$, $v = 180\,m/s$, এখন

$v = u + ft \Rightarrow 180 = 0 + f \times 5 \therefore f = 36\,m/s^2$

20. কোন স্তম্ভের শীর্ষ হতে 19.5 মি./সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত কোনো কণা 5 সে. পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা কত হবে?

(a) 50 (b) 30 (c) 25 (d) 20

সমাধান: (c); $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow h = -19.5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 25\ m$

21. একটি কণা u বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার আনুভূমিক পাল্লা বৃহত্তম উচ্চতার দ্বিগুণ হয় তবে তার আনুভূমিক পাল্লা কত?

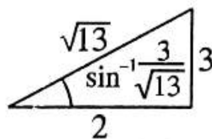
(a) $\frac{4u}{21}$ (b) $\frac{2u^2}{5g}$ (c) $\frac{4u^2}{5g}$ (d) $\frac{2u}{5g}$

সমাধান: (c); $\tan\alpha = \frac{4H}{R} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4H}{2H}$

$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2) \Rightarrow 2\alpha = 2\tan^{-1}(2) = \tan^{-1}\frac{2.2}{1-2^2}$

$\therefore 2\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = \sin^{-1}\frac{4}{5}; R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} =$

$\frac{u^2 \times \sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)}{g} = \frac{4u^2}{5g}$ [∵ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে sin অনুপাত ধনাত্মক কিন্তু tan অনুপাত ঋণাত্মক]

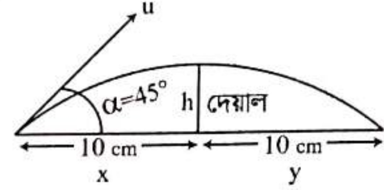


22. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ হতে ভূমি বরাবর 10 সে.মি দূরত্বে কোনো বিন্দু হতে 45° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি ঠিক দেয়ালের উপর দিয়ে গেল এবং দেয়ালের অপর পাশে 10 সে.মি দূরত্বে গিয়ে মাটিতে পড়ল। দেয়ালটির উচ্চতা কত?

(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 20 cm (d) 100 cm

সমাধান: (a); 45° কোণে দেয়াল থেকে x একক দূরে থেকে একটি বস্তু নিক্ষেপ করলে বস্তুটি যদি দেয়াল হতে y একক দূরত্বে অপর পার্শ্বে পড়ে তাহলে দেয়ালের উচ্চতা,

$h = \frac{xy}{x+y} = \frac{10\times10}{10+10} = 5$ cm [এখানে, $x = y = 10$ cm]



23. একটি বস্তু 39.2 মি./সে. বেগে ভূমির সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে কত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপের দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে?

(a) 10 sec (b) 8 sec (c) 6 sec (d) 4 sec

সমাধান: (b); বস্তুটি আদিবেগের সাথে লম্ব হবার সময়,

$t = \frac{u}{g\sin\alpha} \therefore t = \frac{39.2}{9.8\times\sin 30°} = 8$ sec

24. একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি পাথর 20 মি./সে. বেগে আনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত হলো। পাথরটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 100 মি. দূরত্বে ভূমিতে আঘাত করে, টাওয়ারের উচ্চতা কত?

(a) 102.5 m (b) 122.5 cm
(c) 124.5 cm (d) 126.5 m

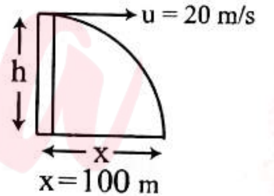
সমাধান: (b); $x = ut \Rightarrow 100 = 20t$

$\therefore t = 5$ sec $y = \frac{1}{2} \times gt^2$

$= 4.9 \times 5^2 = 122.5$ m;

বিকল্প, $y = \frac{gx^2}{2u^2}$

$\Rightarrow h = \frac{9.8\times100^2}{2\times20^2} = 122.5$ m

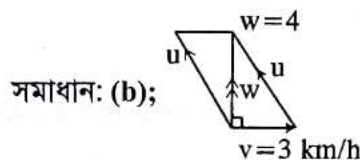


এস ইউ আহাম্মদ স্যার

25. নদীর স্রোতের বেগ 3 km/h নৌকার বেগ কত হলে নৌকাটি 4 km/h বেগে সোজা পথে নদী পাড়ি দিতে পারবে?

(a) 4 km/h (b) 5 km/h
(c) 4.5 km/h (d) কোনোটি নয়

সমাধান: (b);



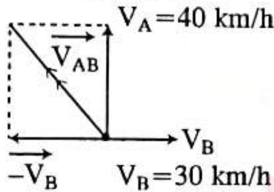
$u^2 = w^2 + v^2 = 4^2 + 3^2 \therefore u = 5$ km/h

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
1.5 km. প্রশস্ত একটি নদী 5 km/h বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। একজন সাঁতারু 6 km/h বেগে সাঁতার কেটে ন্যূনতম সময়ে নদী পাড়ি দিতে চায়।

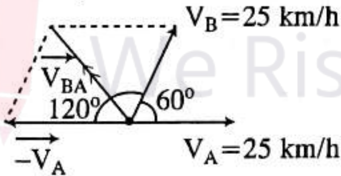
26. ন্যূনতম সময়ে নদী পাড়ি দেয়ার জন্য তীরের সাথে কত ডিগ্রী কোণে সাঁতার কাটতে হবে? **[Ans: b]**
(a) 60° (b) 90° (c) 100° (d) 120°

27. ন্যূনতম কত সময়ে সাঁতারু নদী পাড়ি দিতে পারবে?
(a) 10 মি. (b) 12 মি. (c) 15 মি. (d) 18 মি.
সমাধান: **(c)**; $t = \frac{d}{u} = \frac{1.5}{6} = 0.25\ hr = 15\ min$

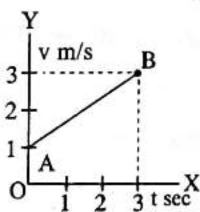
28. দুইটি বাস A ও B পরস্পর সমকোণে মিলিত দুইটি সোজা রাস্তা দিয়ে যথাক্রমে 40 km/h ও 30 km/h বেগে চলছে। B বাসের সাপেক্ষে A বাসের আপেক্ষিক বেগ কত?
(a) 25 km/h (b) 35 km/h
(c) 45 km/h (d) 50 km/h
সমাধান: **(d)**; $V_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$
$= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ km/h$



29. দুইটি সরলরেখা পরস্পর 60° কোণে ছেদ করছে। ছেদবিন্দু থেকে দুইটি কণা প্রত্যেকটি 25 km/h বেগে যাত্রা করল। এদের একটির তুলনায় অপরটির আপেক্ষিক বেগ কত?
(a) 20 km/h (b) 25 km/h (c) 27 km/h (d) 30 km/h
সমাধান: **(b)**; $V_{BA} = \sqrt{25^2 + 25^2 + 2.25.25 \cos 120^\circ}$
$\therefore V_{BA} = 25\ km/h$



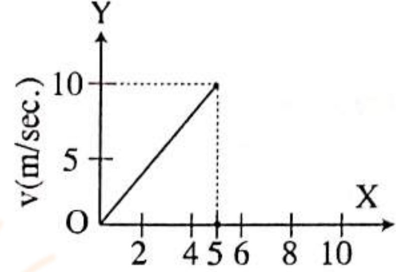
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



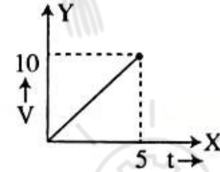
30. লেখাটির দ্বারা বুঝা যায়-
(i) সমত্বরণ (ii) সমবেগ (iii) বেগ বৃদ্ধির হার ধ্রুবক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

31. লেখের AB অংশে ত্বরণ-
(a) $\frac{1}{2}\ ms^{-2}$ (b) $1\ ms^{-2}$ (c) $1.5\ ms^{-2}$ (d) $\frac{2}{3}\ ms^{-2}$
সমাধান: **(d)**; A(0,1) এবং B(3,3) হলে
ত্বরণ, $f = \frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3} m/s^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



32. প্রথম 5 সেকেণ্ড সময়ে বস্তুটির ত্বরণ -
(a) $1.5\ m/sec^2$ (b) $2\ m/sec^2$
(c) $2.4\ m/sec^2$ (d) কোনোটিই নয়
সমাধান: **(b)**; ত্বরণ, $f = \frac{10}{5} = 2\ m/s^2$



33. বস্তুটির 10 সেকেণ্ড সময়ে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব -
(a) 50 m (b) 60 m (c) 70 m (d) 75 m
সমাধান: **(d)**; $s = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 + 5 \times 10 = 75\ m$



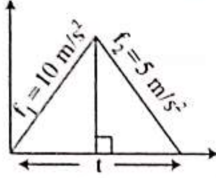
34. স্থির অবস্থান থেকে সোজা রাস্তায় একটি গাড়ি $8\ m/sec^2$ সমত্বরণে চলছে। 100 মিটার দূরে রাস্তার পাশে দাঁড়ানো একটি লোককে কত বেগে অতিক্রম করবে?
(a) 30 m/sec (b) 40 m/sec
(c) 42 m/sec (d) 45 m/sec
সমাধান: **(b)**; $v^2 = u^2 + 2fs$
$\Rightarrow v^2 = 0^2 + 2 \times 8 \times 100 \therefore v = 40\ m/s$

35. একটি বাস স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা করে সরল পথে চলে 240 m যায়। যাত্রাপথের ১ম অংশ $10\ m/sec^2$ সমত্বরণে এবং শেষ অংশ $5\ m/sec^2$ সমমন্দনে চলে কোনো রকমে সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করল। যাত্রাপথে বাসটির সর্বোচ্চ গতিবেগ কত?
(a) 20 m/sec (b) 30 m/sec
(c) 40 m/sec (d) 42 m/sec

সমাধান: **(c)**; $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{t^2}{2s} \Rightarrow \frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{t^2}{2\times240}$

$\therefore t = 12$ sec আবার, $S=\frac{1}{2}V_{max}t$

$\Rightarrow 240=\frac{1}{2}\times V_{max}\times 12 \therefore V_{max}=40\,m/s$



36. স্রোত না থাকলে এক ব্যাক্তি 100 m চওড়া নদী সাঁতার দিয়ে 4 মিনিটে পার হয় এবং স্রোত থাকলে সোজাসুজি নদী পার হতে তার এক মিনিট সময় বেশি লাগে। স্রোতের বেগ কত?

(a) 12 m/min (b) 15 m/min
(c) 18 m/min (d) 20 m/min

সমাধান: **(b)**; সাঁতারুর বেগ, $u=\frac{100}{4}=25$ m/min,

স্রোত থাকলে সোজাসুজি যেতে সময় $= 4+1=5$ min

$\therefore$ স্রোতের বেগ = v হলে, $t_{min,}$ distance $=\frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$

$\Rightarrow 5=\frac{100}{\sqrt{25^2-v^2}} \Rightarrow 25^2-v^2=20^2 \Rightarrow v^2=225$

$\therefore v = 15\,m/min$

37. একটি বস্তু একটি মিনারে চূড়া থেকে u বেগে খাড়া নিম্নদিকে ছোড়া হলে তা 4u বেগে ভূমিতে পতিত হলো। বস্তুটির পতন কাল কত?

(a) $\frac{u}{g}$ (b) $\frac{2u}{g}$ (c) $\frac{3u}{g}$ (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: **(c)**; $v=ut+\frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 4u=u+gt \Rightarrow t=\frac{3u}{g}$

38. h মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের ছাদ থেকে খাড়া উপরের দিকে একটুকরা পাথর ছোড়া হলে তা 10 সেকেন্ডে 58 m/sec বেগে ভূমিতে পড়ে। h এর মান কত?

(a) 70 m (b) 80 m (c) 90 m (d) 95 m

সমাধান: **(c)**; $v=-u+gt \Rightarrow 58$

$=-u+9.8\times10 \therefore u=40\,m/s$ $h=-ut+\frac{1}{2}gt^2$

$=-40\times10+4.9\times10^2 \therefore h=90$ m

39. নিচে তিনটি তথ্য দেয়া হলো:

(i) কোনো নির্দিষ্ট স্থানে অভিকর্ষ জনিত ত্বরণ g ধ্রুবক।

(ii) h ফুট উঁচু কোনো স্থান থেকে u বেগে খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু t সময়ে ভূমিতে পড়লে, $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$

(iii) ভূমি থেকে v বেগে সোজা উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থানকাল = পতন কাল = $\frac{v}{g}$.

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(b)**; (ii) $h=-ut+\frac{1}{2}gt^2 \therefore$ (ii) সত্য নয়

40. একটি ক্রিকেট বলকে 40 m/sec বেগে এবং ভূমির সাথে 60° কোণে ব্যাটদ্বারা আঘাত করা হলো। সর্বোচ্চ উচ্চতায় বলটির বেগ কত?

(a) 0 (b) 20 m/sec
(c) 30 m/sec (d) 40 m/sec

সমাধান: **(b)**; সর্বোচ্চ উচ্চতায় উলম্ব বেগ = 0

$\therefore$ আনুভূমিক বেগ, $v_x=v=u\cos\alpha=40\cos60°$

$\therefore v=20\,m/s$

41. আনুভূমিকের সাথে কত ডিগ্রি কোণে একটি বস্তু শূন্যে নিক্ষেপ করলে এর আনুভূমিক পাল্লা, সর্বোচ্চ উচ্চতায় 3 গুণ হবে?

(a) 45° (b) 50° (c) 53° (d) 60°

সমাধান: **(c)**; $\tan\alpha=\frac{4H}{r} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{4H}{3H}$

$\Rightarrow \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=53.13°\approx53°$

42. 44.1 m উঁচু একটি স্তম্ভ হতে একটি বস্তু 7m/sec বেগে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলে, তা কত সময়ে ভূমিতে পড়বে?

(a) 2 sec (b) 3 sec (c) 4 sec (d) 4.5 sec

সমাধান: **(b)**; $h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 44.1=4.9t^2 \therefore t=3$ sec

43. একটি সাদা ক্রিকেট বল P কোনো উঁচু দালানের ছাদ থেকে ফেলে দেয়া হলো এবং অন্য একটি লাল ক্রিকেট বল Q একই সময়ে একই স্থান থেকে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলো। কোনটি আগে ভূমি স্পর্শ করবে? **[Ans: c]**

(a) P বল (b) Q বল
(c) P ও Q বল একই সাথে (d) কোনটিই নয়।

44. একই বেগে এবং 45° কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর পাল্লা R ও সর্বাধিক উচ্চতা H হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক কোনটি?

(a) 2R = H (b) R = H (c) R = 2H (d) R = 4H

সমাধান: **(d)**; $\tan\alpha=\frac{4H}{R} \Rightarrow \tan45°=\frac{4H}{R}$

$\Rightarrow R=4H$

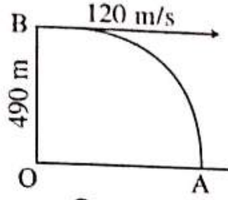
45. চারটি বল একই বেগে ভূমি থেকে একই সাথে 20°, 30°, 40°, 60° বিভিন্ন নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষেপ করা হলো। কোন বলটি সবার আগে ভূমিতে ফিরে আসবে?

(a) 20° কোণে নিক্ষিপ্ত বল (b) 30° কোণে নিক্ষিপ্ত বল
(c) 40° কোণে নিক্ষিপ্ত বল (d) 60° কোণে নিক্ষিপ্ত বল

সমাধান: **(a)**; $T=\frac{2u\sin\alpha}{g}$; $\sin\alpha$ minimum হলে T minimum হবে $\alpha=20°$ হলেই $\sin\alpha$ সর্বোচ্চ হবে।

$\therefore$ 20° কোণে নিক্ষিপ্ত বল সবার আগে ভূমিতে ফিরবে।

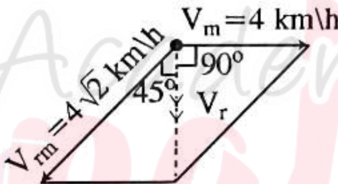
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি বোমারু ভূমি হতে 490 m উচ্চতায় ভূমির সমান্তরালে 120m/s বেগে একটি বোমা ফেলে দিল। ভূপৃষ্ঠের উপর A একটি বিন্দু।



46. বোমাটি কত সময়ে A বিন্দুতে আঘাত করবে?
(a) 2 sec (b) 3.5 sec (c) 5 sec (d) 10 sec
সমাধান: (d); $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 490 = 4.9 \times t^2$
$\therefore t = 10$ sec

47. O এবং A এর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) 400 m (b) 490 m (c) 900 m (d) 1200 m
সমাধান: (d); $OA = x = ut = 120 \times 10 = 1200$ m

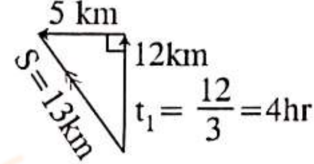
48. একটি লোক 4 km/h বেগে সোজা পূর্বদিকে যাওয়ায় সময় দেখল বাতাস উত্তর পূর্বদিক হতে $4\sqrt{2}$ km/h বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। বাতাসের প্রকৃত গতিবেগ-
(a) 4 km/h (b) 3 km/h
(c) 3.5 km/h (d) 5 km/h
সমাধান: (a); $\overline{v_r} = \overline{v_m} + \vec{v}_{rm}$
$\Rightarrow v_r \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2 + 2.4.4\sqrt{2}\cos 135^\circ} = 4$ km/h



49. একজন ক্রিকেটার ব্যাটের আঘাতে একটি বলকে সর্বাধিক 100 m আনুভূমিক দূরত্বে নিক্ষেপ করতে পারে। সে একই বেগে ভূমি থেকে বলটি সর্বাধিক কত উঁচুতে নিক্ষেপ করতে পারবে?
(a) 25 m (b) 50 m (c) 80 m (d) 100 m
সমাধান: (b); $R_{max} = \frac{u^2}{g}$
$\Rightarrow u = \sqrt{R_{max} \times g} = \sqrt{100 \times 9.8} = 31.3$ m/s
$\Rightarrow H = \frac{u^2}{2g} = \frac{31.3^2}{2\times 9.8} \approx 50$ m

50. 200 m এবং 300 m দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একটি দিকে একই সময়ে দুইটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40 kmh^{-1} এবং 30 kmh^{-1} বেগে যাত্রা করল। কত সময়ে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে?
(a) 2 min (b) 3 min (c) 4 min (d) 45 min
সমাধান: (b);মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = 200 + 300 = 500$ m $= 0.5$ km আপেক্ষিক বেগ, $v_r = 40 - 30 = 10$ km/h সময়, $t = \frac{s}{v_r} = \frac{0.5}{10} = 0.05$ hr $= 3$ min

51. এক ব্যক্তি 3 km/h বেগে উত্তর দিকে 12 km হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 150 মিনিটে 5 km পথ হাঁটল। ঐ ব্যক্তির গড় বেগ কত?
(a) $\frac{11}{6}$ km/h (b) $\frac{2}{3}$ km/h
(c) 2.61 km/h (d) 2 km/h
সমাধান: (d); $t = \frac{150}{60} = 2.5$ hr, $t_1 = \frac{12}{3} = 4$ hr গড় বেগ= $\frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}} = \frac{13}{4+2.5} = 2$ km/hr



52. একটি ট্রেন স্টেশন A থেকে স্থিতাবস্থায় যাত্রা করে ধ্রুব ত্বরণে 15s চলে 22 ms^{-1} বেগে সিগনাল বক্স B অতিক্রম করল। ট্রেনটিকে একটি কণা বিবেচনা করলে A ও B এর দূরত্ব কত?
(a) 330 m (b) 330 m (c) 185 m (d) 165 m
সমাধান: (d); $v = ft \Rightarrow 22 = f \times 15$
$\Rightarrow f = \frac{22}{15} m/s^2, s = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{15} \times 15^2$
$\therefore s = 165$ m

53. কোন বস্তুর গড় বেগ বলতে বুঝায় আদি ও শেষ বেগের–
(a) ভাগফল (b) গুণফল (c) পার্থক্য (d) গড়

54. u বেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতা–
(a) $\frac{u^2 \sin 2\alpha}{2g}$ (b) $\frac{u^2 \cos 2\alpha}{2g}$ (c) $\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ (d) $\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$
সমাধান: (c); $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

55. একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষেপ করলে নির্দিষ্ট বিন্দু P-তে পৌঁছাতে t_1 সময় লাগে। যদি আরও t_2 সময় পর বস্তুটি ভূমিতে পতিত হয় তবে কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে–
(a) $\frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$ (b) $\frac{1}{8}g(t_1 + t_2)^2$
(c) $\frac{1}{2}g(t_1^2 + t_2^2)$ (d) $\frac{1}{8}g(t_1^2 + t_2^2)$
সমাধান: (b); $h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$
[t এর দ্বিঘাত সমীকরণ যার মূলদ্বয় t_1 ও t_2] তাহলে,
$t_1 + t_2 = -\frac{2u}{g} \Rightarrow u = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$
$\therefore$ সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{\{\frac{1}{2}g(t_1+t_2)\}^2}{2g} = \frac{1}{8}g(t_1 + t_2)^2$

56. একটি গাড়ি স্থিতাবস্থা হতে সমত্বরণে চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে 180 মি./সে. গতিবেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ–
(a) 36 m/sec^2 (b) 42 m/sec^2
(c) 30 m/sec^2 (d) 40 m/sec^2
সমাধান: (a); $v = u + ft \Rightarrow 180 = 0 + f \times 5$
$\therefore f = 36 m/s^2$

57. প্রক্ষেপকের ভ্রমণকাল T, আনুভূমিকের সঙ্গে প্রক্ষেপণ কোণ α হলে $\frac{T^2}{R}$ সমান–
(a) $\frac{2}{g}\tan\alpha$ (b) $\frac{2}{g}\cot\alpha$ (c) $\frac{g}{2}\tan\alpha$ (d) $\frac{g}{2}\cot\alpha$
সমাধান: **(a)**; $\frac{T^2}{R} = \frac{\left(\frac{2u\sin\alpha}{g}\right)^2}{\frac{u^2\sin2\alpha}{g}} = \frac{\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2}}{\frac{u^2.2\sin\alpha\cos\alpha}{g}} = \frac{2}{g}\tan\alpha$

58. প্রক্ষেপকের উত্থানকাল t এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা H হলে, $\frac{H}{t^2}$ = কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{g}{2}$ (d) $\frac{1}{2g}$
সমাধান: **(c)**; $\frac{H}{t^2} = \frac{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}}{\left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right)^2} = \frac{g}{2}$

59. একটি প্রক্ষেপককে কত আদিবেগে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক আনুভূমিক পাল্লা 90 মিটার হবে, যেখানে $g = 10\ m/sec^2$
(a) 30 m/sec (b) 40 m/sec
(c) 90 m/sec (d) 50 m/sec
সমাধান: **(a)**; $R_{max} = \frac{u^2}{g} \Rightarrow u = \sqrt{R_{max}\times g}$
$= \sqrt{90\times10} = 30\ m/s$

60. স্থিরাবস্থা হতে খাড়া নিম্নমুখী গমনের ক্ষেত্রে পতনকাল কত?
(a) $\sqrt{\frac{h}{g}}$ (b) $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (c) $\sqrt{\frac{h}{2g}}$ (d) $\sqrt{\frac{g}{h}}$
সমাধান: **(b)**; $h = \frac{1}{2}gt^2 \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

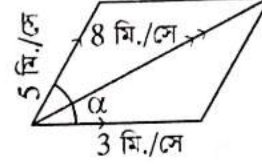
অসীম কুমার সাহা স্যার

61. $15ms^{-1}$ বেগে ও আনুভূমিকের সাথে 37° কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগ কত সময় পর আদিবেগের সাথে সমকোণে থাকবে?
(a) 2.54 (b) 3.29 (c) 4.2 (d) 5.17
সমাধান: **(a)**; $t = \frac{u}{g\sin\alpha} = \frac{15}{9.8\times\sin37°} = 2.54$ sec

62. একটি প্রক্ষেপক নিক্ষেপ করার 3s পর একটি খুঁটির ঠিক উপর দিয়ে অতিক্রম করে এবং পরবর্তী 5s পর ভূমিতে পতিত হয়। খুঁটির দৈর্ঘ্য কত মিটার?
(a) 73.5 (b) 85.5 (c) 107.5 (d) 147
সমাধান: **(a)**; খুটির উচ্চতা, $h = \frac{1}{2}gt_1t_2$
$= \frac{1}{2}\times9.8\times3\times5 = 73.5$ m

63. একটি বুলেট কোন দেয়ালে 6 cm ঢুকার পর 60% বেগ হারায়। বুলেটটি দেয়ালের ভিতর আর কতদূর প্রবেশ করবে? **[Ans: c]**
(a) $\frac{5}{9}$ cm (b) $\frac{6}{11}$ cm (c) $\frac{8}{7}$ cm (d) $\frac{11}{5}$ cm
সমাধান: **(c)**; বেগের হারানো অংশ $= \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$
∴ বেগের অবশিষ্ট অংশ $= \frac{1}{n} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \therefore n = \frac{5}{2}$
∴ আর প্রবেশ করবে, $s_1 = \frac{s}{n^2-1} = \frac{6}{\left(\frac{5}{2}\right)^2-1} = \frac{8}{7}$ cm

64. আনুভূমিক পাল্লা R সর্বাধিক হলে, সর্বাধিক উচ্চতা কত?
(a) $\frac{R}{2}$ (b) $\frac{R}{3}$ (c) $\frac{R}{4}$ (d) $\frac{R}{5}$
সমাধান: **(c)**; পাল্লা সর্বোচ্চ হলে, α = 45° তাহলে,
$\tan45° = \frac{4H}{R} \Rightarrow 1 = \frac{4H}{R} \therefore H = \frac{R}{4}$

65. 

উপরের চিত্র হতে বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে-
(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 120°
সমাধান: **(a)**; $8^2 = 3^2 + 5^2 + 2.3.5\cos\alpha$
$\Rightarrow \cos\alpha = 1 \therefore \alpha = 0°$
Shortcut: $3 + 5 = 8 \therefore R = P + Q$
∴ লব্ধি সর্বোচ্চ ∴ α = 0°

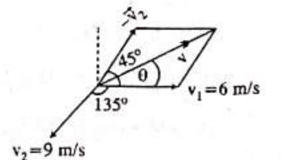
66. একটি রাইফেলের পাল্লা 900 মিটার। চন্দ্রের মাধ্যাকর্ষণ শক্তি পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তির $\frac{1}{6}$ হলে চন্দ্র পৃষ্ঠে রাইফেলের পাল্লা কত মিটার হবে?
(a) 3500 (b) 4500 (c) 5050 (d) 5400
সমাধান: **(d)**; $R_1 = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = 900; R_2 = \frac{u^2\sin2\alpha}{\frac{g}{6}}$
$= 6\frac{u^2\sin2\alpha}{g} = 6R_1 = 6\times900 \therefore R_2 = 5400$ m

67. u ও v দুইটি বেগ এবং এদের লব্ধি বেগ $\sqrt{u^2+v^2}$ হলে মধ্যবর্তী কোণ কত হবে?
(a) 0° (b) 60° (c) 90° (d) 120°
সমাধান: **(c)**; $\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$
$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \therefore \alpha = 90°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$6ms^{-1}$ বেগে একটি জাহাজ পূর্বদিকে এবং $9ms^{-1}$ বেগে অপর একটি জাহাজ দক্ষিণ পশ্চিমে চলছে। ২য় জাহাজের সাপেক্ষে ১ম জাহাজের আপেক্ষিক বেগ v এবং উত্তর দিকের সাথে v এর অন্তর্গত কোণ θ।

68. v এর মান কত মিটার/সেকেন্ড?
(a) 7.37 (b) 10.29 (c) 13.9 (d) 14.92
সমাধান: **(c)**; $v^2 = 6^2 + 9^2 + 2.6.9\cos45°$
$\therefore v = 13.9\ m/s$

69. θ এর মান কত ডিগ্রী?
(a) 27.24 (b) 36.87 (c) 42.38 (d) 62.76
সমাধান: **(d)**;
উত্তর দিকের সাথে কোণ = 90° − θ
$= 90° - \tan^{-1}\left(\frac{v_2\sin\alpha}{v_1+v_2\cos\alpha}\right)$
$= 90° - \tan^{-1}\left(\frac{9\sin45°}{6+9\cos45°}\right)$
$= 62.76°$



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
একজন সাইকেল আরোহী স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা আরম্ভ করে প্রথম সেকেন্ডে 1 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

70. সাইকেল আরোহী কত মিটার/সেকেন্ড² ত্বরণে চলে?
(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5
সমাধান: **(b)**; $s_1 = \frac{1}{2}f(2t-1)$
$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \times f \times (2 \times 1 - 1) \therefore f = 2\,m/s^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে একটি পাথর খণ্ডকে আনুভূমিকের দিকে 64 মি./সে. বেগে নিক্ষেপ করা হলো। পাথর খণ্ডটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 320 মিটার দূরে ভূমিকে আঘাত করে।

71. কত সেকেন্ড পরে পাথর খণ্ডটি ভূমিকে আঘাত করবে?
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5
সমাধান: **(d)**; $x = ut \Rightarrow t = \frac{x}{u} = \frac{320}{64} = 5$ sec

72. u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু h উচ্চতায় আসার দুটি সময়ের পার্থক্য কত?
(a) $\sqrt{u^2 - 2gh}$ (b) $\frac{g}{2}\sqrt{u^2 - 2gh}$
(c) $\frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$ (d) $g\sqrt{u^2 - 2gh}$
সমাধান: **(c)**; $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$
$\Rightarrow gt^2 - 2ut + 2h = 0$ ... (i) সময় দুইটি t_1 ও t_2 হলে (i) মূলদ্বয় এর t_1 ও t_2; $t_1 + t_2 = -\frac{-2u}{g} \therefore t_1 + t_2 = \frac{2u}{g} \Rightarrow t_1t_2 = \frac{2h}{g}$ তাহলে, $(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 \Rightarrow (t_1 - t_2)^2 = \left(\frac{2u}{g}\right)^2 - 4.\frac{2h}{g} = \frac{4}{g^2}(u^2 - 2gh) \therefore t_1 - t_2 = \frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

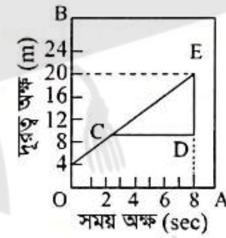
73. একটি বস্তুকে কোন উঁচু স্থান থেকে ছেড়ে দেওয়া হলো। 5 সেকেন্ডে বস্তুটি ভূমিতে পৌছাতে না পারলে, উক্ত সময় পর্যন্ত বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কত?
(a) 50 m (b) 80 m (c) 100.5 m (d) 122.5 m
সমাধান: **(d)**; $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 122.5$ m

74. 9.8 m/s বেগে এক খন্ড পাথরকে খাড়া উপরের দিকে ছোড়া হলে-
(i) সর্বোচ্চ উচ্চতায় এর বেগ শূন্য হবে
(ii) এর সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে 4.9 মিটার
(iii) পাথরটি 2 সেকেন্ড পরে ভূমিতে ফিরে আসবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(d)**; (i) সর্বোচ্চ উচ্চতায় বেগ = 0
(ii) $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{9.8^2}{2 \times 9.8} = 4.9$ m (iii) $T = \frac{2u}{g} = \frac{2 \times 9.8}{9.8} = 2$ sec $\therefore$ (i), (ii), (iii) সবগুলোই সত্য

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
ভূমির সাথে 45° কোণে u আদি বেগে একটি বস্তু কণা তির্যকভাবে নিক্ষেপ করা হল। t সময় পরে বস্তুটি ভূমিতে ফিরে আসে।

75. উলম্ব দিকে u এর অংশক কোনটি?
(a) $\frac{u}{2}$ (b) $\frac{u}{3}$ (c) $\frac{u}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{u}{\sqrt{3}}$
সমাধান: **(c)**; $u_y = u\sin\alpha = u\sin 45° = \frac{u}{\sqrt{2}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



উপরের চিত্রটি সমবেগ সম্পন্ন একটি বস্তুর গতির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

76. বস্তুটির আদি দূরত্ব কত?
(a) 2 m (b) 4 m (c) 6 m (d) 8 m
সমাধান: **(b)**; লেখচিত্র হতে দেখা যায় যখন $t = 0$ তখন $s = 4$ m

77. বস্তুটির বেগ কত?
(a) 2 m/s (b) 4 m/s (c) 8 m/s (d) 16 m/s
সমাধান: **(a)**; বস্তুটির ওজন $t = 0$ হলে, $s = 4$ m;
$t = 8$ sec হলে $s = 20$ m
$\therefore$ বস্তুটির বেগ, $v = \frac{20-4}{8-0} = 2$ m/s

78. একজন ব্যক্তি কোন স্থানে যাওয়ার সময় ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে যায় এবং আসার সময় ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে ফেরত আসে। তার গড় গতিবেগ কত?
(a) 4.44 (b) 4.50 (c) 4.54 (d) 5.0
সমাধান: **(a)**; এখানে গড় বেগ বলতে আসলে গড় দ্রুতি বের করতে বলা হয়েছে। এক্ষেত্রে গড় দ্রুতি,
$\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 4.44$ mile/hr

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

79. 150 মিটার প্রস্থ একটি নদীতে স্রোত না থাকলে তা সোজাসুজি পার হতে 5 মিনিট সময় লাগলে সাঁতারুর বেগ কত মিটার/মিনিট?

(a) 35 (b) 25 (c) 30 (d) 20

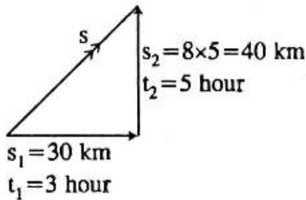
সমাধান: (c);সাঁতারুর বেগ $= \frac{s}{t} = \frac{150}{5} = 30$ m / min

80. একজন সাইকেল চালক সোজা পথে 3 ঘন্টায় 30 কি.মি. যাওয়ার পর প্রথম রাস্তার সাথে লম্বভাবে অপর একটি পথে 8 কি.মি./ঘন্টা বেগে 5 ঘন্টা চলল। তার গড় বেগ-

(a) 9 কি.মি./ঘন্টা (b) 6.25 কি.মি./ঘন্টা
(c) 8.75 কি.মি./ঘন্টা (d) 16.25 কি.মি./ঘন্টা

সমাধান: (b);$S_2 = 8 \times 5 = 40$ km, $t_2 = 5$ hr

গড় বেগ $= \frac{s}{t_1+t_2} = \frac{\sqrt{30^2+4\;^2}}{3+5} = 6.25$ km/hr



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

এক ব্যাক্তি তার 120 মিটার সামনে একটি বাসকে স্থিরাবস্থা থেকে সমত্বরণে ছাড়তে দেখে সমবেগে দৌড়াতে লাগল। লোকটি এক মিনিটে বাসটিকে কোন রকম ধরল।

81. লোকটির বেগ কত?

(a) 80 মিটার/মিনিট (b) 90 মিটার/মিনিট
(c) 100 মিটার/মিনিট (d) 240 মিটার/মিনিট

সমাধান: (d);লোকটি যখন কোন রকমে বাস ধরে তখন বাসের বেগ = ব্যাক্তির বেগ $\Rightarrow v = 0 + f \times 60$

$\therefore f = \frac{v}{60}$ ......(i) আবার, ব্যক্তির অতিক্রান্ত দূরত্ব, $120 + x = u \times 60 \Rightarrow 120 + \frac{1}{2} \times f \times 60^2 = 60v$ [u = v]

$\Rightarrow 120 + \frac{1}{2} \times \frac{v}{60} \times 60^2 = 60v$

$\therefore v = 4$ m/s $= 4 \times 60$ m/min $= 240$ m/min

82. বাসে ত্বরণ কত?

(a) $\frac{1}{36}ms^{-2}$ (b) $\frac{2}{3}$ ms^{-2} (c) $\frac{1}{15}ms^{-2}$ (d) $\frac{1}{6}ms^{-2}$

সমাধান: (c);$f = \frac{v}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}m/s^2$

83. স্রোত না থাকলে একটি ছেলে 5 মিনিটে সাঁতার কেটে সোজাসুজিভাবে 80 মিটার প্রশস্ত একটি খাল পার হতে পারে এবং স্রোত থাকলে তার দ্বিগুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ-

(a) 15 m/min (b) 12 m/min
(c) 16.5 m/min (d) 13.86 m/min

সমাধান: (d);সাঁতারুর বেগ, $u = \frac{80}{5} = 16$ m/min;

স্রোত থাকলে সময় $2 \times 5 = \frac{s}{\sqrt{u^2-v^2}}$

$\Rightarrow 2 \times 5 = \frac{80}{\sqrt{16^2-v^2}} \Rightarrow 16^2 - v^2 = 64$

$\therefore v = 13.86$ m / min [v = স্রোতের বেগ]

84. একটি চলন্ত ট্রেনকে ব্রেক করে 10 সেকেন্ড থামিয়ে দেওয়া হলো। ট্রেনটির গড় মন্দন 70 m/ sec^2 হলে, এর গতিবেগ কত ছিলো?

(a) 1000 m/sec (b) 800 m/sec
(c) 700 m/sec (d) 500 m/sec

সমাধান: (c);$v = u - ft \Rightarrow 0 = u - 70 \times 10$

$\therefore u = 700$ m / sec

85. একটি বস্তু বিনা বাধায় শুধুমাত্র মধ্যাকর্ষণের প্রভাবে খাড়া নিচের দিকে নামা অবস্থায় 128 ft দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দু 2 সেকেন্ডে অতিক্রম করে। উপরের বিন্দু হতে কত উচ্চতায় বস্তু নিচের দিকে নামা শুরু করেছিল।

(a) 13 ft (b) 19 ft (c) 21 ft (d) 16 ft

সমাধান: (d);$h_2 - h_1 = 128 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 128$

$\Rightarrow \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) = 128$

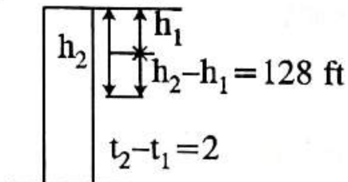
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 32 \times (t_2 + t_1).(t_2 - t_1) = 128$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 32 \times (t_1 + t_2) \times 2 = 128$

$\therefore t_1 + t_2 = 4$ এখন, $t_2 + t_1 = 4, t_2 - t_1 = 2$

$\therefore t_2 = 3$ sec, $t_1 = 1$ sec

$\therefore h_1 = \frac{1}{2} \times g \times t_1^2 = \frac{1}{2} \times 32 \times 1^2 = 16$ ft



86. u আদিবেগে ও আনুভূমিকের সঙ্গে α কোণে একটি কণা নিক্ষেপ করা হল। যদি সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছার সময়কাল t এবং বিচরণকাল T হয়, তবে নিচের কোনটি সত্য? **[Ans: a]**

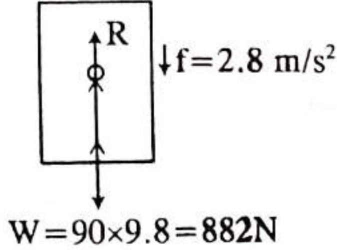
(a) T = 2t (b) T > 2t
(c) T < 2t (d) কোনোটিই নয়

87. একটি লিফট $2.8\ ms^{-2}$ ত্বরণে নিচের নামছে। লিফটের মধ্যে দাঁড়ানো একজন ব্যক্তির ভর 90 kg হলে, তিনি যে ওজন অনুভব করবেন-

(a) 252 N (b) 630 N (c) 882 N (d) 1134 N

সমাধান: (b); $\sum F = mf \Rightarrow W - R = mf$

$\Rightarrow 882 - R = 90 \times 2.8 \therefore R = 630$ N



88. 4 গ্রাম ভরের একটি বস্তুকণা 6 মিটার উচ্চ স্থান হতে পতিত হয়ে কাঁদায় 5 সে.মি. প্রবেশ করে স্থির হয়ে পড়ল। ভরটির উপর কাঁদার গড় ধাক্কা পরিমাণ কত?

(a) 18.973 N (b) 9.486 N
(c) 4.7432 N (d) 2.3716 N

সমাধান: (c); $m = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$ kg, $h = 6$ m,

$x = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$;

$F = mg\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{250} \times 9.8\left(1 + \frac{6}{\frac{1}{20}}\right)$

$\therefore F = 4.7432$ N

◆ **MCQ:** সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. একটি বস্তুকণা সুষম বেগে চললে এর ত্বরণ কি হবে? [Ans: d]

(a) ধনাত্মক (b) ঋণাত্মক
(c) সুষম (d) কোন ত্বরণ হবে না

02. যদি একটি বস্তু কণা u আদিবেগে যাত্রা করে সমত্বরণে চলে t সময়ে v বেগ প্রাপ্ত হয় তাহলে নিচের কোনটি সঠিক? [Ans: a]

(a) $v = u + ft$ (b) $v = u - ft$
(c) $u = v + ft$ (d) $u = v - ft$

03. 45° কোণে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা ও সর্বোচ্চ উচ্চতা যথাক্রমে R ও H হলে কোন সম্পর্কটি সত্য হবে?

(a) $2R = H$ (b) $R = H$ (c) $R = 2H$ (d) $R = 4H$

সমাধান: (d); $\tan\theta = \frac{4H}{R}$

04. $s = t^3 + 5t^2 + 7$ হলে, 4 সেকেন্ড পরে ত্বরণ কত?

(a) 34 (b) 88 (c) 118 (d) 54

সমাধান: (a); $a = \frac{d^2s}{dt^2} = 3.2.t + 10 = 6t + 10$

$\therefore$ 4s পরে ত্বরণ $= 24 + 10 = 34$

05. একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি পাথরের টুকরা ছেড়ে দেয়ার পর তা 18 মিঃ/সেঃ বেগে কূপের তলদেশে পতিত হয়। কূপের গভীরতা কত?

(a) 9.18 মি: (b) 1.836 মি:
(c) 16.53 মি: (d) 33.06 মি:

সমাধান: (c); $v = gt$; $t = \frac{v}{g}$; $h = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 \therefore h = 16.53$m

06. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে সরলপথে চলে 3 সেকেন্ডে 2 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে এবং পরবর্তী কিছু দূরত্ব সমবেগে যায়। প্রথম 3 সেকেন্ড পরে কণাটির বেগ কত?

(a) $\frac{1}{3}$ m/sec (b) $\frac{4}{3}$ m/sec
(c) $\frac{2}{3}$ m/sec (d) $\frac{1}{4}$ m/sec

সমাধান: (b); $s = \left(\frac{0+v}{2}\right)t \therefore v = \frac{2s}{t} = \frac{4}{3}$

07. একটি বস্তুকে উঁচু কোন স্থানে থেকে ছেড়ে দেওয়া হলে তা এক সেকেন্ডে যে দূরত্বে নিচে নামবে, তা হলো-

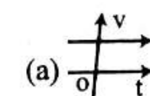
(a) 4.9 মিটার (b) 9.8 মিটার
(c) −4.9 মিটার (d) −9.8 মিটার

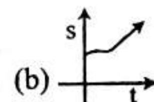
সমাধান: (a); $h = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9$m

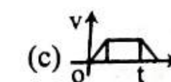
08. u ও f ধ্রুবক হলে $v^2 = u^2 + 2fs$ এর লেখচিত্রটি হবে [Ans: a]

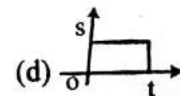
(a) পরাবৃত্ত (b) উপবৃত্ত
(c) অধিবৃত্ত (d) বৃত্ত

09. অসম ত্বরণে গতিশীল বস্তুকণার t বনাম v বা (t − v) লেখ কোনটি? [Ans: c]

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

10. একটি বিড়াল 21 মিটার দূরে একটি ইঁদুর দেখে তাকে ধরার জন্য স্থিরাবস্থা থেকে 2 মি./সে.^{2} সমত্বরণে দৌড়াতে লাগল। যদি ইঁদুরটি 20 মি./সে. সমবেগে দৌড়াতে থাকে, তবে কত সেকেন্ড পরে বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে?
(a) 20 (b) 21 (c) 24 (d) 30
সমাধান: **(b)**;বিড়ালের সরণ = ইঁদুরের সরণ +21
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 = 20t + 21 \Rightarrow t^2 - 20t - 21 = 0$
$\therefore t = 21$ Or, $t = -1 \therefore 21s$- এ বিড়াল ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে।

11. একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তু 10 মিটার দূরে অবস্থিত 3 মিটার একটি খাড়া দেওয়াল কোনো রকমে ভূমির সমান্তরালে অতিক্রম করতে 5 সে. সময় নেয়। বস্তুটির —
(i) আনুভূমিক পাল্লা 20 মিটার
(ii) বৃহত্তম উচ্চতা 3 মিটার
(iii) বিচরণকাল 5 সে.
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(a)**; (3m, 10m) ; ভূমির সমান্তরালে অতিক্রম করে সর্বোচ্চ উচ্চতা।
$\therefore$ সর্বোচ্চ উচ্চতা 3 মিটার। $\therefore$ পাল্লা $= (10 \times 2) = 20$ মিটার। $\therefore$ বিচরণকাল $= (5 \times 2) = 10$ সে.।

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি গাড়ী $50ms^{-1}$ বেগে চলছিল। গাড়ীর চালক ব্রেক চাপায় $5ms^{-2}$ মন্দন সৃষ্টি হয়।

12. 8 সেকেন্ড পর গাড়ির বেগ কত?
(a) $10ms^{-1}$ (b) $40ms^{-1}$
(c) $60ms^{-1}$ (d) $90ms^{-1}$
সমাধান: **(a)**;$v = 50 - 5 \times 8 = 10ms^{-1}$

13. থামার পূর্বে গাড়ীটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?
(a) 5m (b) 10m
(c) 200m (d) 250m
সমাধান: **(d)**;$0^2 = 50^2 - 2 \times 5 \times s \therefore s = 250m$

14. $9.8ms^{-1}$ বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু সর্বাধিক কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?
(a) 1.5m (b) 3m
(c) 4.9m (d) 9.8m
সমাধান: **(d)**;$R_{max} = \frac{u^2}{g} = 9.8m$

15. একটি গাড়ি 5 মিটার/সে. বেগে সুষম ত্বরণে সোজা পথে 100 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করার পর 25 মিটার/সে. বেগ প্রাপ্ত হলে গাড়িটির ত্বরণ কত? **[Ans: c]**
(a) 1.5 মি/সে.^{২} (b) 2 মি/সে.^{২}
(c) 3 মি/সে.^{২} (d) 2.5 মি/সে.^{২}

16. স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ v. যদি নৌকাটি স্রোতের বিপরীত দিকে চলে তবে স্রোতের সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ কত?
(a) $u - v$ (b) $v - u$ (c) $u + v$ (d) 2v
সমাধান: **(c)**;$R.V = u - (-v) = u + v$

17. কোন বস্তুকণা সমবেগে 5 সেকেন্ডে 45 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করলে বেগ কত মি/সে হবে?
(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9
সমাধান: **(d)**;$v = \frac{s}{t} = \frac{45}{5} = 9$

18. ত্বরণ– **[Ans: d]**
(i) একটি ভেক্টর রাশি
(ii) f বা a দ্বারা প্রকাশ করা হয়
(iii) শূন্য হয় সুষম বেগের ক্ষেত্রে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

19. স্থির অবস্থা হতে কণার ১ম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব কোনটি? **[Ans: b]**
(a) ত্বরণের সমান (b) ত্বরণের অর্ধেক
(c) ত্বরণের দ্বিগুণ (d) ত্বরণের বর্গ

20. বায়ুহীন অবস্থায় আনুভূমিকের সাথে α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা R হলে উহার গতিপথের সমীকরণ কোনটি? **[Ans: a]**
(a) $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ (b) $x = y\tan\alpha\left(1 - \frac{y}{R}\right)$
(c) $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{R}{x}\right)$ (d) $x = y\tan\alpha\left(1 - \frac{R}{y}\right)$

21. (লেখচিত্র: $V(ms^{-1})$ বনাম t(s); 6, 0, 3, 11) উপরের বেগ Vs সময় লেখচিত্রের একটি বস্তুকণার গতিপথ দেখানো হয়েছে। **[Ans: b]**
(i) কণাটি প্রথম 3 সেকেন্ড সমত্বরণে চলে 6মি./সে. বেগ প্রাপ্ত হয়, অত:পর পরবর্তী 8 সেকেন্ড সমমন্দনে চলে থেমে যায়
(ii) প্রথম 3 সেকেন্ড কণাটি 0.5 মি./সে^{2} সমত্বরণে চলে
(iii) কণাটি কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব = 33 মি.
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

22. প্রক্ষেপকের উত্থানকাল t, সর্বোচ্চ উচ্চতা H হলে $\frac{H}{t^2} = ?$
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{g}{2}$ (d) $\frac{1}{2g}$
সমাধান: **(c)**;$H = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{H}{t^2} = \frac{1}{2}g$

23. $30ms^{-1}$ বেগে আনুভূমিকে চলন্ত একটি ক্রিকেট বলকে তার বেগের সাথে সমকোণে ব্যাট দ্বারা আঘাত করলে তা $50ms^{-1}$ বেগ প্রাপ্ত হলো। ব্যাটের আঘাতের বেগ কত?
(a) $40ms^{-1}$ (b) $35ms^{-1}$ (c) $30ms^{-1}$ (d) $25ms^{-1}$
সমাধান: (a); $30^2 + v^2 = 50^2 \therefore v = 40ms^{-1}$

24. অসমবেগ ও অসমত্বরণ- [Ans: a]
(i) সময়ের সাথে ভিন্ন ভিন্ন হয়
(ii) উভয়ই ভেক্টর রাশি
(iii) সময়ের সাথে পরিবর্তন হয় না
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

25. একটি বুলেট 4 মি./সে. আদি বেগে দেওয়ালের মধ্যে 2 মিটার প্রবেশ করে থেমে যায়।বুলেটটির মন্দন কত মি./সে ^{2} ?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
সমাধান: (d); $0 = u^2 - 2as \Rightarrow \frac{u^2}{2s} = a$

26. 60° কোণে ক্রিয়াশীল 1 এবং 2 একক মানের দুটি বেগের প্রথমটির সাপেক্ষে দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ কত?
(a) $\sqrt{3}$ (b) 2 (c) $\sqrt{7}$ (d) 7
সমাধান: (a); 60° ; আপেক্ষিক বেগ =
$\sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60°} = \sqrt{3}$

27. 15 মিটার গভীর একটি শূন্য কূপের উপরিতল থেকে 5 মিটার উঁচু কোন স্থান থেকে একটি পাথর ফেলে দেবার কতক্ষণ পরে শব্দ শোনা যাবে? [শব্দের বেগ 342 মি./সে.]
(a) 2.08 সে. (b) 2.05 সে. (c) 1.49 সে. (d) 1.05 সে.
সমাধান: (a); $h = 20, g = 9.8$; $h = \frac{1}{2}gt_1^2$
$\therefore t_1 = 2.020305$ .... $s = vt_2$
$\frac{20}{342} = t_2; t_2 = .0584$; $t_1 + t_2 = 2.07878 = 2.08s$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একজন বৈমানিক 4900 মিটার উপর দিয়ে 35 মি/সে. বেগে উড়ে যাবার সময় একটি বোমা ফেলে দিল।

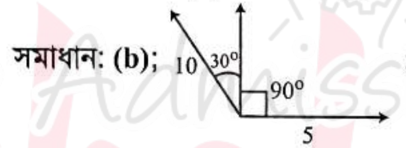
28. কত সময় পরে বোমাটি ভূমিতে পড়বে?
(a) 31.62 সে. (b) 29.60 সে.
(c) 19.06 সে. (d) 9.80 সে.
সমাধান: (a); $h = \frac{1}{2}gt^2 \therefore 4900 = 4.9t^2$
$\therefore t = 31.62sec$

29. বোমাটি যে বস্তুতে আঘাত করবে, তার আনুভূমিক দূরত্ব কত?
(a) 798.08 মিটার (b) 1002.32 মিটার
(c) 1106.70 মিটার (d) 1906.60 মিটার
সমাধান: (c); $s = 35 \times 31.62 = 1106.7m$

30. ত্বরণ শূন্য হলে তখন সময়ের সাপেক্ষে বেগ কত? [Ans: a]
(a) ধ্রুব (b) দ্বিগুণ (c) তিনগুণ (d) সমান

31. ভূমির সাথে $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ কোণে একটি বস্তুকে $9.8ms^{-1}$ বেগে উপরের দিকে ছোঁড়া হলো। $\frac{3}{5}$ sec পরে বস্তুর বেগ ভূমির সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?
(a) $\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$
(c) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$
সমাধান: (a); $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ | $V_x = u.\cos\alpha$
$V_y = u.\sin\alpha - g.t$; $\theta = \tan^{-1}\frac{V_y}{V_x} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

32. ভূমিতে একটি বোমা পড়লে এর কণাগুলি $\sqrt{g\pi}$ বেগে চারদিকে ছোটে। ভূমিতে যে অংশ জুড়ে এরা ছড়িয়ে পড়ে তার ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\pi^2 g$ (b) $\pi^2 g^2$ (c) π^3 (d) $g\pi$
সমাধান: (c); $R_{max} = \pi \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi.\pi^2 = \pi^3$

33. এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত 10m/s এবং 5m/s বেগের অন্তর্ভূক্ত কোণ 120° হলে লব্ধি ১ম বেগের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাণ–
(a) 85° (b) 30° (c) 60° (d) 40°
সমাধান: (b);


;
$\tan^{-1}\frac{10\times\sin 120°}{5+10.\cos 120°} = 30° \therefore$ উৎপন্ন কোণ = 30°

34. একটি শূন্য কূপে একটি পাথর খন্ড ফেললে তা 3 sec এ কূপের তলদেশে পৌঁছালে কূপের গভীরতা কত মিটার হবে?
(a) 44.1 (b) 45.1 (c) 46.1 (d) 47.1
সমাধান: (a); $h = \frac{1}{2}gt^2 = 44.1m$

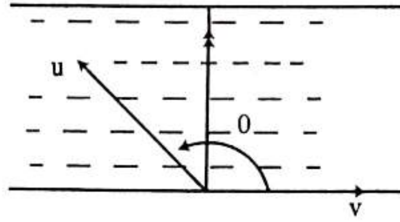
35. u আদিবেগে f সমত্বরণে চলন্ত কোন বস্তুর t- তম সেকেন্ড অতিক্রান্ত দূরত্ব কত? [Ans: b]
(a) $u + \frac{1}{2}f(2t+1)$ (b) $u + \frac{1}{2}f(2t-1)$
(c) $u - \frac{1}{2}f(2t+1)$ (d) $u - \frac{1}{2}f(2t-1)$

36. সুমন 3 m/s বেগে সাইকেল চালিয়ে যাচ্ছে। বৃষ্টি উলম্বভাবে 3 m/s বেগে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। সুমনের কাছে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক আনুভূমির সাথে কত কোণ বলে মনে হবে?
(a) 0° (b) 30° (c) 45° (d) 90°
সমাধান: (c); $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{3} = 45°$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. উদ্দীপক-১: [DB'22]



u সাঁতারুর বেগ এবং v স্রোতের বেগ

উদ্দীপক-২: **R** পাল্লার জন্য একটি প্রক্ষেপকের দুটি গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা h_1 ও h_2

(ক) একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায়। মন্দন সুষম হলে, বুলেটটি থামার পূর্বে অনুরূপ কতগুলো তক্তা ভেদ করবে? 2

(খ) একজন সাঁতারু সোজাসুজি একটি নদী পার হতে t' সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে একই দূরত্ব অতিক্রম করতে t'' সময় লাগে। উদ্দীপক-১ এর আলোকে দেখাও যে, $t' : t'' = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$. 4

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{h_1 h_2}$. 4

সমাধান

ক. মনে করি বুলেটটির আদিবেগ v_0 এবং তক্তার পুরুত্ব d

∴ d দূরত্ব অতিক্রম করার পর বুলেটের শেষবেগ, $v = v_0 - \frac{1}{10}v_0 = \frac{9}{10}v_0$ সুষম মন্দন = a

আমরা জানি, $v^2 = u^2 - 2as \Rightarrow u^2 - v^2 = 2as$ ……… (i)

উদ্দীপক অনুসারে, $v_0^2 - \left(\frac{9}{10}v_0\right)^2 = 2ad \Rightarrow v_0^2 - \frac{81}{100}v_0^2 = 2ad$ ……… (ii)

বুলেটটি এক সময় থেমে গেলে, শেষবেগ, $v' = 0$

ধরি, থেমে যাওয়ার পূর্বে বুলেটটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, D

সেক্ষেত্রে, (i) নং সমীকরণটি হবে, $v_0^2 - 0^2 = 2aD \Rightarrow v_0^2 = 2aD$ ……… (iii)

$(iii) \div (ii) \Rightarrow \frac{v_0^2}{v_0^2\left(1-\frac{81}{100}\right)} = \frac{2aD}{2ad} \Rightarrow \frac{1}{\frac{19}{100}} = \frac{D}{d} \therefore D = \frac{100}{19}d = 5.26d$

∴ বুলেটটি থামার পূর্বে অনুরূপ $(5.26 - 1) = 4.26 \approx 4$ টি তক্তা ভেদ করবে।

খ. ধরি, নদীর প্রস্থ d এবং সাঁতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে সোজাসুজি w বেগে নদী পার হয়।

প্রশ্নমতে, $d = wt = (u+v)t''$ [∵ স্রোতের অনুকূলে সাঁতারুর বেগ = u + v] $\Rightarrow t' : t'' = (u+v) : w$ ……… (i)

স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0° + u\cos\alpha = w\cos 90° \Rightarrow v + u\cos\alpha = 0 \Rightarrow u\cos\alpha = -v$

লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha} = \sqrt{u^2+v^2+2v(-v)} = \sqrt{u^2-v^2} = \sqrt{(u-v)(u+v)}$

(i) হতে পাই, $t' : t'' = (u+v) : \sqrt{(u-v)(u+v)}$

∴ $t' : t'' = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$ (দেখানো হলো)

গ. R পাল্লা জন্য, প্রক্ষেপটির দুটি নিক্ষেপণ কোণ যথাক্রমে α ও 90° − α

আমরা জানি, আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ ……… (i) এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

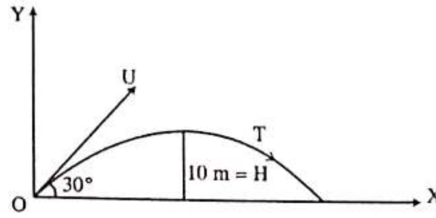
$\therefore h_1 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$ ……… (ii) এবং $h_2 = \frac{u^2\sin^2(90°-\alpha)}{2g}$ ……… (iii) $\therefore h_2 = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$; $[\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha]$

ডানপক্ষ $4\sqrt{h_1h_2} = 4\sqrt{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \times \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}} = \sqrt{16 \times \frac{u^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4g^2}} = \sqrt{\frac{4u^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}} = \sqrt{\frac{u^4(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{g^2}}$

$= \sqrt{\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right)^2} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = R$ = বামপক্ষ (দেখানো হলো)

02. দৃশ্যকল্প-১: একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর 2 মিটার নিচে পৌঁছানোর পর টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে 8 মিটার নিচে কোনো বিন্দু থেকে অপর একখণ্ড পাথর নিচে ফেলে দেয়া হলো। পাথরদ্বয় স্থিরাবস্থা থেকে একই সময়ে ভূমিতে পড়ে। [Ctg.B'22]

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) 5 ফুট/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরে উঠন্ত একটি বেলুন থেকে একখণ্ড পাথর ফেলা হলো, পাথর খণ্ডটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে। পাথর ফেলার সময় বেলুনের উচ্চতা কত ছিল? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রক্ষেপকটির পাল্লা এবং বিচরণকাল নির্ণয় কর। 4

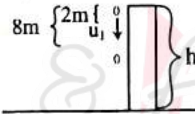
সমাধান

ক. নিচের দিক ধনাত্মক বিবেচনা করে, পাথরটির আদিবেগ, $u = -5\text{fts}^{-1}$

ত্বরণ, $g = 32\text{fts}^{-2}$ সময়, $t = 10\text{s}$

বেলুনের উচ্চতা h হলে, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2 = (-5) \times 10 + \frac{1}{2} \times 32 \times (10)^2 = 1550\text{ft}$ **(Ans.)**

খ.



১ম পাথরখণ্ডের আদিবেগ,

$u_1 = \sqrt{2g \times 2} = 6.26\text{ms}^{-1}$

১ম পাথরখণ্ডটির মাটিতে পড়তে আরো t সময় লাগলে,

$h - 2 = u_1 t + \frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, ২য় পাথরখণ্ডের ক্ষেত্রে, $h - 8 = u_2 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h - 8 = \frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots (ii)\ [u_2 = 0]$

$(i) - (ii) \Rightarrow 6 = u_1 t \therefore t = \frac{6}{6.26}\text{s} = 0.9583\text{s}$

t এর মান (ii) নং-এ বসিয়ে পাই, $h - 8 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.9583)^2 \Rightarrow h - 8 = 4.5 \therefore h = 12.5\text{m}$

∴ টাওয়ারের উচ্চতা 12.5m **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = 10\text{m}$ এবং নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$

আমরা জানি, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\text{ms}^{-2}$

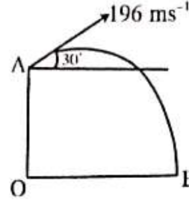
এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Rightarrow 10 = \frac{u^2 \sin^2 30°}{2 \times 9.8} \Rightarrow u^2 = 784 \therefore u = 28\text{ms}^{-1}$

∴ প্রক্ষেপকটির পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(28)^2 \sin(2 \times 30°)}{9.8} = 69.28\text{m}$

এবং বিচরণকাল, $T = \frac{2u \sin \alpha}{g} = \frac{2 \times 28 \times \sin 30°}{9.8} = 2.86\text{s}$ **(Ans.)**

03. দৃশ্যকল্প-১: সোজাসুজি একটি নদীর পার হতে সাঁতারুর t_1 সেকেন্ড সময় লাগে । স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_2 সেকেন্ড সময় লাগে। [RB'22]

দৃশ্যকল্প-২



(ক) স্থিরাবস্থা থেকে একটি বস্তু $3\ ms^{-2}$ সমত্বরণে যাত্রা শুরু করলে কতক্ষণ পর এর বেগ $60\ ms^{-1}$ হবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুযায়ী সাঁতারুর গতিবেগ $20\ cms^{-1}$ এবং স্রোতের গতিবেগ $10\ cms^{-1}$ হলে $t_1 : t_2$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $OA = 49$ মিটার হলে OB এর দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বস্তুটির আদিবেগ, $u = 0\ ms^{-1}$ ত্বরণ, $a = 3\ ms^{-2}$

t সময় পর বেগ $60\ ms^{-1}$ হলে, $u + at = 60 \Rightarrow 0 + 3t = 60 \therefore t = 20s \therefore 20s$ পর বস্তুটির বেগ $60ms^{-1}$ হবে। **(Ans.)**

খ. 01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. বস্তুটির নিক্ষেপণ বেগ, $u = 196\ ms^{-1}$ নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 30°$ এবং উল্লম্ব সরণ, $h = 49\ m$

বস্তুটির ভূমিতে পড়ার সময় t হলে,

$h = -u\sin\alpha \times t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 49 = -196 \times \sin 30° + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow 4.9t^2 - 98t - 49 = 0$

$\Rightarrow t^2 - 20t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} = \frac{20 \pm \sqrt{440}}{2} = 10 \pm \sqrt{110}$ $[\because t > 0]$

$\therefore$ বস্তুটির ভূমিতে পড়ার সময় 20.488s (প্রায়) $\therefore t = 20.488s$-এ বস্তুটির আনুভূমিক সরণ,

$OB = u\cos\alpha \times t = 196 \times \cos 30° \times 20.488 = 3477.67\ m$ (প্রায়) **(Ans.)**

04. দৃশ্যকল্প-১: একটি বস্তু কণা a সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t_1 সময়ে y_1 দূরত্ব এবং পরবর্তী t_2 সময়ে y_2 দূরত্ব অতিক্রম করে। [SB'22]

দৃশ্যকল্প-২: একটি বস্তু কণা u_1 আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত হলে বস্তুকণাটি সর্বাধিক Y উচ্চতায় গমন করে।

(ক) নির্দিষ্ট উচ্চতা h হতে 5 মি./সে. বেগে একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করায় বস্তুকণাটি 4 সে. সময় পর ভূমিতে পতিত হয়। h এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $a = 2\left(\frac{y_1}{t_1} - \frac{y_2}{t_2}\right) / (t_1 + t_2)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বস্তুকণার আনুভূমিক পাল্লা X হলে, প্রমাণ কর যে, $X = 4\sqrt{\frac{y({u_1}^2 - 2gy)}{2g}}$. 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. একটি বস্তুকণা a সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t_1 সময়ে y_1 দূরত্ব এবং পরবর্তী t_2 সময়ে y_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore t_1$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের ক্ষেত্রে, $y_1 = ut_1 + \frac{1}{2}at_1^2$ ……… (i) আবার, $(t_1 + t_2)$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের ক্ষেত্রে,

$y_1 + y_2 = u(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}a(t_1 + t_2)^2$ ……… (ii)

(ii) − (i) $\Rightarrow y_2 = ut_2 + \frac{1}{2}a(2t_1t_2 + t_2^2)$ ……… (iii)

(i) নং সমীকরণকে t_1 এবং (iii) নং সমীকরণকে t_2 দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{y_1}{t_1} = u + \frac{1}{2}at_1$ ……… (iv)

$\therefore \frac{y_2}{t_2} = u + \frac{1}{2}a(2t_1 + t_2)$ ……… (v)

(v) − (iv) $\Rightarrow \frac{y_2}{t_2} - \frac{y_1}{t_1} = \frac{1}{2}a(t_1 + t_2) \therefore a = 2\left(\frac{y_2}{t_2} - \frac{y_1}{t_1}\right) / (t_1 + t_2)$ (দেখানো হলো)

গ. মনে করি, বস্তুকণাটির নিক্ষেপণ কোণ α তাহলে, $y = \frac{u_1^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{2gy}{u_1^2}$

এবং $X = \frac{2u_1^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow R^2 = \frac{4u_1^4}{g^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Rightarrow X^2 = \frac{4u_1^4}{g^2} \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$

$\Rightarrow X^2 = \frac{4u_1^4}{g^2} \times \frac{2gy}{u_1^2}\left(1 - \frac{2gy}{u_1^2}\right) = \frac{8u_1^2 y}{g} \times \frac{2g}{u_1^2}(u_1^2 - y) \Rightarrow X^2 = 16y\left(\frac{u_1^2}{2g} - y\right) = 16y\left(\frac{u_1^2 - 2gy}{2g}\right)$

$\Rightarrow X = 4\sqrt{\frac{y(u_1^2 - 2gy)}{2g}}$ (প্রমাণিত)

05. উদ্দীপক-১: **u** আদিবেগ এবং আনুভূমির সাথে **α** কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলো। **t** সময় পর **(x, y)** বিন্দুতে পৌঁছায়।
উদ্দীপক-২: একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার **t** সময় পরে পানিতে এর পতন শোনা গেল। শব্দের বেগ **v** এবং কুয়ার গভীরতা **h**। বাতাসের বাধা অগ্রাহ্য করা হলো। **[BB'22]**

(ক) একজন সাঁতারু স্রোতের বেগের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর অপর তীরে যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাল। স্রোতের দিকের সাথে সে যে কোণে যাত্রা করেছিল, তা নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ ব্যবহার করে দেখাও যে, $\mathbf{x^2 \tan\alpha - xR\tan\alpha + Ry = 0}$ 4

(গ) উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, $\mathbf{vgt^2 - 2h(gt + v) = 0}$. 4

সমাধান

ক. ধরি, স্রোতের বেগ = u এবং নৌকা স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিয়ে সোজাসুজি w বেগে নদী পর হয়।

∴ নৌকার বেগ = 2u, স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u \cos 0° + 2u \cos \alpha = w \cos 90°$

$\Rightarrow u + 2u \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{u}{2u} \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ **(Ans.)**

খ. u আদিবেগ এবং আনুভূমিক সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি t সময় পর (x, y) বিন্দুতে পৌঁছালে,

$x = u \cos \alpha\, t \Rightarrow t = \frac{x}{u \cos \alpha}$ ……… (i) এবং $y = u \sin \alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ……… (ii)

আনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ ……… (iii)

(i) নং হতে (ii) নং সমীকরণ t এর মান বসিয়ে পাই,

$y = u \sin \alpha . \frac{x}{u \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{u \cos \alpha}\right)^2 \Rightarrow y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$

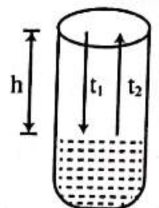
$\Rightarrow y = x \tan \alpha - g \frac{x^2}{u^2 . 2 \sin \alpha \cos \alpha} \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow y = x \tan \alpha - x^2 \tan \alpha \left(\frac{g}{u^2 \sin 2\alpha}\right)$

$\Rightarrow y = x \tan \alpha - x^2 \tan \alpha . \frac{1}{R} \Rightarrow Ry = x R \tan \alpha - x^2 \tan \alpha \therefore x^2 \tan \alpha - x R \tan \alpha + Ry = 0$ (দেখানো হলো)

গ. মনে করি, পাথরটি t_1 সময়ে কুয়ার পানিতে পতিত হয় এবং সেখান থেকে পতন শব্দ কুয়ার উপরিভাগে আসতে t_2 সময় লগে

তাহলে, $t = t_1 + t_2$ ……… (i) পাথর পতনের ক্ষেত্রে, $h = 0 \times t_1 + \frac{1}{2} gt_1^2 \Rightarrow gt_1^2 = 2h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

শব্দের ক্ষেত্রে, $h = vt_1 \Rightarrow t_2 = \frac{h}{v}$



(i) হতে পাই, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} \Rightarrow t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t^2 - \frac{2ht}{v} + \frac{h^2}{v^2} = \frac{2h}{g}$ ……… (ii)

শব্দের বেগ v > h সুতরাং $\frac{h^2}{v^2}$ কে অতি ক্ষুদ্র বিবেচনা করে অগ্রাহ্য করা যায়।

$\therefore t^2 - \frac{2ht}{v} = \frac{2h}{g} \Rightarrow vgt^2 - 2hgt - 2hv = 0 \therefore vgt^2 - 2h(gt + v) = 0$ (দেখানো হলো)

06. উদ্দীপক-১: একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে প্রথমে f_1 সুষম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুষম মন্দনে চলো t সময় যাত্রা করে কণাটি S দূরত্ব গিয়ে থামে। [JB'22]

উদ্দীপক-২: কোনো আনুভূমিক তলের উপরস্থ একটি বিন্দু হতে একটি কণা u বেগে এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। তার পাল্লা R এবং লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা H.

(ক) একটি বস্তুকণাকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত করা হলো। কণাটি সর্বোচ্চ 39.2 মিটার উপরে উঠে ভূমিতে পতিত হলে, বেগ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{t^2}{2S} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. 4

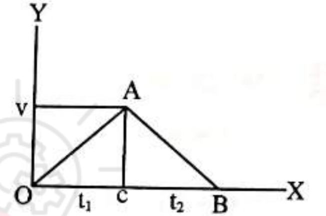
(গ) প্রমাণ কর যে, $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ 4

সমাধান

ক. বেগ v হলে, $v^2 = u^2 + 2gh \Rightarrow v^2 = 0^2 + 2 \times 9.8 \times 39.2 \therefore v = 27.72\ ms^{-1}$

খ. মনেকরি, বস্তুকণাটি O থেকে যাত্রা করে f_1 সুষমত্বরণে t_1 সময়ে OA বরাবর চলে A বিন্দুতে v গতিবেগ প্রাপ্ত হয়। আবার, A থেকে f_2 সমমন্দনে t_2 সময় AB বরাবর চলে স্টেশন B তে থামে। মোট সময় $OB = t = t_1 + t_2$ এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব = s

কণাটির বেগ বনাম সময়ের লেখ থেকে আমরা পাই, OA বরাবর কণাটির ত্বরণ, $f_1 = 0$



A এর ঢাল $\Rightarrow f_1 = \frac{v}{t_1} \Rightarrow \frac{1}{f_1} = \frac{t_1}{v}$ ……… (i)

এবং AB বরাবর মন্দন, f_2 = AB এর ঢাল $\Rightarrow f_2 = \frac{v}{t_2} \therefore \frac{1}{f_2} = \frac{t_2}{v}$ ……… (ii)

(i) + (ii), $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{t_1+t_2}{v} = \frac{t}{v}$ ……… (iii)

কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, s = ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times OB \times AC = \frac{1}{2} \times t \times v \Rightarrow 2s = vt \therefore v = \frac{2s}{t}$

(iii) এ $v = \frac{2s}{t}$ বসিয়ে পাই, $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{t}{\frac{2s}{t}} \Rightarrow \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{t^2}{2s} \therefore \frac{t^2}{2s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ **(Proved)**

গ. আমরা জানি, প্রক্ষেপণ বেগ, u প্রক্ষেপন কোণ, α ∴ পাল্লা, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

∴ লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin \alpha}{2g} \Rightarrow u^2 \sin^2 \alpha = 2gH$ ……… (i)

আবার, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow R = \frac{u^2}{g} \times 2 \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow R^2 = \left(\frac{u^2}{g}\right)^2 \times (2\sin\alpha\cos\alpha)^2$

$\Rightarrow R^2 = \frac{u^2.u^2}{g^2} 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha \Rightarrow R^2 = \frac{4}{g^2}(u^2\sin^2\alpha)(u^2\cos^2\alpha)$

$\Rightarrow R^2 = \frac{4}{g^2} 2gH(u^2\cos^2\alpha)$ [(i)নং থেকে]

$\Rightarrow R^2 = \frac{8H}{g}(u^2\cos^2\alpha) \therefore u^2\cos^2\alpha = \frac{gR^2}{8H}$ ……… (ii)

(i) + (ii), $u^2\sin^2\alpha + u^2\cos^2\alpha = 2gH + \frac{gR^2}{8H}$

$\Rightarrow u^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{16gH^2 + gR^2}{8H} \Rightarrow 8Hu^2 = 16gH^2 + gR^2$

$\therefore 16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ **(Proved)**

07. উদ্দীপক-১: একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে অবাধে পড়ন্ত একটি পাথর, তার গতির শেষতম সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{5}{9}$ অংশ অতিক্রম করে। [CB'22]

উদ্দীপক-২: দুইটি রেলগাড়ি একই রেল লাইনে যথাক্রমে **u** ও **v** সমবেগে একে অপরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। যখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব **d** তখন একে অপরকে দেখতে পায়। ট্রেন দুইটির সর্বোচ্চ মন্দন **a** ও **b** প্রয়োগ করে কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব।

(ক) 490 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি পাথরকে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলো। পাথরটি মাটিতে পৌছার সময় নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{u^2b + v^2a = 2abd}$. 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা h মিটার এবং বস্তুটির মোট পতনকাল t,

১ম ক্ষেত্রে, $h = 0.t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$ ……… (i)

শর্তানুসারে, কণাটির শেষতম সেকেন্ডে তথা t তম সেকেন্ডে $\frac{5h}{9}$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

অর্থাৎ, $\frac{5h}{9} = 0 + \frac{1}{2}g(2t-1) \Rightarrow \frac{5}{9} \times \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(2t-1) \Rightarrow \frac{5}{9}t^2 = 2t - 1 \Rightarrow 5t^2 = 18t - 9$

$\Rightarrow 5t^2 - 18t + 9 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 15t - 3t + 9 = 0 \Rightarrow 5t(t-3) - 3(t-3) = 0$

$\Rightarrow (t-3)(5t-3) = 0 \therefore t = 3$ অথবা $t = \frac{3}{5}$ এখানে, $t \neq \frac{3}{5} \therefore t = 3$

∴টাওয়ারের উচ্চতা, $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2 = 44.1\text{m}$ **(Ans.)**

গ. মনে করি, একই রেল লাইনের উপর দিয়ে A ও B ২টি রেলগাড়ি যথাক্রমে u ও v বেগে একে অপরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। এরা পরস্পরকে d দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়। একই সাথে B গাড়িটি সর্বোচ্চ b মন্দন প্রয়োগ করে d_1 দূরত্ব অতিক্রম কর থেমে যায়। অর্থাৎ গাড়ি দুটির শেষ বেগ শূন্য হয়।

A এর ক্ষেত্রে, $0 = u^2 - 2ad_1 \Rightarrow d_1 = \frac{u^2}{2a}$, B এর ক্ষেত্রে, $0 = v^2 - 2bd_2 \Rightarrow d_2 = \frac{v^2}{2b}$

সংঘর্ষ এড়ানো হবে যদি, $d = d_1 + d_2 \Rightarrow d = \frac{u^2}{2a} + \frac{v^2}{2b} \Rightarrow d = \frac{u^2.b + v^2.a}{2ab} \therefore u^2b + v^2a = 2abd$ **(Proved)**

08. একজন ক্রিকেটার ভূমির সাথে **35°** কোণে **85.5** মিটার/সে. বেগে একটি ক্রিকেট বল আঘাত করে। [Din.B'22]

(ক) সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা **t**-তম সেকেন্ডে **x** দূরত্ব এবং **(t + n)** তম সেকেন্ডে **y** দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ করে যে, ত্বরণ $\mathbf{f = \frac{y-x}{n}}$. 2

(খ) বলটির সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

(গ) বলটি বাউন্ডারী লাইনের উপর পড়লে ক্রিকেটার হতে বাউন্ডারী লাইনের দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. মনে করি, আদিবেগ u ও ত্বরণ f

১ম ক্ষেত্রে, $x = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$ ……… (i)

২য় ক্ষেত্রে, $y = u + \frac{1}{2}f\{2(t+n) - 1\} = u + \frac{1}{2}f(2t + 2n - 1)$ ……… (ii)

(ii) − (i), $y - x = u + \frac{1}{2}f(2t + 2n - 1) - u - \frac{1}{2}f(2t-1) = \frac{1}{2}f(2t + 2n - 1 - 2t + 1) = \frac{1}{2}f.2n = fn$

$\therefore f = \frac{y-x}{n}$ সুতরাং, ত্বরণ, $f = \frac{y-x}{n}$ **(Proved)**

খ. মনে করি, $u = 85.5\ ms^{-1}$; $\theta = 35°$; $H =?$ আমরা জানি, $H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(85.5)^2.(\sin 35°)^2}{2\times 9.8} = 122.704$ m (প্রায়)

সুতরাং, বলটির সর্বাধিক উচ্চতা 122.704 মিটার (প্রায়)

গ. মনে করি, $u = 85.5\ ms^{-1}, \theta = 35°$; আমরা জানি, $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(85.5)^2.\sin(2\times 35°)}{9.8} = 700.96$ m (প্রায়)

সুতরাং, ক্রিকেটার হতে বাউন্ডারি লাইনের দূরত্ব 700.96 মিটার (প্রায়)

09. উদ্দীপক-১: দুটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির দ্বিগুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধি বেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়। [MB'22]

উদ্দীপক-২: u বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার একই আনুভূমিক পাল্লা (R) এর জন্য দুটি বিচরণ পথের বিচরণকাল t_1 ও t_2.

(ক) u আদি বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বিচরণকাল নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ হতে α এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ হতে দেখাও যে, $R = \frac{1}{2} g\, t_1 t_2$. 4

সমাধান

ক. মনে করি, ভূমি হতে u আদি বেগে একটি বস্তু উল্লম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল এবং তা T_1 সময়ে সর্বাধিক H উচ্চতায় উঠে। যেহেতু বস্তুটি উল্লম্বভাবে উপরের দিকে উঠে, সুতরাং এর বেগ ক্রমশঃ কমতে থাকে এবং সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছে তা শূন্য হয়। তাহলে $v = u - gt$ থেকে পাই, $0 = u - g T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{u}{g} =$ উত্থানকাল এবং $v^2 = u^2 - 2gh$ হতে পাই,

$0 = u^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{u^2}{2g} =$ সর্বাধিক উচ্চতা সর্বাধিক $\frac{u^2}{2g}$ উচ্চতায় বস্তুটির বেগ শূন্য হয় এবং অতঃপর তাৎক্ষণিকভাবে বস্তুটি উল্লম্বভাবে নিচের দিকে পড়তে থাকে। যদি বস্তুটি T_2 সময়ে ভূমিতে আঘাত করে, তবে $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ হতে পাই,

$\frac{u^2}{2g} = 0 + \frac{1}{2}gT_2^2 \Rightarrow T_2^2 = \frac{u^2}{g^2} \Rightarrow T_2 = \frac{u}{g} =$ পতনকাল $\therefore T_1 = T_2$, i.e., উত্থানকাল = পতনকাল

$\therefore$ বিচরণকাল T = উত্থানকাল + পতনকাল = $T_1 + T_2 = \frac{u}{g} + \frac{u}{g} = \frac{2u}{g}$ সুতরাং বিচরণকাল = 2 (উত্থানকাল বা পতনকাল)

খ. মনেকরি, বেগ দুটির মান u ও v $(u > v)$ $\therefore$ বৃহত্তম লব্ধি $= u + v$, ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= u - v$

আবার, বেগদ্বয়ের মর্ধবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি বেগের মান $= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

প্রশ্নমতে, $u + v = 2(u - v) \Rightarrow +v = 2u - 2v \Rightarrow v + 2v = 2u - u \Rightarrow 3v = u$

$\therefore u = 3v$ ……… (i) আবার, $\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = \frac{1}{2}(u + v)$

$\Rightarrow u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha = \frac{1}{4}(u + v)^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2uv + v^2) \Rightarrow 4u^2 + 4v^2 + 8uv\cos\alpha = u^2 + 2uv + v^2$

$\Rightarrow 3u^2 + 3v^2 + 8uv\cos\alpha - 2uv = 0 \Rightarrow 3.(3v)^2 + 3v^2 + 8.3v.v\cos\alpha - 2.3v.v = 0$

$\Rightarrow 27v^2 + 3v^2 + 24v^2\cos\alpha - 6v^2 = 0 \Rightarrow 30v^2 + 24v^2\cos\alpha - 6v^2 = 0$

$\Rightarrow 24v^2 + 24v^2\cos\alpha = 0 \Rightarrow 24v^2(1 + \cos\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \cos\alpha = 0 \quad [\because v \neq 0]$

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \cos 90° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 90° \therefore \alpha = 180°$

গ. মনে করি, প্রক্ষেপণ বেগ u

দেওয়া আছে, u বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার একই আনুভূমিক পাল্লার জন্য দুটি বিচরণ পথের বিচরণকাল t_1 ও t_2

আমরা জানি, একই বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুর একই আনুভূমিক পাল্লার R এর জন্য দুটি নিক্ষেপণ কোণ ও দুটি বিচরণ পথ থাকবে।

সেক্ষেত্রে কোণদ্বয়ের একটি α হলে, অপরটি $(90° - \alpha)$ । জানা আছে, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$t_1 = \frac{2u\, si}{g}, t_2 = \frac{2u\sin(90° - \alpha)}{g} = \frac{2u\, co}{g}$

বামপক্ষ $= R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{u^2}{g} \times 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{g} \times u\sin\alpha \times u\cos\alpha = \frac{g}{2} \times \left(\frac{2}{g}\right)^2 \times u\sin\alpha \times u\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}g\frac{2u\sin\alpha}{g}\frac{2u\cos\alpha}{g} = \frac{1}{2}gt_1t_2 =$ ডানপক্ষ। সুতরাং, $R = \frac{1}{2}gt_1t_2$ **(Showed)**

10. দৃশ্যকল্প-১: একটি ট্রেন রেলপথে 4 কি.মি. ব্যবধানে দুটি স্টেশনে থামে। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশনে পৌঁছাতে সময় লাগে 8 মিনিট। ট্রেনটির গতিপথের প্রথম অংশ m সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ n সমমন্দনে চলে। [DB'19]

দৃশ্যকল্প-২: একটি টাওয়ারের চূড়া হতে একখন্ড পাথর x মিটার নিচে নামার পর অপর খন্ড পাথর চূড়ার y মিটার নিচ হতে ফেলে দেয়া হলো। উভয়েই স্থিরাবস্থা হতে পড়ে এবং একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হয়।

(ক) একটি কার স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে 1 কিলোমিটার পথ 2 মিনিটে অতিক্রম করলে বেগ কত হবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=8$. 4

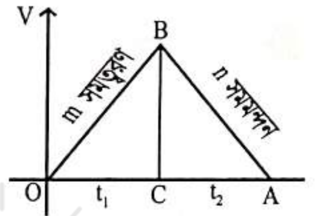
(গ) দেখাও যে, টাওয়ারটির উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার। 4

সমাধান

ক. $v_0=0,\ s=1000m,\ t=2min=120s\ \therefore s=\frac{v+v_0}{2}t\ \ \therefore v=16.67\ ms^{-1}$

খ. $\Delta OAB=$ অতিক্রান্ত দূরত্ব $=4\ km$; এখন, OB অংকের ঢাল $=m$, AB অংকের ঢাল $=n$

ধরি, $OC=t_1$ মিনিট, $AC=t_2$ মিনিট $\therefore t_1+t_2=8$



ধরি, সর্বোচ্চ বেগ B বিন্দুতে $=v$

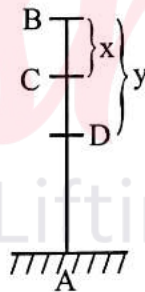
$\therefore v=mt_1\Rightarrow\frac{1}{m}=\frac{t_1}{v}\ \ldots\ldots(i)$ [OB অংশে] এবং $v=nt_2\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{t_2}{v}\ \ldots\ldots(ii)$ [BA অংশে]

$(i)+(ii)\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{t_1+t_2}{v}=\frac{8}{v}\ \ldots\ldots(iii)$

আবার, $\Delta OAB=\frac{1}{2}.OA.BC=\frac{1}{2}(t_1+t_2)v=\frac{1}{2}.8.v=4km\ \therefore v=1\ km/min$

(iii) এ বসিয়ে পাই, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=8$ **[Proved]**

গ. ধরি, $AB=h$; C বিন্দুতে ১ম পাথরের বেগ, $v=\sqrt{2gx}$



এখন, $CA=h-x=vt+\frac{1}{2}gt^2\ \ldots\ldots(i)$

২য় পাথরের জন্য, $DA=h-y=\frac{1}{2}gt^2\ \ldots\ldots(ii)$

$(i)-(ii)\Rightarrow y-x=vt\ \ \therefore t=\frac{y-x}{v}$

$(ii)\Rightarrow h-y=\frac{1}{2}g\frac{(y-x)^2}{v^2}=\frac{g(y-x)^2}{2.2gx}$

$\therefore h=\frac{(y-x)^2+4xy}{4x}=\frac{(x+y)^2}{4x}$ **[Showed]**

11. দৃশ্যকল্প-১: সমত্বরণে চলমান একটি কণা পর পর t_1, t_2 ও t_3 সময়ে যথাক্রমে d, 4d এবং 7d দূরত্ব অতিক্রম করে। [RB'19]

দৃশ্যকল্প-২: একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে পড়ন্ত একখন্ড পাথর 4 মিটার দূরত্বে পৌঁছানোর পর টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে 16 মিটার নিচে কোনো বিন্দু থেকে একখন্ড পাথর নিচে ফেলা হলো। পাথরদ্বয় স্থির অবস্থা থেকে একই সাথে মাটিতে পড়ল।

(ক) একটি বুলেট একটি তক্তার ভিতর সে.মি. ঢুকবার পর এর অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেটটি তক্তার ভিতর আর কত দূর ঢুকবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে দেখাও যে, $\frac{1}{t_1}-\frac{4}{t_2}+\frac{7}{t_3}=\frac{12}{t_1+t_2+t_3}$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $d = ut_1 + \frac{1}{2}ft_1^2$ ....(i) [আদিবেগ u ও ত্বরণ f ধরে]

$\therefore \frac{d}{t_1} = u + \frac{1}{2}ft_1$ ....(ii) আবার, $d + 4d = u(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2)^2$ ....(iii)

(iii) − (i) $4d = ut_1 + \frac{1}{2}f(2t_1t_2 + t_2^2)$ $\therefore \frac{4d}{t_2} = u + \frac{1}{2}f(2t_1 + t_2)$ ....(iv)

আবার, $d + 4d + 7d = u(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)^2$ ....(v)

(v) − (iii), $7d = ut_3 + \frac{1}{2}f(2t_1t_3 + 2t_2t_3 + t_3^2)$ ....(vi)

$\therefore \frac{7d}{t_3} = u + \frac{1}{2}f(2t_1 + 2t_2 + t_3)$ ....(vii)

(ii) − (iv) + (vii), $\frac{d}{t_1} - \frac{4d}{t_2} + \frac{7d}{t_3} = u + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)$

(v) নং হতে পাই, $\frac{d+4d+}{t_1+t_2+t_3} = u + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)$

তাহলে, $\frac{d}{t_1} - \frac{4d}{t_2} + \frac{7d}{t_3} = \frac{12d}{t_1+t_2+t_3}$ $\therefore \frac{1}{t_1} - \frac{4}{t_2} + \frac{7}{t_3} = \frac{12}{t_1+t_2+t_3}$ **(Showed)**

গ. 02 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

12. দৃশ্যকল্প-১: একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুর দুটি গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা যথাক্রমে **4m** ও **6m.** **[Ctg.B'19]**

দৃশ্যকল্প-২: সুষম ত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি বিন্দুকণা পরপর **p, q, r** সময়ে যথাক্রমে সমান তিনটি ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

(ক) একটি বস্তু **20** মি./সে. আদিবেগে **2** মি./সে² ত্বরণে চললে, উহার ৫ম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে নিক্ষিপ্ত বস্তুটির পাল্লা নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{p+q+r}$. 4

সমাধান

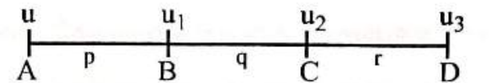
ক. দেওয়া আছে, $u = 20\ ms^{-1}$; $a = 2ms^{-2}$

আমরা জানি, $S_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t - 1)$; $S_5 = 20 + \frac{1}{2}.2(2 \times 5 - 1) = 20 + 9 = 29m$

খ. দুটি উচ্চতা 4m ও 6m মানে, $H_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 4$; $H_2 = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g} = 6$

গুণ করলে, $\frac{u^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4g^2} = 24 \Rightarrow \frac{u^4(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{g^2} = 24 \times 4 \times 4 \Rightarrow \left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}\right)^2 = 384 \Rightarrow R^2 = 384$; $R = 8\sqrt{6}m$

গ. প্রমাণ: মনে করি, সমত্বরণে চলন্ত বিন্দুকণাটি A বিন্দু থেকে u বেগে যাত্রা শুরু করে p, q, r সময় শেষে যথাক্রমে B, C, D তে পৌঁছে এবং u_1, u_2, u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়। যেখানে, AB = BC = CD = s (ধরি)।



$\therefore AB = s = \frac{u+u_1}{2} \times p$; $\left[s = \frac{u+v}{2} \times t \text{ সূত্র দ্বারা}\right]$

$\Rightarrow \frac{s}{p} = \frac{1}{2}(u + u_1)$ ....(i)

$BC = s = \frac{u_1+u_2}{2} \times q \Rightarrow \frac{s}{q} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ ....(ii)

$CD = s = \frac{u_2+u_3}{2} \times r \Rightarrow \frac{s}{r} = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)$ ....(iii)

$AD = 3s = \frac{u+u_3}{2} \times (p + q + r) \Rightarrow \frac{3s}{p+q+r} = \frac{1}{2}(u + u_3)$ ....(iv)

এখন, (i) − (ii) + (iii) ⇒ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)s = \frac{1}{2}(u + u_1 - u_1 - u_2 + u_2 + u_3) = \frac{1}{2}(u + u_3)$ ....(v)

(iv) ও (v) হতে পাই, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)s = \frac{3s}{p+q+r} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{p+q+r}$ $\therefore \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{p+q+r}$ **(Proved.)**

13. দৃশ্যকল্প-১: আনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু নিক্ষেপণ বিন্দু হতে যথাক্রমে q ও p দূরত্বে অবস্থিত p ও q উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি দেয়াল কোনো রকমে অতিক্রম করে। [SB'19]

দৃশ্যকল্প-২: A B C D

$$AB = \frac{1}{m}AD.\ CD = \frac{1}{n}AD.$$

(ক) দেখাও যে, সমমানরে দুইটি একবিন্দুগামী বেগের লব্ধি এদের অন্তর্গত কোণকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা হলে, R দেখাও যে, $R(p+q) = p^2 + pq + q^2$. 4

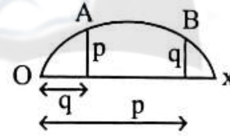
(গ) একখানা রেলগাড়ি A স্টেশন হতে ছেড়ে D স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িখানা AB অংশ সমত্বরণে, CD অংশ সমমন্দনে এবং BC অংশ সমবেগে চলে। প্রমাণ কর যে, উহার গড়বেগ ও সর্বোচ্চ বেগের অনুপাত $1 : \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$. 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{p\sin\alpha}{p+pco} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

খ. আমরা জানি, $y = \tan\theta . x\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

এখন, $p = \tan\theta . q\left(1 - \frac{q}{R}\right)$ ……….(i)



আবার, $q = \tan\theta . p\left(1 - \frac{p}{R}\right)$ ……….(ii)

(i) ÷ (ii)

$\frac{p}{q} = \frac{q}{p} . \frac{\left(1-\frac{q}{R}\right)}{\left(1-\frac{p}{R}\right)} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{R-q}{R-p} \Rightarrow p^2R - p^3 = q^2R - q^3 \Rightarrow R(p^2 - q^2) - (p^3 - q^3) = 0$

$\Rightarrow R(p+q)(p-q) - (p-q)(p^2 + pq + q^2) = 0 \therefore p \neq q \therefore R(p+q) = p^2 + pq + q^2$

গ. ধরি, AB অতিক্রম করতে, t_1, BC অতিক্রম করতে t_2 ও CD অতিক্রম করতে t_3 সময় লাগে।

মনে করি, $AD = s \therefore$ গড়বেগ, $w = \frac{s}{t_1+t_2+t_3} = \frac{s}{t}$ [t = মোট সময়]

$AB = \frac{0+v}{2} . t_1 \Rightarrow \frac{s}{m} = \frac{vt_1}{2}$ ……….(i)

$BC = vt_2 \therefore \left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) . s = vt_2 \therefore \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) . s = \frac{vt_2}{2}$ …….(ii)

আবার, $CD = \frac{v+0}{2} . t_3 \Rightarrow \frac{1}{n} . s = \frac{vt_3}{2}$ ……….(iii)

$(I) + (ii) + (iii), \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n}\right)s = \frac{v(t_1+t_2+t_3)}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}\right)s = \frac{vt}{2} \therefore \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)s = vt$

$\therefore \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) . \frac{s}{t} = v \therefore \frac{w}{v} = \frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} \therefore w : v = 1 : \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ [প্রমাণিত]

14. দৃশ্যকল্প-১: একটি বিড়াল 12 মিটার দূরে একটি ইঁদুরকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা থেকে 2 মি/সে. ত্বরণে দৌড়াল এবং ইঁদুরটি 4 মিটার/সে. সমবেগে দৌড়াল। [BB'19]

দৃশ্যকল্প-২: একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার দুটি গতিপথের বৃহত্তম উচ্চতা যথাক্রমে 4 মিটার ও 6 মিটার।

(ক) মাধ্যাকর্ষণের প্রভাবে 100 মিটার উঁচু স্থান হতে পড়ন্ত বস্তুর 2 sec এ প্রাপ্ত বেগ নির্ণয় কর। $(g = 9.8\ ms^{-2})$. 2

(খ) বিড়ালটি কত সময় পরে এবং কত দূরে ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে? 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $R = 8\sqrt{6}$। 4

সমাধান

ক. এখানে, $u = 0$; $g = 9.8\ ms^{-1}$; $t = 2s$; আমরা জানি, $v = u + gt = 0 + 2 \times 9.8 = 19.6\ ms^{-1}$

খ. ধরি, t সময় পর ধরতে পারবে।

এখন, $4t + 12 = 0 + \frac{1}{2}.2 \times t^2 \Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow t = 6, -2$

$t \neq -2 \therefore t = 6s \therefore 6s$ পর ধরবে। এখন বেড়ালের সরণ, $s = t^2 = 36\ m$

গ. দুটি বৃহত্তম উচ্চতা 4m ও 6m মানে হলে, $H_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$H_2 = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g} = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i) \times (ii) \Rightarrow \frac{u^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4g^2} = 4 \times 6$

$\Rightarrow \frac{u^4.4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{16g^2} = 4 \times 6 \Rightarrow \frac{u^4 \sin^2 2\alpha}{g^2} = 24 \times 6 \Rightarrow \left(\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}\right)^2 = 384 \Rightarrow R^2 = 384 \Rightarrow R = 8\sqrt{6}$ **(Showed)**

15. একটি ট্রেন এক স্টেশন হতে যাত্রা শুরু করে t মিনিট পর s কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে অপর একটি স্টেশনে থামে। ট্রেনটি যাত্রার প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে। **[JB'19]**

ভূমি থেকে প্রক্ষিপ্ত একটি ক্রিকেট বল প্রক্ষিপ্ত বিন্দু হতে যথাক্রমে $\frac{1}{b}$ এবং $\frac{1}{a}$ দূরে অবস্থিত $\frac{1}{a}$ এবং $\frac{1}{b}$ উচ্চতার দুইটি দেওয়াল কোনোরকমে অতিক্রম করে।

(ক) সমতলে একটি বস্তুকণা u আদিবেগে a সমত্বরণে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে তাহলে t তম সময়ে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? 2

(খ) উদ্দীপক হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{t^2}{2s}$. 4

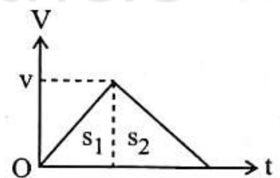
(গ) উদ্দীপক হতে দেখাও যে, আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{a+b}{ab}$. 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. ১ম অংশে $v = 0 + xt_1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{t_1}{v}$

২য় অংশে $0 = v - yt_2 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{t_2}{v} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{t_1 + t_2}{v} = \frac{t}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$



আবার, গ্রাফ হতে $s = \frac{1}{2}vt$ [ক্ষেত্রফল = অতিক্রান্ত দূরত্ব]

$\Rightarrow v = \frac{2s}{t} \therefore (i) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{t^2}{2s}$ **[Proved]**

গ. প্রশ্নমতে, $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right) \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}\tan\alpha\left(1 - \frac{1}{bR}\right) \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $\frac{1}{b} = \frac{1}{a}\tan\alpha\left(1 - \frac{1}{aR}\right) \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b^2} . \frac{(bR-1)}{(aR-1)} \Rightarrow ab^3R - b^3 = a^3bR - a^3$

$\Rightarrow abR(a^2 - b^2) = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow R = \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)ab}$ [বি.দ্র.: মূল প্রশ্নে ভুল আছে।]

16. 50 ফুট উঁচু টাওয়ারের ছাদ থেকে ইমন একটি টেনিস বল নিচে ফেলে দিল। বলটি 8 ফুট নিচে নামার পর সুমন অপর একটি টেনিস বল y ফুট নিচে হতে ফেলে দিল। উভয় বল স্থিরাবস্থা থেকে একই সাথে ভূমিতে পতিত হলো। কিছুক্ষণ পর ইমন একটি ক্রিকেট বল আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নিক্ষেপ করে। [CB'19]

(ক) $9.8\ m/s$ বেগ এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে কী শর্তে পাল্লা সর্বাধিক হবে এবং তা কত নির্ণয় কর। $(g = 9.8\ m/s^2)$ 2

(খ) সুমন কত উচ্চতা থেকে টেনিস বলটি ফেলেছিল? 4

(গ) ক্রিকেট বলটি যদি 60 ফুট/সে. বেগে নিক্ষিপ্ত হয় তবে তা টাওয়ারের পাদবিন্দু হতে কত দূরে ভূমিকে আঘাত করবে? 4

সমাধান

ক. $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$, সর্বাধিক পাল্লার জন্য, $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \therefore \alpha = 45^\circ$

খ. 8 ফুট নামার পর, $v = \sqrt{2g.8} = 16\sqrt{2}$ ft/s

সুমন বল ছেড়ে দেয়ার পর, $50 - y = \frac{1}{2}gt^2$

ইমন বল ছেড়ে দেয়ার পর, $50 - 8 = vt + \frac{1}{2}gt^2$

y x=8

বিয়োগ করে, $8 - y = -vt \therefore t = \frac{y-8}{v}$

কাজেই, $50 - y = \frac{1}{2}g.\frac{(y-8)^2}{v^2} = \frac{1}{2}g = \frac{(y-8)^2}{(16\sqrt{2})^2} = \frac{(y-8)^2}{512}$

$\Rightarrow 50 - y = \frac{(y-8)^2}{32} \Rightarrow 1600 - 32y = (y-8)^2 \therefore y = 32$ ft $\therefore$ উচ্চতা $= (50-32)$ft $= 18$ft উচ্চতা **(Ans.)**

গ. $h = -u\sin\alpha.t + \frac{1}{2}gt^2 \therefore 50 = -60.\sin 30.t + 16t^2 \therefore t = 2.954$; $R = u\cos\alpha.t = 152.77$m

17. **দৃশ্যকল্প-১: 180 মিটার প্রশস্ত একটি স্রোতহীন নদী সাঁতার কেটে পার হতে একজন লোকের 6 মিনিট সময় লাগে। কিন্তু স্রোত থাকলে তা পার হতে 10 মিনিট সময় লাগে।** [Din.B'19]

দৃশ্যকল্প-২: ক্রিকেটার সাকিব ও রুবেল এর উচ্চতা যথাক্রমে 1.8 মিটার ও 1.7 মিটার।

(ক) **স্থিরাবস্থা থেকে একটি বস্তু $4ms^{-2}$ সমত্বরণে চলতে থাকলো। ৭ম সেকেন্ডে এটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে তা নির্ণয় কর।** 2

(খ) **স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।** 4

(গ) **সাকিব 30° কোণে $39.2\ ms^{-1}$ বেগে একটি ক্রিকেট বল নিক্ষেপ করেন। রুবেল মিটার উচ্চতা থেকে বলটি ধরে ফেলেন। সাকিব ও রুবেল এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

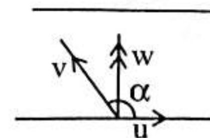
ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. সাঁতারুর বেগ, $v = \frac{180}{6\times60} = 0.5\ m/s$

স্রোত থাকলে, $u + v\cos\alpha = 0$

$\therefore w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha = v^2 - u^2 \Rightarrow u^2 = v^2 - w^2$

এখন, $w = \frac{180}{10\times60} = 0.3\ m/s \therefore u^2 = 0.5^2 - 0.3^2 \therefore u = 0.4\ m/s$



$\therefore$ স্রোতের বেগ 0.4 m/s **(Ans.)**

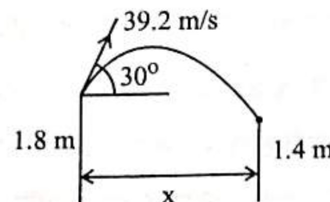
গ. $h = -u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 1.8 - 1.4 = -39.2\sin 30^\circ t + 4.9t^2$

$\Rightarrow 4.9t^2 - 19.6t^2 - 0.4 = 0 \Rightarrow t = 4.0203$s

$\therefore x = u\cos\alpha t = 39.2\cos 30^\circ \times 4.0203$

$= 136.582$ m **(Ans.)**



18. দৃশ্যকল্প-১: একটি রেলগাড়ী পাশাপাশি দুইটি স্টেশনে থামে। স্টেশন দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 কি.মি. এবং এক স্টেশন থেকে অপর স্টেশনে যেতে সময় লাগে 8 মিনিট। [All.B'18]

দৃশ্যকল্প-২: কোনো বস্তুকণা কোনো সরলরেখা বরাবর সমত্বরণে চলে t_1, t_2 এবং t_3 সময়ে ধারাবাহিক গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2 এবং v_3.

(ক) আপেক্ষিক বেগ ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ রেলগাড়ীটি যদি তার গতিপথের ১ম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে তবে দেখাও যে, $x + y = 8xy$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{t_1+t_2}{v_1-v_2} = \frac{t_2+t_3}{v_2-v_3}$. 4

সমাধান

ক. একই সমতলে গতিশীল P ও Q বস্তু দুইটির Q এর তুলনায় P এর সরণের হারকে Q এর সাপেক্ষে P এর আপেক্ষিক বেগ বলে। যদি P ও Q বস্তু দুটির যথাক্রমে $\vec{V}p$ ও $\vec{V}q(V_p > V_q)$ বেগে চলে, তবে Q এর সাপেক্ষে P এর আপেক্ষিক বেগ $\vec{V}pq = \vec{V}_p - \vec{V}_q$

খ. দৃশ্যকল্প -১ এর ঘটনাকে $v - t$ graph দ্বারা প্রকাশ করি।

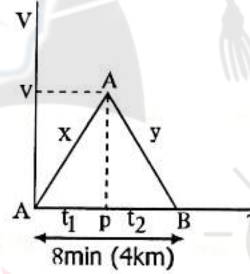
$\therefore x = \frac{v}{t_1}$; $t_1 = \frac{v}{x}$ ...... (i)

আবার, $y = \frac{v}{t_2}; t_2 = \frac{v}{y}$ .... (ii)

আবার, $\frac{1}{2} \times v \times 8 = 4; v = 1$

(i) + (ii) $\to t_1 + t_2 = v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \Rightarrow 8 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$\therefore$ $x + y = 8xy$ **[showed]**



গ. দৃশ্যকল্প-২ কে $v - t$ graph দ্বারা প্রকাশ করি।

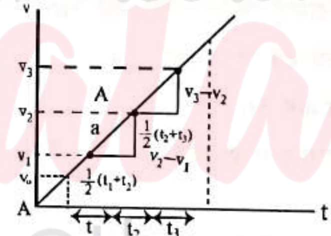
মনে করি, বস্তু কণাটির ত্বরণ = a;

তাহলে, $v_1 = v_o + \frac{1}{2}at_1$ ... (i)

$v_2 = v_1 + \frac{1}{2}a(t_1 + t_2)$ ... (ii)

$v_3 = v_2 + \frac{1}{2}a(t_1 + t_2)$ ... (iii)

$\frac{v_2-v_1}{\frac{1}{2}a(t_1+t_2)} = \frac{v_3-v_2}{\frac{1}{2}a(t_2+t_3)} \Rightarrow \frac{v_1-v_2}{t_1+t_2} = \frac{v_2-v_3}{t_2+t_3} \therefore \frac{t_2+t_2}{v_1-v_2} = \frac{t_1+t_2}{v_2-v_3}$ **[Proved]**



19. স্টেশন A ———— স্টেশন B [DB'17]
|←—— S ——→|

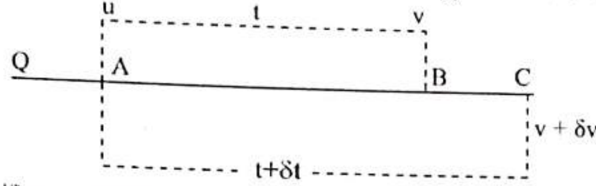
(ক) সচরাচর সংকেতমালায় প্রমাণ কর যে, $v = u + ft$ । 2

(খ) স্থিরাবস্থা হতে একটি ট্রেন A স্টেশন হতে 4 মিনিটে B স্টেশনে গিয়ে থামে। যদি উহা পথের প্রথম অংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয় অংশ y সমমন্দনে চলে তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ যখন $S = 2$ । 4

(গ) যদি দুইটি রেলগাড়ী A ও B এর বিপরীত দিক হতে u_1 ও u_2 গতিবেগে অগ্রসর হওয়ার সময় একে অপরকে দেখতে পায় তখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব x । সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য রেলগাড়ী দুইটি সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে a_1 ও a_2 প্রয়োগ করে। তাহলে দেখাও যে, কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2a_2 + u_2^2a_1 \le 2a_1a_2x$ হয়। 4

সমাধান

ক. মনে করি, OX সরলরেখা বরাবর f সমত্বরনে চলমান একটি বস্তুকণা A বিন্দু থেকে u আদিবেগে যাত্রা করে t সময়ে B বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার, $t + \delta t$ সময় পরে একই সরলরেখা বরাবর B এর খুব নিকটবর্তী C বিন্দুতে $v + \delta v$ বেগ প্রাপ্ত হয়।



এখন B বিন্দু থেকে C বিন্দুতে পৌঁছাতে সময়ের পরিবর্তন $= t + \delta t - t = \delta t$ এবং

এ সময়ে বেগের পরিবর্তন $= v + \delta v - v = \delta v$ হয়।

এখন ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই, $f = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} \Rightarrow f = \frac{dv}{dt}$

সমাকলন করে পাই, $f \int dt = \int dv \Rightarrow ft + c = v$ ……………(i) যেখানে c একটি সমাকলন ধ্রুবক।

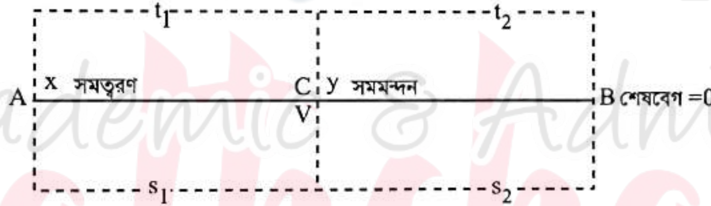
সময় $t = 0$ হলে $v = u$ হয়।

এ ক্ষেত্রে (i)নং সমীকরণ থেকে পাই, $u = f.0 + c \Rightarrow c = u$ হয়।

(i) নং সমীকারণে c এর মান বসিয়ে পাই, $v = u + ft$ (প্রমাণিত)।

খ. A ও B স্টেশন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব, $s = 2$ একক। এ দূরত্ব অতিক্রম করতে ট্রেনটির 4 মিনিট সময় লাগে।

ধরা যাক, প্রথমঅংশ স্থিতিবস্থা থেকে x সমত্বরণে চলে t_1 সময়ে $AC = s_1$ দূরত্ব অতিক্রম করে C বিন্দুতে v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার দ্বিতীয় অংশ v আদিবেগে ও y সমমন্দনে চলে t_2 সময়ে $CB = s_2$ দূরত্ব অতিক্রম করে B স্টেশনে থামে। কাজেই মোট সময় $t_1 + t_2 = 4$, মোট দূরত্ব $s_1 + s_2 = s = 2$



AC অংশের জন্য: আদিবেগ, $u = 0$ সমত্বরণ $= x$ এবং শেষবেগ $= v$ হলে আমরা পাই,

$v = 0 + xt_1 [v = u + ft$ সূত্রের সাহায্যে $] \Rightarrow t_1 = \frac{v}{x}$ ………………………….(i)

এবং $v^2 = 0 + 2xS_1$ [$v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্রের সাহায্যে] $\Rightarrow S_1 = \frac{v^2}{2x}$ ……………(ii)

CB অংশের জন্য: আদিবেগ= v, সমমন্দন y এবং শেষবেগ = 0|

$= 0 = v - yt_2$[$v = u - ft$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow t_2 = \frac{v}{y}$ ……………..(iii)

এবং $0 = v^2 - 2yS_1$ [$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্রের সাহায্যে]

$\Rightarrow s_2 = \frac{v^2}{2y}$ ………………(iv)

$\Rightarrow$ (i) + (iii) $\Rightarrow t_1 + t_2 = v\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow 4 = v\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) [\because t_1 + t_2 = 4]$

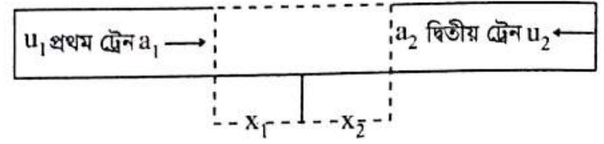
$\Rightarrow v\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4 \Rightarrow v^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = 16$ ………………(v)

আবার, (ii) + (iv) $\Rightarrow \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = s_1 + s_2 \Rightarrow \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 \Rightarrow v^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4$ ………………(vi)

$\Rightarrow$ সমীকরণ (v) ÷ (vi) হতে পাই $\frac{v^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2}{v^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = \frac{16}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, $AB = x$ দূরত্বে থাকাকালীন সময়ে ট্রেন দুটিতে a_1 ও a_2 মন্দন প্রযুক্ত হলো। আরও ধরা যাক, প্রথম ট্রেনটিতে a_1 মন্দন প্রযুক্ত হলে x_1 দূরত্ব এবং দ্বিতীয় ট্রেনটিতে a_2 মন্দন প্রযুক্ত হলে, x_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।

প্রথম ট্রেনটির ক্ষেত্রে: আদিবেগ $= u_1$, মন্দন $= a_1$, শেষবেগ $= 0$ এবং দূরত্ব $= x_1$



আমরা পাই, $o = u_1^2 - 2a_1x_1$ [$v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্রের সাহয্যে]

$\Rightarrow x^2 = \frac{u_2}{2a_2}$ .... (ii)

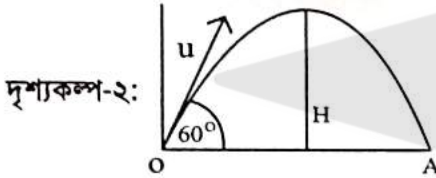
এখন সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব।

যদি, $x_1 + x_2 \leq x$ হয় i.e যদি $\frac{u_1^2}{2a_2} + \frac{u_2^2}{2a_2} \leq x$ হয়

i.e যদি $u_1^2a_2 + u_2^2a_1 \leq 2a_1a_2x$ হয়। **(Showed)**

20. দৃশ্যকল্প-১: মহানগরে এক্সপ্রেস আখাউড়া জংশন থেকে ছেড়ে ঢাকা স্টেশনে থামে। তার গতিপথের ১ম $\frac{1}{2}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{3}$ অংশ সমমন্দনে ও অবশিষ্ট পথ সমবেগে চলে। **[RB'17]**

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) কোনো কণা f সুষম ত্বরণে চলছে। গতি শুরুর সপ্তম ও দশম সেকেন্ডে যথাক্রমে 36 মিটার ও 48 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। f এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) ১নং উদ্দীপকের আলোকে মহানগরের সর্বোচ্চ বেগ ও গড় বেগের অনুপাত 11: 6 সঠিক কী না যাচাই কর। **4**

(গ) ২নং দৃশ্যকল্পে কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা 4.9 মিটার হলে এর আনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [$g = 9.8$ মি./ সে.^{2}] **4**

সমাধান

ক. t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_t = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$

সপ্তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_7 = u + \frac{1}{2}f(2\times 7-1) \Rightarrow u + \frac{1}{2}f \times 13 \therefore 36 = u + \frac{13}{2}f$ .... (i)

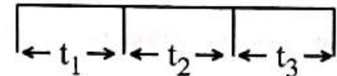
দশম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_{10} = u + \frac{1}{2}f(2\times 10-1)$

$\Rightarrow 48 = u + \frac{1}{2}(19)f \Rightarrow 48 = u + \frac{19f}{2}$ .... (ii)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই, $12 = \frac{19}{2}f - \frac{13}{2}f \Rightarrow 12 = f\times\frac{6}{2} \Rightarrow 12 = f\times 3 \therefore f = 4ms^{-2}$

খ. মনে করি, স্টেশন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব S

ধরি, রেলগাড়িটি t_1 সময়ে সমত্বরণে চলে $\frac{S}{2}$ দূরত্ব অতিক্রম করে সর্বোচ্চ v বেগ প্রাপ্ত হয়। আবার t_2 সময়ে সমবেগে চলে, $(S - \frac{s}{2} - \frac{s}{3})$ দূরত্ব অতিক্রম করে এবং t_3 সময়ে সমমন্দনে চলে $\frac{S}{3}$ দূরত্ব অতিক্রম করে।



প্রথম ক্ষেত্রে, $\frac{S}{2} = \frac{u+v}{2}\times t_1 = \frac{0+v}{2}\times t_1 \Rightarrow \frac{s}{2} = \frac{v}{2}t_1$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $S - \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = vt_2 \Rightarrow \frac{S}{2} - \frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{v}{2}t_2$ .... (ii)

তৃতীয় ক্ষেত্রে, $\frac{S}{3} = \frac{v+0}{2}t_3 \therefore \frac{S}{3} = \frac{v}{2}t_3$ .... (iii)

(i), (ii), (iii) যোগ করে পাই,

$\frac{S}{2} + \frac{S}{2} - \frac{S}{4} - \frac{S}{6} + \frac{S}{3} = \frac{V}{2}(t_1 + t_2 + t_3) \Rightarrow S + S - \frac{S}{2} - \frac{S}{3} + \frac{2S}{3} = v(t_1 + t_2 + t_3)$

$\Rightarrow S\left\{1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right\} = v(t_1 + t_2 + t_3) \Rightarrow \frac{S}{t_1+t_2+t_3}\left\{\frac{12-3-2+4}{6}\right\} = v$

গড় বেগব $\times \frac{11}{6}$ = সর্বোচ্চ বেগ $\therefore$ সর্বোচ্চ বেগ: গড় বেগ $= 11:6$ [সত্যতা যাচাই করা হলো]

গ. **02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।**

21. দৃশ্যকল্প-১: একটি টাওয়ারের চূড়া হতে একখন্ড পাথর 2 মিটার নিচে নামার পর অপর একখন্ড পাথর চূড়ার 6 মিটার নিচ হতে ফেলে দেওয়া হলো।

দৃশ্যকল্প-২: কোনো প্রক্ষিপ্ত বস্তুর দুইটি গতিপথে বৃহত্তম উচ্চতা যথাক্রমে 8m এবং 10m । [Ctg.B'17]

(ক) একটি বস্তু 15m/sec বেগে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হলে বস্তুটির ভ্রমণকাল কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে যদি দুইটি পাথরই স্থির অবস্থা হতে পড়ে এবং একই সাথে ভূমিতে পতিত হয় তবে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $R = 16\sqrt{5}$। 4

সমাধান

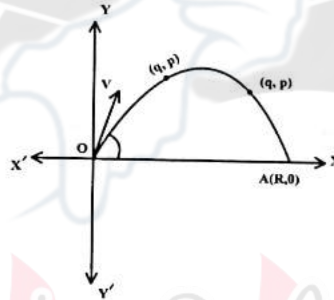
ক. এখানে, $u = 15m/s$; $\alpha = 30° \Rightarrow g = 9.8m/s^2$

∴ বস্তুটির ভ্রমণকাল $= \frac{2u \sin\alpha}{g} = \frac{2\times15\sin30°}{9.8} \Rightarrow \frac{2\times15\times\frac{1}{2}}{9.8} = \frac{15}{9.8} = 1.53s$

খ. 02 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 01 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

22. চিত্রে O বিন্দু হতে বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তুর গতিপথ দেখানো হয়েছে। [SB'17]



(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত u_1 ও u_2 মানের দুইটি বেগের লব্ধির মান u এবং u_1 এর দিক বরাবর u এর লম্বাংশের পরিমাণ u_2 হলে দেখাও যে, $\mu = \sqrt{u_2^2 - u_1^2 + 2u_1u_2}$ । 2

(খ) প্রক্ষিপ্ত বস্তুটির আনুভূমিক পাল্লা p, q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) দেখাও যে, $\frac{v}{g}$ cosecα সময় পরে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি তার প্রক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে। 4

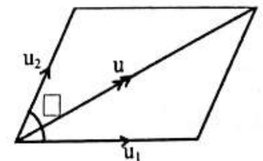
সমাধান

ক. মনে করি, u_1 ও u_2 বেগ দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

সুতরাং u_1 বেগের ক্রিয়ারেখা বরাবর u_1 ও u_2 বেগের লম্বাংশে বীজগণিতীয় যোগফল

$= u_1\cos0° + u_2\cos\alpha = u_1 + u_2\cos\alpha$

u_1 এর দিক বরাবর u বেগের লম্বাংশ $= u_2$ [শর্ত অনুযায়ী]



যেহেতু যে কোনে রেখা বরাবর লব্ধির লম্বাংশ এবং অংশক বেগ গুলোর লম্বাংশের বীজগণিতীয় যোগফল পরস্পর সমান।

অতএব, $u_1 + u_2\cos\alpha = u_2 \Rightarrow u_2\cos\alpha = u_2 - u_1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{u_2-u_1}{u_2}$

আবার, প্রদত্ত বেগ দুইটির লব্ধির মান, $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha} \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\left(\frac{u_2-u_1}{u_2}\right)}$

$\Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 - 2u_1^2}$ ∴ $u = \sqrt{u_2^2 - u_1^2 + 2u_1u_2}$ (দেখানো হল)

খ. দেওয়া আছে, প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি p ও q দূরত্বে অবস্থিত যথাক্রমে q ও p উচ্চতাকে কোনোরকমে অতিক্রম করে।
আমরা জানি, v প্রক্ষেপণ কোণ, প্রক্ষেপণ বগে v এবং আনুভূমিক পাল্লা R হলে

$y = x\tan\alpha\left(1-\frac{x}{R}\right) \therefore q = p\tan\alpha\left(1-\frac{P}{R}\right)$ ……………………(i)

এবং $p = q\tan\alpha\left(1-\frac{q}{R}\right)$ ……………..(ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করি, $\frac{q}{p} = \frac{p\left(1-\frac{P}{R}\right)}{q\left(1-\frac{Q}{R}\right)} \Rightarrow \frac{q^2}{p^2} = \frac{R-P}{R-q} \Rightarrow q^2R - q^3 = p^2R - p^3 \Rightarrow p^3 - q^3 = R(p^2 - q^2)$

$\Rightarrow (p-q)(p^2+pq+q^2) = R(p-q)(p+q) \therefore R = \frac{p^2+pq+q^2}{p+q}$

গ. t সময়ে বস্তুকণাটির আনুভূমিক বেগ $= v\cos\alpha$; t সময়ে বস্তুকণাটির উলম্ব বেগ $= v\sin\alpha - gt$
$(90° + \alpha)$ কোণ উৎপন্ন করবে।

যেহেতু বস্তুকণাটি প্রক্ষেপণ দিকের সাথে লম্বভাবে চলে কাজেই এটি আনুভূমিকের সাথে $\tan(90° + \alpha) = \frac{\text{উলম্ব বেগ}}{\text{আনুভূমিক বেগ}}$

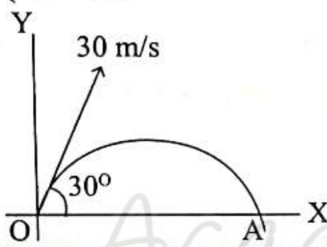
$\Rightarrow -\cot\alpha = \frac{v\sin\alpha - gt}{v\cos\alpha} \Rightarrow -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\alpha - g}{v\cos\alpha} \Rightarrow v\sin^2\alpha - gt\sin\alpha = -v\cos^2\alpha$

$\Rightarrow v\sin^2\alpha + v\cos^2\alpha = gt\sin\alpha \Rightarrow v(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = gt\sin\alpha \Rightarrow v = gt\sin\alpha \Rightarrow t = \frac{v}{g\sin\alpha}$

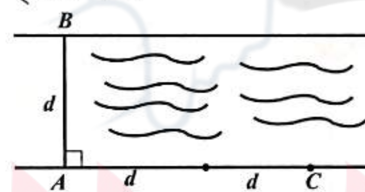
$\therefore t = \frac{v\,\text{cosec}}{g}$ (দেখানো হল)

23. [BB'17]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:



সাঁতারুর বেগ u_1, স্রোতের বেগ u_2, $AB = d$, $AC = 2d$

(ক) u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত কণার উত্থানকাল নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নিক্ষিপ্ত কণাটি ১ মিটার উচ্চতায় পৌঁছার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ AC বরাবর প্রবাহিত নদী একজন সাঁতারু t_1 সময়ে AB দূরত্ব অতিক্রম করলে এবং t_2 সময়ে AC দূরত্ব অতিক্রম করলে t_1 এবং t_2 এর অনুপাত নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. u আদিবেগ একটি বস্তুকণাকে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে অভিকর্ষ ত্বরণ প্রতিকূল কাজ করে বলে g মন্দনের সৃষ্টি হয় এবং বেগ ক্রমশ কমতে থাকে। সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে t সময় লাগলে,
$v = u - gt \Rightarrow 0 = u - gt$ [∴ সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ শূন্য] $\therefore t = \frac{u}{g}$ ∴ উত্থানকাল $= \frac{u}{g}$

খ. এখানে, আদিবেগ $u = 30ms^{-1}$; নিক্ষেপন কোণ $\alpha = 30°$
আমরা জানি, প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার উলম্বিক সরণ, $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore 1 = 30.t.\sin30° - \frac{1}{2}\times 9.8\times t^2 \therefore 1 = t\times 30\times\frac{1}{2} - 4.9t^2 \quad \therefore 4.9t^2 - 15t + 1 = 0$

$\therefore t\frac{15\pm\sqrt{(-1\ \ )^2-4\times1\times4.9}}{2\times4.9} \Rightarrow \frac{15\pm\sqrt{225-1\ \ .6}}{9.8} \Rightarrow \frac{15\pm\sqrt{205.4}}{9.8} \Rightarrow \frac{15\pm14.332}{9.8}$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $t = \frac{15+14.332}{9.8} \Rightarrow \frac{29.332}{9.8} = 2.993$

(−) চিহ্ন নিয়ে, $t = \frac{15-14.332}{9.8} = \frac{0.668}{9.8} = 0.068$

∴ 1 মিটার উচ্চতায় অবস্থানের সময় পার্থক্য: $(2.993 - 0.068) = 2.925$ সেকেন্ড (প্রায়)

গ. মনে করি, AB পথে যাত্রাকালে সাঁতারুর বেগ u_1 এবং স্রোতের বেগ u_2 এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং লব্ধি বেগ, v

∴ বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী, $v^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha$ ……………(i)

আবার, $\tan 90° = \frac{u_1\sin\alpha}{u_2+u_1\cos\alpha} \Rightarrow \cot 90° \frac{u_2+u_1\cos\alpha}{u_1\sin\alpha} \Rightarrow \frac{u_2+u_1\cos\alpha}{u_1\sin\alpha} \Rightarrow u_2 + u_1\cos\alpha = 0 \therefore u_1\cos\alpha = -u_2$

(i) নং এ এই মান বসিয়ে পাই, $v^2 = u_1^2 + u_1^2 + 2u_2(-u_2) \Rightarrow v^2 = u_1^2 - u_1^2$

$\therefore v = \sqrt{u_1^2 - u_2^2}$

দেওয়া আছে, নদীর বিস্তার d $\therefore d = vt_1 \quad \therefore t_1 = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{u_1^2-u_1^2}}$

আবার স্রোতের অনুকূলে AC পথে প্রকৃত বেগ, $u_1 + u_2$

শর্তমতে, $2d = (u_1+u_2)t_2 \quad \therefore \quad t_2 = \frac{2d}{u_1+u_2} \quad \therefore t_1 : t_2 = \frac{d}{\sqrt{u_1^2-u_1^2}} : \frac{2d}{u_1+u_2}$

$= u_1 + u_2 : 2\sqrt{u_1^2 - u_1^2} = \sqrt{(u_1+u_2)^2} : 2\sqrt{(u_1-u_2)(u_1+u_2)}$

$= \sqrt{(u_1+u_2)^2} : 2\sqrt{u_1-u_2}\sqrt{u_1+u_2} = \sqrt{u_1+u_2} : 2\sqrt{u_1-u_2}$

24. দৃশ্যকল্প-১: একজন মোটর সাইকেল আরোহী 15 মিটার দূরে একজন অশ্বারোহীকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে $5 m/sec^2$ ত্বরণে অশ্বারোহীর পশ্চাতে মোটর সাইকেল চালাতে লাগল। অশ্বারোহী 12.5 m/sec সমবেগে যাচ্ছিল। [JB'17]

দৃশ্যকল্প-২: 60 মিটার উচ্চ স্তম্ভের শীর্ষ হতে আনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 100m/sec আদিবেগে একটি বস্তু নিক্ষিপ্ত হলো।

(ক) একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $7 m/sec^2$ ত্বরণে চলতে থাকলে তৃতীয় সেকেন্ডে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে মোটর সাইকেল আরোহী কত দূরে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে? 4

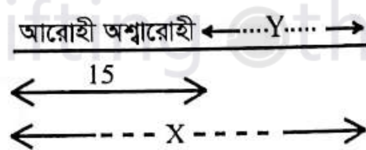
(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে বস্তুটি স্তম্ভ হতে কত দূরে ভূমিকে আঘাত করবে? 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. আরোহী ও অশ্বারোহীর মধ্যবর্তী দূরত্ব 15 মিটার। মনে কর, t সেকেন্ড পরে অশ্বারোহী আদি অবস্থান থেকে t দূরে আরোহী অশ্বারোহীকে ধরতে পারে এবং আরোহী দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব x হলে $x = 15 + y$

কাজেই, $y = 12.5t$ ……… (i) [∵ এক্ষেত্রে, f = 0]



$x = 0.t + \frac{1}{2}.5\,t^2 \Rightarrow x = \frac{5t^2}{2}$ ……………(ii)

আবার, $x = 15 + y$

(i) এবং (ii) সংযুক্ত করলে আমরা পাই, $\frac{5t^2}{2} = 15 + 12.5t \Rightarrow \frac{5t^2}{2} - 12.5t - 15 = 0$

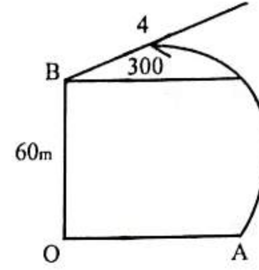
$\Rightarrow t = 12.5 \pm \frac{\sqrt{(12.5)^2 - \frac{4.5}{2}(-1\ )}}{\frac{2.5}{2}} = \frac{12.5 \pm 17.5}{5}$

ধনাত্মক (+) চিহ্ন নিয়ে, $t = \frac{12.5+1\ .5}{5} = 6$ [সময় ঋণাত্মক গ্রহণযোগ্য নয়।]

সুতরাং $t = 6$ সেকেন্ড $\therefore x = (15 + 12.5 \times 6) = 90$ মিটার।

অর্থাৎ, 6 সেকেন্ড পর মটর সাইকেল আরোহী 90 মিটার দূরে গিয়ে অশ্বারোহীকে ধরতে পারবে।

গ. মনে করি, বস্তুটির উচ্চতা $OB = h = 60$ মিটার এবং B বিন্দু থেকে আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি t সময়ে ভূমির উপর A বিন্দুতে পড়ে। সুতরাং t সময়ে বস্তুটির খাড়া সরণ।



$OB = h = -u\sin\alpha.t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 60 = -10\sin30°t + \frac{1}{2}.9.8t^2$

$\Rightarrow 60 = -100 \times \frac{1}{2} \times t + 4.9t^2$

$\Rightarrow 60 = -50t + 4.9t^2 \Rightarrow 4.9t^2 - 50t - 60 = 0$

$\therefore t = \frac{50 \pm \left(\sqrt{(-50)^2 + 4 \times 4.9 \times 60}\right)}{2 \times 4.9} = \frac{50 \pm 60.63}{9.8}$

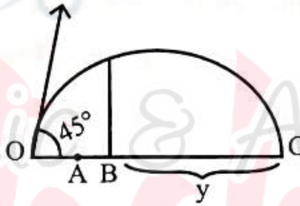
(+) নিয়ে, $t = \frac{50+6063}{9.8}$ [যেহেতু t ধনাত্মক]

$= 11.29$ সেকেন্ড

$\therefore$ বস্তুটি স্তম্ভ হতে $OA = 100\cos30° \times 11.29$

$\Rightarrow 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 11.29 = 977.74$ মিটার দূরে ভূমিকে আঘাত করবে।

25. করিম **O** বিন্দু হতে আনুভূমির সাথে **45°** কোণে বন্দুকের গুলি করল। রহিম একই সময়ে স্থিরাবস্থা **O** হতে দৌড়ে **20** সেকেন্ডে **200** মিটার দূরে অবস্থিত একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশে **B** বিন্দুতে থামে। রহিম যাত্রাপথের **OA** অংশ **a** সমত্বরণে এবং **AB** অংশ **b** সমমন্দনে যায়। অপরদিকে গুলিটি দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে গেল এবং দেয়ালের অপর পার্শ্বে **y** দূরত্বে **C** বিন্দুতে পড়ল। (এখানে দেয়ালের পুরুত্ব অগ্রাহ্য করা হয়েছে। **[CB'17]**



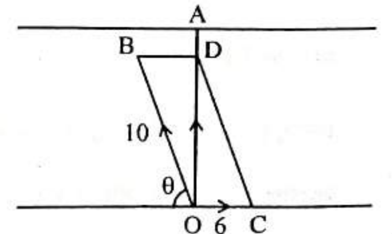
(ক) একটি নৌকা **10** কি.মি. বেগে চলে ঘণ্টায় **6** কি. মি. বেগে প্রবাহিত **500** মিটার চওড়া একটি নদী পাড়ি দিতে চায়। নৌকাটির ন্যূনতম পথে নদীটি পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? **2**

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. **4**

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, দেয়ালের উচ্চতা $= \frac{200y}{200+y}$ **4**

সমাধান

ক. চিত্রে নদীর প্রস্থ, $OA = 500$ কি.মি মনে করি, নৌকাটি O বন্দিু হতে OB দ্বারা সূচিত বেগে যাত্রা করে এবং স্রোতের বেগ OC দ্বারা সূচিত নৌকাটি ন্যূনতম পথ পাড়ি দিলে তার লব্ধি বেগ OA বরাবর ক্রিয়াশীল এবং OBDC সামান্তরিকের কর্ণ দ্বারা সূচিত।



এখন, ΔOBD G $OB^2 = BD^2 + OD^2$

$\Rightarrow OD^2 = OB^2 - BD^2 = OB^2 - OC^2$

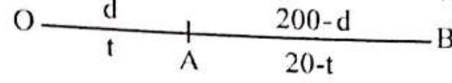
$\Rightarrow 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$\therefore OD = 8$ বর্গমূল করে তাহলে, ন্যূনতম পথ পাড়ি দিতে সময় লাগবে,

$t = \frac{0.5}{8} = \frac{5}{10 \times 8} = \frac{1}{16}$ ঘন্টা।

খ. মনে করি, প্রথমাংশে করিম O থেকে দৌড়ে d দূরত্ব t সেকেন্ডে অতিক্রম করে A অবস্থানে আসে এবং দ্বিতীয়াংশে (200 − d) মিটার (20 − t) সেকেন্ডে অতিক্রম করে B তে থামে। A অবস্থানে তার বেগ V প্রথমাংশ, ত্বরণের সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$v^2 = 2ad$ ……………… (i)



$v = at$ ……………… (ii)

দ্বিতীয়াংশে, মন্দনের সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$0^2 = v^2 - 2b(200 - d)$ ……………… (iii)

$0 = V - b(20 - t)$ ……………… (iv)

সমীকরণ (i) হতে $\frac{v^2}{2a} = d$ ……………… (v)

সমীকরণ (iii) হতে $\frac{v^2}{2b} = 200 - d$ ……………… (vi)

সমীকরণ (v) + (vi) হতে, $\frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 200 \Rightarrow v^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 400$ ……… (vii)

সমীকরণ (ii) হতে $\frac{v}{a} = t$ ……………… (viii)

সমীকরণ (iv) হতে $\frac{v}{b} = 20 - t$ ……………… (ix)

সমীকরণ (viii) ও (ix) যোগ করি, $v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 20$ ……. (x)

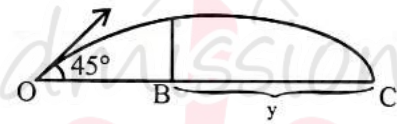
সমীকরণ (vii) কে (ix) দিয়ে ভাগ করে, $v = 20$

এখন, সমীকরণ (x) হতে $20\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 20 \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (প্রমাণিত)।

গ. মনে করি, O বিন্দুতে একটি বস্তু ভূমির সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করলে তা B বিন্দুতে অবস্থিত দেয়ালকে অতিক্রম করে C বিন্দুতে পতিত হয়।

এখানে, OB = 200 মিটার ও BC = y মিটার।

আনুভূমিক পাল্লা, R = 200 + y; দেয়ালের উচ্চতা h হলে,



$h = 200\tan 45°\left(1 - \frac{200}{200+y}\right)$

$\left[\because y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)\right] \Rightarrow 200\left(\frac{200+y-200}{200+y}\right) = \frac{200y}{200+y}$ (প্রমাণিত)

26. একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি ঢিল ফেলার t সেকেন্ড পরে কূপের তলদেশে ঢিল পড়ার শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কূপের গভীরতা h। [Din.B'17]

(ক) 6 মিটার/সে. বেগে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একটি পাথর ফেলা হলো। যদি পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে, তবে পাথরটি ফেলার সময় বেলুন কত উঁচুতে ছিল? 2

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত তথ্যাদি হতে প্রমাণ কর যে, $(2h - gt^2)v^2 + 2hgtv = h^2g$. 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$ 4

সমাধান

ক. যে মুহূর্তে পাথরটি পড়ে যায়, তখন পাথরটি বেলুনের গতিবেগই, অর্থাৎ 6 মি. /সে এ উপরের দিকে চলতে থাকে।

সুতরাং ঐ মুহূর্তে নিচের দিকে পাথরটির বগে $-6ms^{-1}$ এবং সাথে সাথে পাথরটির উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ ক্রিয়াশীল হবে।

ধরি, পাথরটি পড়ার মুহূর্তে আনুভূমিক তল থেকে বেলুনটির উচ্চতা h

$\therefore h = -6 \times 10 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2$ [নিচের দিকে ধনাত্মক এবং g = 9.8 মি./সে ধরে]

$= -60 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 100 = 430$ ∴ উচ্চতা= 430 মিটার

খ. দেওয়া আছে, শব্দের বেগে $= v$ এবং কূপের গভীরতা $= h$

যেহেতু শূন্য কূপের মধ্যে পাথর খন্ডটি ফেলার t সে সময় পরে কূপের তলদেশে ঢিল পড়ার শব্দ শোনা গেল,

সহেতু, কূপের তলদেশ হতে শব্দ উপরে আসার সময় $= \frac{h}{v}$

এবং পাথর খন্ডটির পতনকাল $= \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $[\because h = 0.t + \frac{1}{2}gt^2]$

$\therefore t = \frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = t - \frac{h}{v} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \left(t - \frac{h}{v}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{2h}{g} = t^2 - \frac{2ht}{v} + \frac{h^2}{v^2} \Rightarrow 2hv^2 = t^2v^2g - 2htgv + h^2g$

$\therefore (2h - gt^2)v^2 + 2hgtv = h^2g$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, তলদেশ থেকে কুয়ার মুখের উচ্চতা $= h$

মনে কর, কুয়ার মুখ থেকে পতিত পাথর খন্ডটি t_1 সময় শেষে এর তলদেশে পৌঁছে।

ধরি কুয়ার তলদেশে পাথরটির পতনের শব্দ, পর্যবেক্ষকের (কুয়ার মুখে) নিকট t_2 সেকেণ্ড পরে পৌঁছে।

সুতরাং $h = vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{h}{v}$ ……………………… (ii)

$\therefore$ সর্বমোট সময় কাল, $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (প্রমাণিত)

◆ CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান

01. বায়ুশূন্য স্থানে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ একটি পরাবৃত্ত। যখন প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা **R** এবং নিক্ষেপণ কোণ **α**। আবার কোন কণার উপর একই সময়ে নির্দিষ্ট কোণে ক্রিয়াশীল **u** ও **v** বেগের লব্ধি **w**।

(ক) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{v = u + ft}$ । 2

(খ) দেখাও যে, প্রক্ষেপকের গতিপথের সমীকরণ $\mathbf{y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)}$ । 4

(গ) দেখাও যে, v কে বিপরীতমুখী করে তার স্থলে $\frac{w^2-u^2}{v}$ বেগ প্রয়োগ করলে লব্ধির মান অপরিবর্তিত থাকবে। 4

সমাধান

ক.



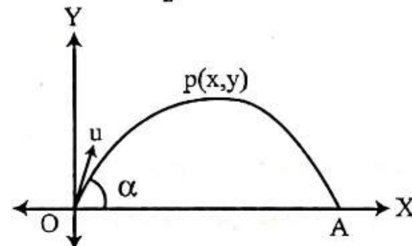
ত্বরণ $f = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(v+\Delta v) - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$

উর্ধ্ব	t	v
নিম্ন	0	u

$\therefore f = \frac{dv}{dt} \therefore dv = fdt \therefore \int_u^v dv = f\int_0^t dt$

$\Rightarrow [v]_u^v = f[t]_0^t ; [v - u] = f[t - 0] ; v = u + ft$

খ. $y = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ ……… (1)



আনুভূমিক সরণ $x = u\cos\alpha t$

$t = \frac{x}{u\cos\alpha} \Rightarrow y = u\sin\alpha.\frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha} \Rightarrow y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha\left(1 - \frac{gx}{u^2\sin 2\alpha}\right)$

$\therefore R = OA = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \therefore y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ **(Showed)**

গ. Δ OAB তে ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\frac{w}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{v}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{u}{\sin} = \frac{w}{\sin\alpha}$ ……… (i)

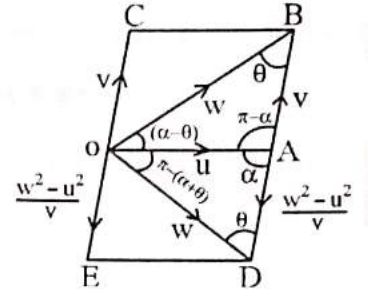
ΔOAD তে ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\frac{OD}{\sin\alpha} = \frac{\frac{w^2-u^2}{v}}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{u}{\sin}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{OD}{\sin\alpha} = \frac{w^2-u^2}{v\sin(\alpha+\theta)} = \frac{v}{\sin(\alpha-\theta)}$

$\Rightarrow \frac{ODv}{\sin\alpha} = \frac{w^2-u^2+v^2}{2\sin\alpha\cos\theta} \Rightarrow OD = \frac{w^2-u^2+v^2}{2v\cos\theta}$

AOB তে $\cos\theta = \frac{v^2+w^2-u^2}{2wv} \Rightarrow 2v\cos\theta = \frac{v^2+w^2-u^2}{w} \therefore OD = \frac{w^2-u^2+v^2}{\frac{v^2+w^2-u^2}{w}} = w$

অর্থাৎ লব্ধির মান অপরিবর্তিত।**[showed]**



02. দৃশ্যকল্প-১: সুষম ত্বরণে কোনো সরলরেখা বরাবর চলন্ত একটি t_1, t_2, t_3 সময়ের গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3।
দৃশ্যকল্প-২: একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করলে তা নিক্ষেপণ বিন্দু হতে যথাক্রমে **b** ও **a** দূরত্বে অবস্থিত **a** ও **b** উচ্চতার দুটি দেয়ালকে কোনো রকমে অতিক্রম করে।

(ক) দেখাও যে দুইটি সমান বেগের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে। 2

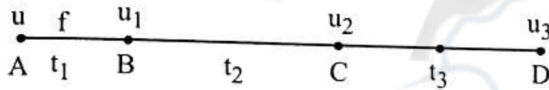
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $\frac{v_1-v_2}{v_2-v_3} = \frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, এর পাল্লা $R = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$। 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 13 (ক) এর অনুরূপ।

খ.



$u_1 = u + ft_1$; $u_2 = u + ft_1 + ft_2$; $u_3 = u + ft_1 + ft_2 + ft_3$

এখন, $v_1 = \frac{u+u_1}{2}$, $v_2 = \frac{u_1+u_2}{2}$, $v_3 = \frac{u_2+u_3}{2}$ $\therefore v_1 - v_2 = \frac{1}{2}(u-u_2)$ and $v_2 - v_3 = \frac{1}{2}(u_1-u_3)$

$\therefore \frac{v_1-v_2}{v_2-v_3} = \frac{u-u_2}{u_1-u_3} = \frac{u-u-ft_1-ft_2}{u+ft_1-u-ft_1-ft_2-ft_3} = \frac{-f(t_1+t_2)}{-f(t_2+t_3)}$ $\therefore \frac{v_1-v_2}{v_2-v_3} = \frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$ [দেখানো হলো]

গ. CD দেয়ালের জন্য, $b = a\tan\alpha\left(1-\frac{a}{R}\right)$ ……… (i)

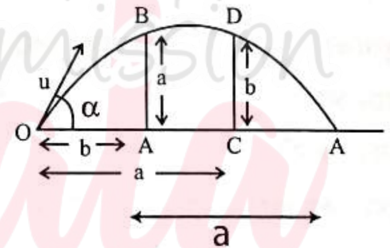
AB দেয়ালের জন্য $a = b\tan\alpha\left(1-\frac{b}{R}\right)$ ……… (ii)

সমীকরণ (i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

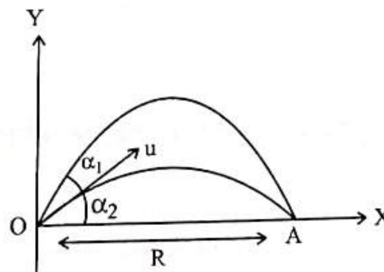
$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \times \frac{(R-a)}{(R-b)} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{R-a}{R-b} \Rightarrow b^2(R-b) = a^2(R-a)$

$\Rightarrow b^2R - b^3 = a^2R - a^3$; $\Rightarrow a^3 - b^3 = R(a^2-b^2)$

$\Rightarrow R = \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a-b)}$ $\therefore R = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ **(Showed)**



03. (i) সমত্বরণে চলমান একখানি রেলগাড় ধারাবাহিক t_1, t_2 ও t_3 সময়ে সমান ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।
(ii)



এখানে α_1 ও α_2 কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বিচরণকাল t_1 ও t_2।

(ক) ত্বরণ কাকে বলে? বিচরণকাল বলতে কী বুঝ? 2

(খ) উদ্দীপক (i) হতে প্রমাণ কর: $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1+t_2+t_3}$। 4

(গ) উদ্দীপক (ii) হতে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2}g\,t_1t_2$। 4

সমাধান

ক. সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কোন বস্তুর সময়ের সাথে বেগ বৃদ্ধির হারের প্রান্তীয় মানকে ত্বরণ বলে।

∵ ত্বরণ $a = \frac{dv}{dt}$। কোনো বস্তুকে উপরে নিক্ষেপ করা হলে বস্তুটি আবার ভূমিতে ফিরে আসতে যে সময় লাগে তাকে বিচরণকাল বলে।

খ. $AB = BC = CD = d$ (ধরি) A (u) —t_1— B (u_1) —t_2— C (u_2) —t_3— D (u_3)

$t_1 + t_2 + t_3 = T$ (মোট সময়) মোট দূরত্ব $AD = 3d$

$\therefore AB = \frac{u+u_1}{2} t_1; \therefore \frac{d}{t_1} = \frac{u+u_1}{2} \ldots (i)$ একইভাবে, $\frac{d}{t_2} = \frac{u_1+u_2}{2} \ldots (ii); \frac{d}{t_3} = \frac{u_2+u_3}{2} \ldots (iii)$

$AD = 3d = \frac{u+u_3}{2}\ T \quad \therefore \frac{3d}{T} = \frac{1}{2}(u+u_3) \ldots\ldots (iv)$

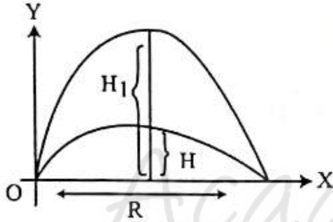
(i) − (ii) + (iii) হতে পাই, $\frac{d}{t_1} - \frac{d}{t_2} + \frac{d}{t_3} = \left(\frac{u+u_1-u_1-u_2+u_2+u_3}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{t_1} - \frac{d}{t_2} + \frac{d}{t_3} = \left(\frac{u+u_3}{2}\right) \Rightarrow d\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = \frac{3d}{T}$ [(iv) হতে]

$d\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = \frac{3d}{T} \therefore \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1+t_2+t_3}$ **(Proved)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 09 (গ) এর অনুরূপ।

04. দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২: শিমুল ও মিজু প্রত্যেকেই আলাদাভাবে নৌকা নিয়ে 3 কি.মি./ঘণ্টা বেগে প্রবাহিত 500 মিটার প্রশস্ত একটি নদী পার হতে চায়।তাদের প্রত্যেকের নৌকার বেগ 5 কি.মি./ঘণ্টা।

(ক) একটি প্রক্ষেপক $21ms^{-1}$ বেগে এবং আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হল, এর আনুভূমিক পাল্লা কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{HH_1}$ । 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ শিমুল স্বল্পতম পথে এবং মিজু স্বল্পতম সময়ে নদী পাড়ি দিলে তাদের প্রয়োজনীয় সময়ের ব্যবধান কত? 4

সমাধান

ক. $u = 21ms^{-1}$; $\alpha = 30°$; $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{21^2 \times \sin 60°}{9.8} = 38.97m$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 01 (গ) এর অনুরূপ।

গ. মনে করি, নদীর প্রস্থ $OD = 500$ মি. $= \frac{500}{1000}$ কি.মি. $= \frac{1}{2}$ কি.মি.শিমুলের নৌকাটির বেগকে OB দ্বারা এবং স্রোতের বেগকে OA দ্বারা সূচিত করা হলো।

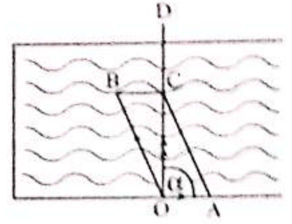
শিমুলের নৌকাটি ন্যূনতম পথে পাড়ি দিলে তার লব্ধি বেগ OD বরাবর ক্রিয়াশীল এবং OACB সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা সূচিত।

এখন, $BC^2 + OC^2 = OB^2 \Rightarrow OC^2 = OB^2 - BC^2$

$= OB^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 \Rightarrow OC^2 = 16 \therefore OC = 4$

$\therefore$ OC বরাবর নৌকার লব্ধি বেগ ঘণ্টায় 4 কি.মি. তাহলে ন্যূনতম পথে পাড়ি দেওয়ার সময় $= \frac{\frac{1}{2} \text{ কি.মি.}}{4 \text{ কি.মি./ঘণ্টা}} = \frac{1}{8}$ ঘণ্টা।

মনে করি, মিজুর নৌকাটি ন্যূনতম সময়ে পাড় দেওয়ার জন্য তীরের সাথে θ কোণে যাত্রা করে।



তাহলে, OD বরাবর তার বেগ $= 3\cos 90° + 5\cos(90° - \theta) = 5\sin\theta$

$\therefore$ সময় $= \frac{\frac{1}{2} \text{ কি.মি.}}{5\sin\theta \text{ কি.মি./ঘণ্টা}} = \frac{1}{10\sin\theta}$ ঘণ্টা।

সময় ন্যূনতম হবে যখন $\sin\theta$ বৃহত্তম হয়, অর্থাৎ $\theta = 90°$

$\therefore$ ন্যূনতম সময় $= \frac{1}{10\sin 90°} = \frac{1}{10}$ ঘণ্টা

$\therefore$ নির্ণেয় সময়ের পার্থক্য $= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right)$ ঘণ্টা $= (7.5 - 6)\text{min} = 1.5$ মিনিট। **(Ans.)**

05. দৃশ্যকল্প-১: u আদিবেগে এবং f সমত্বরণে সমতলে কোনো কণা সরলরেখা বরাবর চলে t সময়ে s এবং পরবর্তী t′ সময়ে s_1 দূরত্ব অতিক্রম করে।

দৃশ্যকল্প-২: একটি বুলেট কোনো দেয়ালের ভিতরে 2 সে.মি. ঢুকবার পর এর অর্ধেক বেগ হারায়।

(ক) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $s_t = u + \frac{(2t-1)f}{2}$ । 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $f = \frac{2\left(\frac{s_1}{t'} - \frac{s}{t}\right)}{(t+t')}$ । 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বুলেটটি দেয়ালের ভেতর আর কতদূর ঢুকবে? 4

সমাধান

ক t সময়ে অতিক্রান্ত দূরুত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

(t − 1) সময়ে অতিক্রান্ত দূরুত্ব $s' = u(t-1) + \frac{1}{2}f(t-1)^2$

$\therefore$ t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s_t = s - s' = ut - u(t-1) + \frac{1}{2}ft^2 - \frac{1}{2}f(t-1)^2$

$= ut - ut + u + \frac{1}{2}f(t^2 - t^2 - 1 + 2t) = u + \frac{1}{2}f(2t-1) = u + \frac{(2t-1)f}{2}$ **(Proved)**

খ A (u) —s, t— B (v) —s′, t′— C

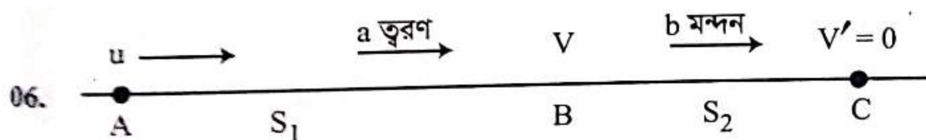
$v = u + ft$ এবং $AB = s = ut + \frac{1}{2}ft^2; \Rightarrow \frac{s}{t} = u + \frac{1}{2}ft \cdots\cdots\cdots (i)$

এবং $BC = s' = vt' + \frac{1}{2}f(t')^2 \Rightarrow \frac{s'}{t'} = v + \frac{1}{2}ft' = u + ft + \frac{1}{2}ft' \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(ii) - (i) \Rightarrow \frac{s'}{t'} - \frac{s}{t} = \frac{1}{2}f(t'+t) \quad \therefore f = \frac{2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right)}{t+t'}$ [প্রমাণিত]

গ বোর্ড প্রশ্ন 01 (ক) এর অনুরূপ।

06.



(ক) দেখাও যে, α কোণে ও $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে আনুভূমিক পাল্লা একই। 2

(খ) চিত্রের বস্তুটির ক্ষেত্রে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সূত্রটি প্রতিপাদন কর। 4

(গ) দেখাও যে, AC = d দূরত্ব অতিক্রম করতে প্রয়োজনীয় সময় $= \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab}d}$ । 4

সমাধান

ক. α কোণের ক্ষেত্রে, $R_1 = \frac{u^2 \sin 2}{g}$

$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ " " $R_2 = \frac{u^2 \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{g} = \frac{u^2 \sin(\pi - 2\alpha)}{g} = \frac{u^2 \sin(\pi - 2\alpha)}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \therefore R_1 = R_2$ **(Showed)**

খ. $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(s+\Delta s) - s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad \therefore v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt$

$\Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t (u + at)dt \Rightarrow [s]_0^s = \left[ut + \frac{1}{2}at^2\right]_0^t \quad \therefore s = ut + \frac{1}{2}at^2$

গ. ধরি, $AB = S_1,\ BC = S_2 \Rightarrow S_1 + S_2 = d$, মোট সময় $t = t_1 + t_2$

AB অংশে: $v = 0 + at_1 \quad \therefore t_1 = \frac{v}{a} \cdots\cdots (i)$

$S_1 = \frac{0+v}{2} t_1 = \frac{vt_1}{2} \cdots\cdots (ii)$

BC অংশে: $0 = v - bt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v}{b} \cdots\cdots (iii)$

$S_2 = \frac{v+0}{2} t_2 = \frac{vt_2}{2} \cdots\cdots (iv)$

$(ii) + (iv) \Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{v}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow d = \frac{v}{2} t \therefore v = \frac{2d}{t} \cdots\cdots (v)$

$(i) + (iii) \Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{v}{a} + \frac{v}{b}$

$\therefore t = v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \therefore t = \frac{2d}{t}\left(\frac{a+b}{ab}\right) \Rightarrow t^2 = \frac{2d(a+b)}{ab} \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2d(a+b)}{ab}}$ **(Showed)**

07. ব্রাজিল ফুটবল দলের খেলোয়াড় নেইমার 40 মিটার/সেকেন্ড বেগে আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে ফুটবলে কিক করলেন।

(ক) বলটির বৃহত্তম উচ্চতায় আনুভূমিক দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) গোলপোস্টের উচ্চতা 2.6 মিটার হলে নেইমারের 5 মিটার দূরত্ব হতে নেওয়া কিকে কী গোল হবে? 4

(গ) নেইমার 9 মিটার/ সেকেন্ড সমবেগে দৌড়ালে কিক নেওয়া বলটি কি পুনরায় ধরতে পারবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। 4

সমাধান

ক. $u = 40 m/s,\ \alpha = 30°$; আনুভূমিক বেগ $= u\cos\alpha = 40\cos 30° = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} ms^{-1}$

সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছানোর সময় $T_1 = \frac{u \sin\alpha}{g} = \frac{40 \times \sin 30°}{9.8} = \frac{20}{9.8} = 2.04$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতার আনুভূমিক দূরত্ব $= 20\sqrt{3} \times 2.04 = 70.7$ মিটার। **(Ans.)**

বিকল্প: $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{40^2 \times \sin 2 \times 30°}{9.8} = 141.39 ; S = \frac{R}{2} = 70.7$ m

খ. আনুভূমিক দূরত্ব 5m যেতে সময় লাগে t_1

$\therefore u\cos 30° \times t_1 = 5 \Rightarrow t_1 = \frac{5}{u\cos°} = \frac{5}{40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0.144s$ এ অতিক্রান্ত উলম্ব দূরত্ব h হলে,

$h = u\sin\alpha\, t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 40\sin 30° \times 0.144 - \frac{1}{2} \times 9.8(0.144)^2 = 2.78m$

যেহেতু বলটি একই সময়ে গোলপোস্টের চেয়ে বেশি উচ্চতায় গমন করে, কাজেই নেইমারের কিকটিতে গোল হবে না অর্থাৎ গোলপোস্টের উপর দিয়ে চলে যাবে। **(Ans.)**

বিকল্প: আমরা জানি, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$; $x = 5m$ হলে, $y = 5 \times \tan 30° - \frac{g \times 5^2}{2 \times 40^2 \times \cos^2 30°} = 2.784 > 2.6$ m.

$\therefore$ গোল হবে না।

গ. বলটি দ্বারা অতিক্রান্ত আনুভূমিক দূরত্ব, $R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{40^2 \times \sin 60°}{9.8} = 141.4m$

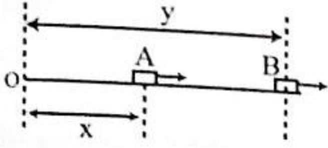
ধরি, এই দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগে t সেকেন্ড

$\therefore 141.4 = u\cos\alpha \cdot t \Rightarrow 141.4 = 40\cos 30°\, t \therefore t = 4.08s$

একই সময়ে নেইমার কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $= (9 \times t)m = 9 \times 4.08 = 36.73m$

যেহেতু নেইমারের আনুভূমিক দূরত্ব < বলটির আনুভূমিক দূরত্ব, কাজেই পুনরায় বলটি ধরতে পারবে না। (Ans.)

08. দৃশ্যকল্প-১:



; যেখানে A এর দৈর্ঘ্য 400 m ও B এর দৈর্ঘ্য 350 m।

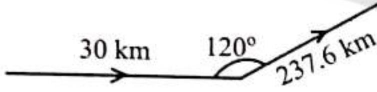
(ক) দৃশ্যকল্প-১ এর A বস্তুটি সরলপথে **30 km** যাওয়ার পর ঐ পথের সাথে **120°** কোণ করে **22 ms^{-1}** বেগে **3 hr** চললে সরণ কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ A ও B কণার বেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে u ও v এবং a ও b হলে দেখাও যে তাদের মিলিত হওয়ার সময়ের ব্যবধান, $= \frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(x-y)(a-b)}$ 4

(গ) A ও B এর বেগ যথাক্রমে **35 ms^{-1}** ও **40 ms^{-1}** হলে তাদের পরস্পরকে অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে? 4

সমাধান

ক. আমরা জানি,



$S_2 = vt = 22 \times 3 \times 3600 = 237600 \text{ m} = 237.6 \text{ km}$

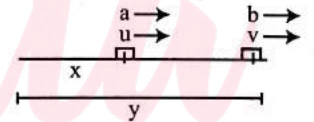
সরণ, $S = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2\cos\alpha} = \sqrt{30^2 + 237.6^2 - 2 \times 30 \times 237.6 \times \cos 120^\circ} = 253.93 \text{ km}$ **[Ans.]**

খ. মনে করি, t সময় পর কণাদ্বয় মিলিত হবে,

$\therefore$ A এর ক্ষেত্রে, $S_A = ut + \frac{1}{2}at^2$ ………………(i) ; B এর ক্ষেত্রে, $S_B = vt + \frac{1}{2}bt^2$ ………………(ii)

শর্তমতে, $S_A + x = S_B + y \Rightarrow ut + \frac{1}{2}at^2 + x = vt + \frac{1}{2}bt^2 + y$ [i, ii হতে পাই]

$\Rightarrow t^2\left(\frac{a-b}{2}\right) + t(u-v) + (x-y) = 0$

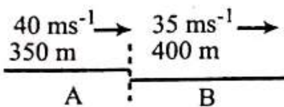


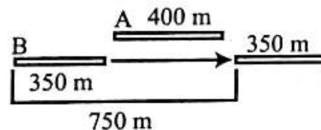
$\therefore t_1 = \frac{-(u-v)+\sqrt{(u-v)^2-4\left(\frac{a-b}{2}\right)(x-y)}}{2\left(\frac{a-b}{2}\right)}$

$t_2 = \frac{-(u-v)-\sqrt{(u-v)^2-4\left(\frac{a-b}{2}\right)(x-y)}}{2\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ $\therefore t_1 - t_2 = \frac{2\sqrt{(u-v)^2-2(a-b)(x-y)}}{a-b}$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2 - 2(a-b)(x-y)}$ **(Showed)**

গ.





A, B কে অতিক্রম করবে।

t সময় পর A কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_A = vt = 40t$

B কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_B = vt = 35\,t$

শর্তমতে, $S_A - S_B = 750 \Rightarrow 40t - 35t = 750 \Rightarrow 5t = 750 \Rightarrow t = 150 \text{ s}$ **[Ans.]**

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

ঢাকা বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. উদ্দীপক: $f(x) = x, x \in R$

(ক) $-1 < 2x - 3 < 5$ অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। 2

(খ) $\frac{1}{|f(x)-2|} \geq 2, x \neq 2$ অসমতাটি সমাধান কর ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। 4

(গ) $|f(x) - 1| < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $|\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{11}{25}$ 4

02. উদ্দীপকে: $z = x + iy$

(ক) $-1 + \sqrt{3}i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2

(খ) $\sqrt[3]{p + iq} = z$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt[3]{p - iq} = \bar{z}$ 4

(গ) $3|z - 1| = 2|z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

03. উদ্দীপকে: $f(x) = ax^2 + bx + b$ এবং $g(x) = 3x^3 - 26x^2 + 52x - 24$

(ক) $x^2 + 7x + k = 0$ সমীকরণের একটি মূল -8 হলে k এর মান ও অপর মূলটি নির্ণয় কর। 2

(খ) যদি $f(x) = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $p: q$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$ 4

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনে হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। 4

04. উদ্দীপক-১: $M = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$

উদ্দীপক-২: $f(x) = \sin x$ ও $g(x) = \cos x$

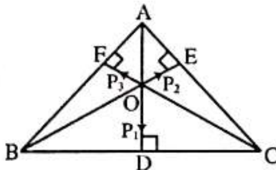
(ক) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = 1$ হলে, দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$ 2

(খ) উদ্দীপকে-১ হতে দেখাও যে, M এর মান $\cot^{-1}\frac{1}{2}$ 4

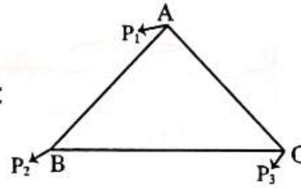
(গ) $f(x) + g(x) = g(2x) + f(2x)$ সমীকরণটি সমাধান কর। 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. উদ্দীপক-১:



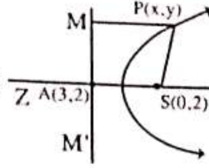
উদ্দীপক-২:



(ক) 120° কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধি 9N হলে সমান বল দুটি নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র O। P_1, P_2, P_3 তিনটি বল যথাক্রমে OD, OE, OF বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, $\frac{P_1}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{P_2}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \frac{P_3}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$ 4

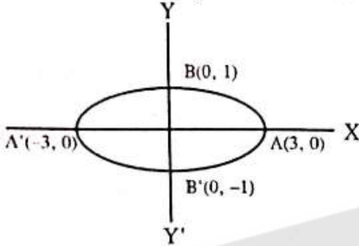
(গ) উদ্দীপক-২ এ প্রদত্ত বলগুলির লব্ধি উক্ত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P_1: P_2: P_3 = a : b : c$ 4

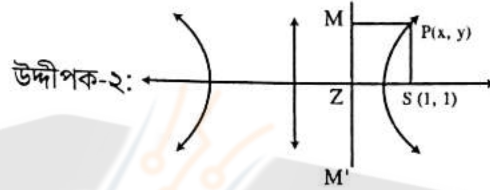
06. উদ্দীপক-১: $3x^2 - 4y - 6x - 5 = 0$; উদ্দীপক-২:


(ক) কনিক ও কনিকের উপকেন্দ্রের সংজ্ঞা লিখ। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত সমীকরণটিকে পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর ও এর শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ এ চিহ্নিত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. উদ্দীপক-১:


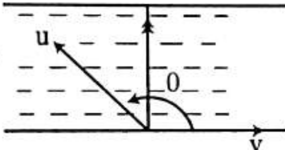
উদ্দীপক-২:


$2x + y = 1$ হলো দিকাক্ষ MM′এর সমীকরণ।

(ক) $2x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

08. উদ্দীপক-১:


u সাঁতারুর বেগ এবং v স্রোতের বেগ

উদ্দীপক-২: R পাল্লার জন্য একটি প্রক্ষেপকের দুটি গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতা h_1 ও h_2

(ক) একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায়। মন্দন সুষম হলে, বুলেটটি থামার পূর্বে অনুরূপ কতগুলো তক্তা ভেদ করবে? 2

(খ) একজন সাঁতারু সোজাসুজি একটি নদী পার হতে t′ সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে একই দূরত্ব অতিক্রম করতে t″ সময় লাগে। উদ্দীপক-১ এর আলোকে দেখাও যে, $t' : t'' = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$. 4

(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{h_1 h_2}$. 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তটি $y = mx + c$, রেখাকে স্পর্শ করলে—

(i) $c = \frac{3}{2m}$

(ii) পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সমীকরণ উভয়ই মূলবিন্দুগামী।

(iii) স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2m^2}, \frac{3}{m}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

02. কনিকটির উৎকেন্দ্রিকতা কত?

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{7}}{4}$

03. কনিকটির—

(i) অসীমতট রেখার সমীকরণ, $y = \pm\frac{3}{4}x$

(ii) নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $5y \pm 9 = 0$

(iii) পরামিতিক সমীকরণ, $x = 3\sec\theta, y = 4\tan\theta$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

04. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{3}{4} =$ কত?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{7}}$

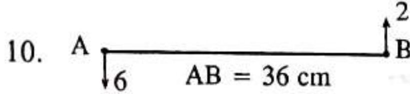
05. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?
(a) $(6n-1)\frac{\pi}{9}$ (b) $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$ (d) $(2n+1)\frac{\pi}{6}$

06. $\sec x = \sec(x+\pi)$ এর সাধারণ সমাধান:
(a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) $n\pi+\frac{\pi}{4}$ (d) $n\pi+\frac{3\pi}{4}$

07. $\sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\tan^{-1}x=\frac{\pi}{4}$ হলে x এর মান—
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{-1}{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

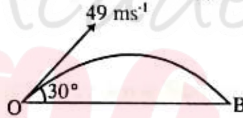
08. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান কত?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{-2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

09. যদি 12 এবং 8 একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?
(a) $2\tan^{-1}10$ (b) $2\tan^{-1}5$
(c) $\tan^{-1}5$ (d) $2\tan^{-1}2$

10. 

বৃহত্তম বল হতে বলদ্বয়ের লব্ধির দূরত্ব হবে—
(a) 54 cm (b) 36 cm (c) 27 cm (d) 18 cm

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



11. প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল—
(a) $\frac{5}{2}$ সে. (b) 5 সে. (c) 10 সে. (d) $\frac{245}{8}$ সে.

12. প্রক্ষেপকটির সর্বাধিক উচ্চতা—
(a) $\frac{245}{8}$ মিটার (b) $\frac{245}{4}$ মিটার (c) 5 মিটার (d) 10 মিটার

13. একটি তীর একটি দেয়ালের ভিতর 3 ইঞ্চি ঢুকার পর তার অর্ধেক বেগ হারায়। তীরটির বেগ শূন্য হওয়ার পূর্বে দেয়ালের ভিতর আর কত ইঞ্চি ঢুকবে?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

14. $20\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হতে একখণ্ড পাথর ফেলে দেয়া হল। পাথরটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটি যখন ফেলা হয়েছিল, তখন বেলুনের উচ্চতা কত মিটার ছিল?
(a) 780 (b) 690 (c) 580 (d) 290

15. $z_1 = 1+2i$ এবং $z_2 = 3+i$, হলে $\overline{z_1}-z_2$ এর মডুলাস হল-
(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{13}$ (c) $\sqrt{25}$ (d) $5\sqrt{2}$

16. $z = 1-i$ হলে $z-\bar{z}$ এর বর্গমূল কত?
(a) $-1-i$ (b) $\pm(1+i)$
(c) $\pm(1-i)$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

17. $1-\sqrt{3}i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?
(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{-\pi}{3}$ (d) $\frac{-2\pi}{3}$

18. $\sqrt[4]{-49}$ এর মান কোনটি?
(a) $\pm\sqrt{7}i$ (b) $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1\pm i)$
(c) $\pm\frac{7}{2}(1\pm i)$ (d) $\frac{7}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$

19. $3x^3-1=0$ সমীকরণের মূলত্রয় α,β,γ হলে $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=?$
(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1

20. কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{2+i}$ হলে সমীকরণটি হবে-
(a) $9x^2-12x+5=0$ (b) $5x^2-4x+1=0$
(c) $5x^2+4x+1=0$ (d) $25x^2-20x+3=0$

21. $x^2-kx+2=0$ সমীকরণের একটি মূল 3 হলে—
(i) অপর মূল $\frac{2}{3}$ (ii) k এর মান $\frac{11}{3}$
(iii) প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক = 7
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

22. $(p^2-4)x^2+4px+(4p+1)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর গৌণিক বিপরীত হলে p এর মান কত?
(a) $-1, 5$ (b) $1, 5$ (c) $-2, -2$ (d) $-3, 1$

23. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-p}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β হলে—
(i) $\alpha+\beta=p$ (ii) $\alpha\beta=pq$ (iii) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{q}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

24. $y^2+4x+2y-8=0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র হবে—
(a) $\left(\frac{9}{4},-1\right)$ (b) $\left(\frac{9}{4},-2\right)$ (c) $\left(\frac{5}{4},-1\right)$ (d) $\left(\frac{13}{4},-1\right)$

25. স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে, বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{3}$ হলে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য কত?
(a) $4\sqrt{2}$ (b) $8\sqrt{2}$ (c) $9\sqrt{2}$ (d) $4\sqrt{6}$

উত্তরপত্র

1	c	2	a	3	a	4	a	5	c	6	a	7	b	8	d	9	b	10	d	11	b	12	a	13	d
14	d	15	b	16	c	17	c	18	b	19	d	20	b	21	a	22	a	23	d	24	c	25	b		

বোর্ড প্রশ্ন
২০২২
শর্ট সিলেবাস

রাজশাহী বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. $a = 4, b = \sqrt{-4}, z = \frac{1}{n}(l + im)$ একটি জটিল সংখ্যা।

(ক) $\frac{2-3i}{4-4i}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর। 2

(খ) $\sqrt{a+b}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $l = m = 3, n = \sqrt{18}$ হলে $|z|$ এর ঘনমূলগুলোর যোগফল নির্ণয় কর। 4

02. $f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = x + 1$

$\varphi(x) = lx^2 + mx + n. \quad \Psi(x) = nx^2 + mx + l$

(ক) দেখাও যে, $2x^2 + 6x - 8 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ হবে। 2

(খ) $\varphi(x) = 0$ এবং $\Psi(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকলে m কে l ও n এর মাধমে প্রকাশ কর। 4

(গ) $f(x) \cdot g(x) = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় p, q, r হলে $\sum p^3q$ নির্ণয় কর। 4

03. $f_1(x) = 4x^2 - 7x + 3$

$f_2(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

(ক) $z = -4 + 4i$ এর মডুলাস ও মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2

(খ) $f_2(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\alpha = 9, \beta = 2$ এবং $\gamma = -\frac{1}{3}(a + 2)$. 4

(গ) $f_1(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় p, q হলে $\frac{1}{p^3}$ ও $\frac{1}{q^3}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। 4

04. $A = \sec^{-1}\sqrt{5}, B = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{p}{q}, C = \sin^{-1} r$

$f(x) = \sin \alpha x, \quad g(x) = \sin \beta x.$

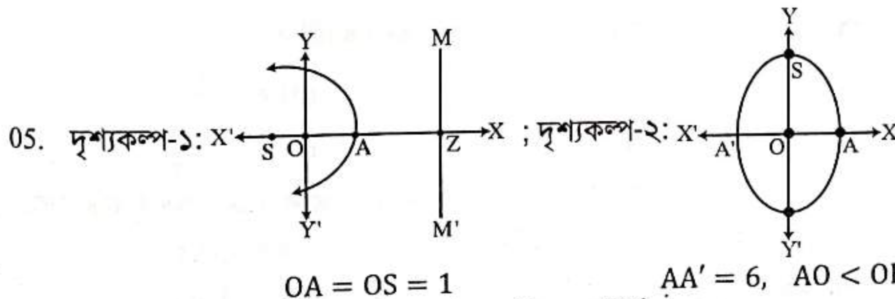
(ক) দেখাও যে, $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$. 2

(খ) $p = 3, q = 5, r = \frac{1}{\sqrt{10}}$ হলে প্রমাণ কর যে, $A - B + C = \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. 4

(গ) $\alpha = 1, \beta = 3$ হলে $-\pi$ হতে π ব্যবধির মধ্যে $2f(x).g(x) = 1$ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. দৃশ্যকল্প-১: ; দৃশ্যকল্প-২:



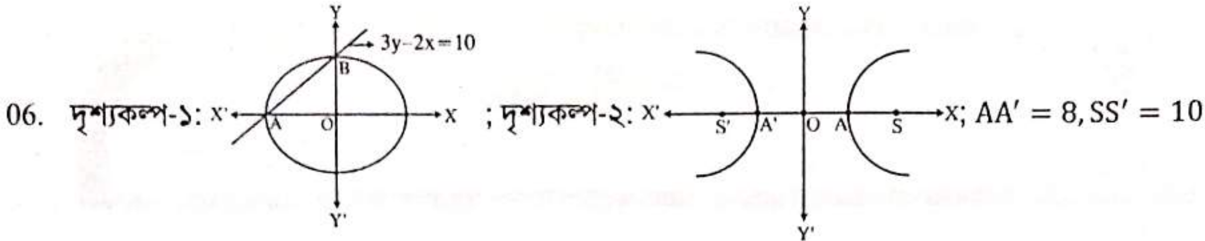
$OA = OS = 1$ $\quad AA' = 6, \quad AO < OB.$

(ক) $3x^2 - 4y^2 = 12$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নিয়ামক রেখা MZM' এর সমীকরণ $x = 3$ হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্র S এর স্থানাঙ্ক $(0, 4)$ হলে এর নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

06. দৃশ্যকল্প-১: ; দৃশ্যকল্প-২: ; $AA' = 8, SS' = 10$

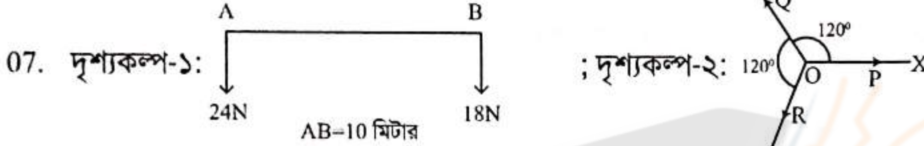


(ক) $y^2 = 80x$ কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. দৃশ্যকল্প-১: ; দৃশ্যকল্প-২:



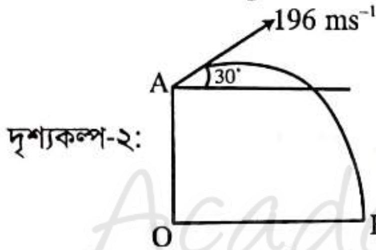
(ক) কোনো বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধির মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ নির্দেশিত সদৃশ, সমান্তরাল বলদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{10}{7}$ মিটার। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $P = 6$ N, $Q = 9$ N ও $R = 5$ N হলে বলগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। 4

08. দৃশ্যকল্প-১: সোজাসুজি একটি নদীর পার হতে সাঁতারুর t_1 সেকেন্ড সময় লাগে । স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_2 সেকেন্ড সময় লাগে।

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) স্থিরাবস্থা থেকে একটি বস্তু $3\ ms^{-2}$ সমত্বরণে যাত্রা শুরু করলে কতক্ষণ পর এর বেগ $60\ ms^{-1}$ হবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুযায়ী সাঁতারুর গতিবেগ $20\ cms^{-1}$ এবং স্রোতের গতিবেগ $10\ cms^{-1}$ হলে $t_1 : t_2$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ $OA = 49$ মিটার হলে OB এর দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. যদি $\sec\theta = -2$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে θ এর মান কত?
(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\pi$ (d) π

02. কী পরিমাণ বল 33 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর প্রয়োগ করলে 5 sec এ তার বেগ $15\ ms^{-1}$ হবে।
(a) 11 N (b) 33 N (c) 66 N (d) 99 N

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 - 16y^2 = 144$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

03. অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কোনটি?
(a) $\frac{9}{8}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) $\frac{32}{5}$ (d) $\frac{32}{9}$

04. নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $x = \frac{16}{5}$ (b) $y = \frac{16}{5}$
(c) $x = \pm\frac{16}{5}$ (d) $y = \pm\frac{16}{5}$

05. 54 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর খাড়া নিচে ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে?
(a) 3.32 sec (b) 3.34 sec
(c) 3.36 sec (d) 3.38 sec

06. $\tan\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$ এর মান কোনটি?
(a) $\sqrt{1-x^2}$ (b) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

07. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে $3\ cms^{-2}$ ত্বরণে চলতে শুরু করলে 1 মিনিট পর তার বেগ কত হবে?

(a) 3 cm/sec (b) 60 cm/sec
(c) 120 cm/sec (d) 180 cm/sec

08. $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$ হলে $\frac{y}{x} = ?$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) −2

09. $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2 + i$ হলে m, n এর মান কত?

(a) $m = 4, n = 5$ (b) $m = -4, n = 5$
(c) $m = -4, n = -5$ (d) $m = 4, n = -5$

10. $9x^2 + 7y^2 = 63$ কনিকের ক্ষেত্রফল কত?

(a) 7π (b) 9π (c) $7\sqrt{3}\pi$ (d) $3\sqrt{7}\pi$

11. $\tan^{-1} 2 + \cot^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{5\pi}{4}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$

12. $-1 - i\sqrt{3}$ এর অনুবন্ধি রাশির আর্গুমেন্ট কত?

(a) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $-\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

13. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়–

(a) বাস্তব ও সমান (b) বাস্তব ও অসমান
(c) জটিল ও সমান (d) জটিল ও অসমান

14. $x^2 = -3y$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

(a) $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ (b) $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$
(c) $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ (d) $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

15. $\cot^{-1} p = \text{cosec}^{-1}\frac{3}{2}$ হলে $p = ?$

(a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

16. 12 N ও 8 N দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল 15 m লম্বা একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে ক্রিয়া করলে বৃহত্তম বল হতে লব্ধি কত দূরে ক্রিয়া করে?

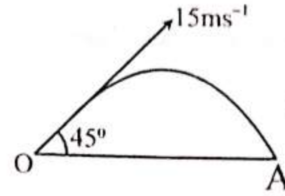
(a) 2 m (b) 4 m (c) 6 m (d) 8 m

17. যদি $s = t^3 + 3t^2 + 6$ হয়, তবে 2sec পরে এর ত্বরণ কত?

(a) $6\ ms^{-2}$ (b) $12\ ms^{-2}$
(c) $18\ ms^{-2}$ (d) $24\ ms^{-2}$

18. $\tan 3\theta = 1$ সমীকরণের সমাধান কোনটি?

(a) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
(c) $\frac{3n\pi}{12}$ (d) $n\pi$

19. 

উদ্দীপকে OA = ?

(a) 24.96 m (b) 24 m (c) 22.96 m (d) 22 m

20. $x^2 - 8x + c = 0$ এর মূলদ্বয়–

(i) সমান হবে যদি $c = 8$ হয়
(ii) জটিল হবে যদি $c > 16$ হয়
(iii) বাস্তব হবে যদি $c \leq 16$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইট প্রশ্নের উত্তর দাও;

$$z = 3i$$

21. $\bar{z}$ দ্বারা গঠিত বিন্দু কোনটি?

(a) $(0, -3)$ (b) $(0, 3)$
(c) $(-3, 0)$ (d) $(3, 0)$

22. $\bar{z}$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত?

(a) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (b) $2n\pi - \frac{\pi}{2}$
(c) $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (d) $n\pi - \frac{\pi}{2}$

23. $9x^2 - 24xy + 12y^2 - 48x - 24y + 36 = 0$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে?

(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত
(c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

24. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1}$ এর মান কোনটি?

(a) $\sqrt{3}i$ (b) $\pm\sqrt{3}$
(c) $-\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{3}$

25. দুটি বলের লব্ধি বৃহত্তম হলে, তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) 180° (b) 90°
(c) −180° (d) 0°

উত্তরপত্র

1	b	2	d	3	b	4	c	5	a	6	c	7	d	8	b	9	b	10	d	11	b	12	d	13	d
14	c	15	d	16	c	17	c	18	a	19	c	20	b	21	a	22	b	23	d	24	c	25	d		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

চট্টগ্রাম বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

01. দৃশ্যকল্প-১: $|z+6|+|z-6|=20$ যেখানে $z=x+iy$.
দৃশ্যকল্প-২: $(1+y)^n=b_0+b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\cdots+b_ny^n$.
(ক) $6-2\sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণটির সঞ্চার পথ এবং উহার নাম উল্লেখ করে চিত্র অংকন কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণ হতে দেখাও যে, 4
$(b_0-b_2+b_4-\cdots\cdots)^2=(b_0+b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots)-(b_1-b_3+b_5-\cdots\cdots)^2$

02. দৃশ্যকল্প-১: $z=32+i$.
দৃশ্যকল্প-২: $(m^2+n^2)x^2+2(mp+nq)x+p^2+q^2=0$
(ক) $a+ib=e^{i\theta}$ হলে দেখাও যে, $a^2+b^2=1$ 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে $z+\bar{z}$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর। 4
(গ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব হলে তারা সমান হবে এবং সমান মূলগুলো নির্ণয় কর। 4

03. দৃশ্যকল্প-১: $mx^2+nx+p=0\ldots\ldots(i)$
$px^2-4nx+16m=0\ldots\ldots(ii)$
দৃশ্যকল্প-২: $x^3+dx+h=0$.
(ক) $(a+1)x^2+x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে a এর মান বাহির কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয়কে α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণের মূলত্রয় α,β,γ হইলে $\sum\frac{1}{\alpha^3}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

04. দৃশ্যকল্প-১: $A=3\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$.
দৃশ্যকল্প-২: $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
(ক) $\cos^{-1}\sin\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর মুখ্য মান নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $A=\tan^{-1}3$ · 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $2\{f(x)\}^2-11f(x)+5=0$, সমীকরণটির সমাধান কর। 4
যেখানে $0°\leq x\leq 2\pi$ ·

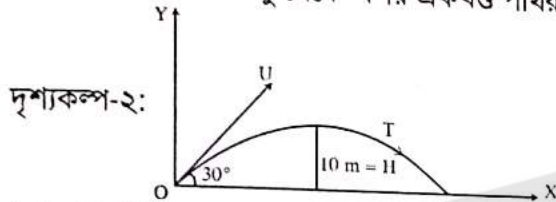
05. দৃশ্যকল্প-১: $4x^2-8x+8y^2-8y=10$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।
দৃশ্যকল্প-২: একটি কনিকের কেন্দ্র $(-2,-2)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(4,-1)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$।
(ক) $x^2=-7y$ পরাবৃত্তটির দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর উপবৃত্তটির কেন্দ্র, উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কনিকটির নাম উল্লেখ কর এবং উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

06. দৃশ্যকল্প-১: একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(4,2),(10,2)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3।
দৃশ্যকল্প-২: কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং y-অক্ষ বরাবর আড় অক্ষবিশিষ্ট কোনো অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 16।
(ক) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাংক নির্ণয় কর, যেখানে θ উপকেন্দ্রিক কোণ। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর তথ্যের সাহায্যে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. দৃশ্যকল্প-১: F_1 ও F_2 বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α; বলদ্বয় পরস্পর অবস্থান বিনিময় করিলে তাদের লব্ধি θ কোণে সরে যায়।
দৃশ্যকল্প-২: P_1 ও P_2 দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি দৃঢ় বস্তুর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি AB বরাবর S দূরত্বে সরে যায়।
(ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত 4N ও 8N মানের দুইটি বলের লব্ধি 4N বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হলে, তাদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{F_1-F_2}{F_1+F_2}\tan\frac{\alpha}{2}$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $S = \frac{P_1-P_2}{P_1+P_2}AB$ যেখানে $P_1 > P_2$. 4

08. দৃশ্যকল্প-১: একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে পড়ন্ত একখণ্ড পাথর 2 মিটার নিচে পৌঁছানোর পর টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে 8 মিটার নিচে কোনো বিন্দু থেকে অপর একখণ্ড পাথর নিচে ফেলে দেয়া হলো। পাথরদ্বয় স্থিরাবস্থা থেকে একই সময়ে ভূমিতে পড়ে।

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) 5 ফুট/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরে উঠন্ত একটি বেলুন থেকে একখণ্ড পাথর ফেলা হলো, পাথর খণ্ডটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে। পাথর ফেলার সময় বেলুনের উচ্চতা কত ছিল? 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রক্ষেপকটির পাল্লা এবং বিচরণকাল নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $2x^2 - x - k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে যখন–
(a) $K > -\frac{1}{8}$ (b) $K < \frac{1}{8}$
(c) $K > \frac{1}{8}$ (d) $K < -\frac{1}{8}$

02. $i^2 = -1$ হলে $\frac{-i-i^{-5}}{2i^{-5}+i}$ এর মান–
(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

03. $5x^3 - 3x + 2 = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে $\alpha + \beta + \gamma = ?$
(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{2}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{3}{5}$

04. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল শূন্য হবে যখন–
(a) $a = 0$ (b) $b = 0$ (c) $c = 0$ (d) $b = c = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y^2 = 32x - 64$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

05. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক–
(a) (8,0) (b) (0, 8)
(c) (0, 10) (d) (10, 0)

06. পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ–
(a) $x - 6 = 0$ (b) $x + 8 = 0$
(c) $x - 10 = 0$ (d) $x + 6 = 0$

07. $\sqrt[3]{1}$ এর মূলত্রয়ের–
(i) যোগফল শূন্য (ii) দুইটি জটিল
(iii) একটি মূল অপর একটি মূলের বর্গের সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ এর মান–
(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

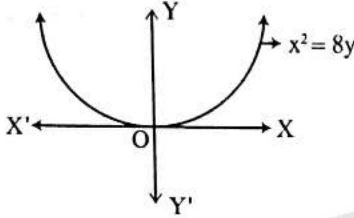
09. $20\ ms^{-1}$ বেগে ও $4\ ms^{-2}$ সমত্বরণে চলমান বস্তুকণার 5-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব–
(a) 36 m (b) 38 m (c) 42 m (d) 150 m

10. P ও Q(P > Q) বলদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল–
(i) $\alpha = 0$ হলে লব্ধি বৃহত্তম হবে
(ii) $\alpha = 180°$ হলে লব্ধি ক্ষুদ্রতম হবে
(iii) P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর তাদের লম্বাংশের যোগফল $P + Q\cos\alpha$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

11. $-\pi \leq x \leq \pi$ ব্যবধিতে $\sin x = -\frac{1}{2}$ সমীকরণের সমাধান—
(a) $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

12. $\text{cosec}^2(\sec^{-1}\sqrt{5})$ এর মান—
(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



13. পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক—
(a) (8, 0) (b) (2, 0) (c) (0, 2) (d) (0, 8)

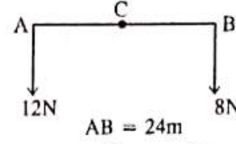
14. পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ—
(a) $y + 2 = 0$ (b) $x + 2 = 0$
(c) $y - 2 = 0$ (d) $x - 2 = 0$

15. $\cos 2\theta = -1$ হলে
(a) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$
(b) $\theta = (2n+1)\pi, n \in z$
(c) $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in z$
(d) $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$

16. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ—
(a) $x = 0$ (b) $y = 3$
(c) $x = 4$ (d) $y = 0$

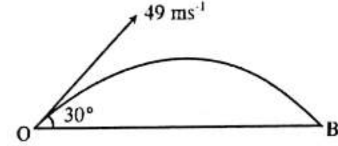
17. $\tan^{-1}\frac{5}{4} + \cot^{-1}\frac{5}{4}$ এর মান—
(a) 0 (b) π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\tan^{-1}\frac{9}{40}$

18. $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ সমীকরণের
(i) একটি মূল 2
(ii) দুইটি মূল অমূলদ
(iii) মূলত্রয়ের গুণফল 4
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

19. 

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে AC =?
(a) $\frac{5}{48}$ m (b) $\frac{48}{5}$ m (c) $\frac{72}{5}$ m (d) 48 m

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



20. প্রক্ষেপকটির বিচরণকাল—
(a) $\frac{5}{2}$ সে. (b) 5 সে. (c) 10 সে (d) $\frac{245}{8}$ সে.

21. প্রক্ষেপকটির সর্বাধিক উচ্চতা—
(a) $\frac{245}{8}$ মি. (b) $\frac{245}{4}$ মি.
(c) 5 মি. (d) 10 মি.

22. u বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার—
(i) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{u^2}{g}$
(ii) সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছার সময় $\frac{u}{g}$
(iii) বিচরণকাল $\frac{2u}{g}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

23. $-i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট—
(a) 1 ও 0 (b) 1 ও $-\frac{\pi}{2}$
(c) 1 ও π (d) 1 ও $\frac{\pi}{2}$

24. $x^2 - 5x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়—
(a) বাস্তব ও সমান
(b) বাস্তব ও অসমান
(c) অমূলদ
(d) জটিল

25. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে $\frac{2}{\omega^{13}+\omega^{26}}$ এর মান-
(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 2

উত্তরপত্র

1	a	2	b	3	b	4	c	5	d	6	d	7	d	8	c	9	b	10	d	11	a	12	a	13	c
14	a	15	a	16	d	17	c	18	a	19	b	20	b	21	a	22	c	23	b	24	b	25	a		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

সিলেট বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ এবং $g(x) = p + qx + rx^2$ দুইটি ফাংশন।

(ক) $z = \frac{1+2i}{1-3i}$ এর মডুলাস বের কর। 2

(খ) $f(1)$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর। 4

(গ) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)^2 = 3(p^2 + 2qr)$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলোর একটি জটিল মূল। 4

02. $P(x) = ax^2 + bx + c$

(ক) $x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2

(খ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $ax^2 - 2bx + 4c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 4

(গ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 2π হলে প্রমাণ কর যে, $b^2 - 4ac = 4a^2\pi^2$। 4

03. $z = x + iy$ একটি জটিল রাশি এবং $g(x) = x^2 + 2x + q$ একটি ফাংশন।

(ক) $(2 - 3i)$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) $|z + 3| = 4$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $q^2 - 5q + 8 = 0$। 4

04. $f(\theta) = \sin\theta$

(ক) $\cos^2(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}})$ এর মান বের কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}(\sqrt{2}f(\theta)) + \sin^{-1}\left(\sqrt{f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}\right) = \frac{\pi}{2}$. 4

(গ) সমাধান কর: $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sqrt{3}f(\theta) = \sqrt{2}$। 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. $A(1, -2)$ একটি বিন্দু এবং $f(x, y) = x^2 - 8x - 4y + 20$ একটি ফাংশন।

(ক) $4x^2 + 7y^2 = 28$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x - 4y = 1$ হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ বের কর যার শীর্ষ বিন্দু A 4

(গ) $f(x, y) = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, নিয়ামকের সমীকরণ ও অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

06. দৃশ্যকল্প-১: $4x^2 + ay^2 = 1$ একটি কনিকের সমীকরণ।

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট একটি কনিকের নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 4।

(ক) $(x - 3)^2 = 4(y + 2)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর কনিকটি $(0, \pm 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে কনিকটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য বের কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কনিকের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বরাবর হলে, কনিকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. দৃশ্যকল্প-১: ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I তে P_1, P_2, P_3 মানের তিনটি বল যথাক্রমে IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে।
দৃশ্যকল্প-২: P ও Q মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর উপর ক্রিয়া করছে। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে Q এর দিকে b দূরত্বে সরানো হলো।

(ক) F মানের দুইটি সমান বল কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়া করে $3\sqrt{3}$N বলের সাহায্যে ভারসাম্য সৃষ্টি করে F এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\frac{P_1}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{P_2}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{P_3}{\cos\frac{C}{2}}$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{Pb}{P+Q}$ দূরে সরে যায়। 4

08. দৃশ্যকল্প-১: একটি বস্তু কণা a সমত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর চলে t_1 সময়ে y_1 দূরত্ব এবং পরবর্তী t_2 সময়ে y_2 দূরত্ব অতিক্রম করে।
দৃশ্যকল্প-২: একটি বস্তু কণা u_1 আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত হলে বস্তুকণাটি সর্বাধিক Y উচ্চতায় গমন করে।

(ক) নির্দিষ্ট উচ্চতা h হতে 5 মি./সে. বেগে একটি বস্তুকণা খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করায় বস্তুকণাটি 4 সে. সময় পর ভূমিতে পতিত হয়। h এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $a = 2\left(\frac{y_1}{t_1} - \frac{y_2}{t_2}\right)/(t_1 + t_2)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বস্তুকণার আনুভূমিক পাল্লা X হলে, প্রমাণ কর যে, $X = 4\sqrt{\frac{y(u_1{}^2 - 2gy)}{2g}}$. 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ **সময়: ২০ মিনিট**

01. $n \in \mathbb{N}$ হলে i^{8n+5} এর মান কত?
(a) 1 (b) −1 (c) i (d) $-i$

02. $\frac{1}{3}i$ এর বর্গমূল কোনটি?
(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i)$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1-i)$
(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1+i)$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1-i)$

03. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে—
(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (ii) $\overline{\overline{z}} = z$
(iii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii

04. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)$ এর মান কত?
(a) −8 (b) 8 (c) 0 (d) 1

05. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি নয়?
(a) $ax^2 + 2hxy + by^2$ (b) $2x^2 + 3xy + y^2$
(c) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$ (d) $2x^2 + \frac{3y}{x} + y^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ, δ

06. সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?
(a) মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান (b) মূলদ্বয় অমূলদ
(c) মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান (d) মূলদ্বয় জটিল

07. $\gamma > \delta$ হলে, $\gamma - \delta =$ কত?
(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5

08. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণের উভয় মূলই সাধারণ হওয়ার শর্ত—
(a) $a_1b_2 = a_2b_1$
(b) $(a_1b_2 - a_2b_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$
(c) $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$
(d) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

09. $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক—
(a) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ (b) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{m}{2a}\right)$ (c) $\left(\frac{2a}{m}, \frac{a}{m^2}\right)$ (d) $\left(\frac{m^2}{a}, \frac{2a}{m}\right)$

10. $x^2 = -12y$ পরাবৃত্তের —
(i) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, −3)
(ii) নিয়ামকের সমীকরণ $y - 3 = 0$
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y + 3 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$25x^2 - 16y^2 + 400 = 0$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

11. অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে—
(a) 10, 8 (b) 8, 10 (c) 5, 4 (d) 4, 5

12. নিয়ামক রেখার সমীকরন কোনটি?

(a) $y = \pm\frac{16}{\sqrt{41}}$ (b) $y = \pm\frac{25}{\sqrt{39}}$

(c) $y = \pm\frac{25}{\sqrt{41}}$ (d) $y = \pm\frac{\sqrt{41}}{25}$

13. $3x^2 + 5y^2 = 15$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হবে–

(a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$

14. $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব x-অক্ষের সাথে কত কোণ তৈরি করে?

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0

15. বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে–

(i) $\sin^{-1}x$ এর ডোমেন $[-1, 1]$

(ii) $\cos^{-1}x$ এর রেঞ্জ $[0, \pi]$

(iii) $\tan^{-1}x$ এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

16. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$ এর মান কত?

(a) x (b) x^2 (c) x^3 (d) 0

17. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ হলে θ মান–

(a) $2n\pi$ (b) $(2n+1)\pi$

(c) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ (d) $(2n-1)\pi$

18. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে–

(i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}$ যেখানে $-1 \le x, y \le 1$ এবং $x^2 + y^2 \le 1$

(ii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$ যেখানে $-1 \le x, y \le 1$ এবং $x + y \ge 0$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যেখানে $x > 0, y > 0$ এবং $0 \le xy \le 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

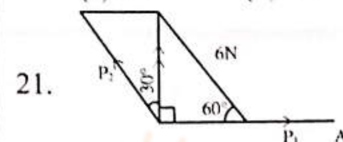
19. n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান-

(a) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ (b) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

(c) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{12}$ (d) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

20. তিনটি বল p, $\sqrt{3}$P ও P সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রথম দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

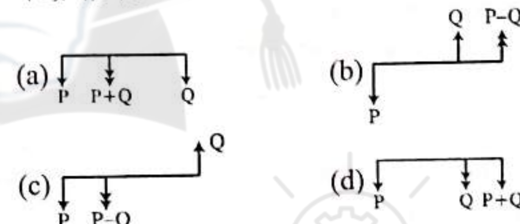
(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 150°

21. 

6N বলের অংশকদ্বয় P_1 ও P_2 হলে P_1 এর মান নিচের কোনটি?

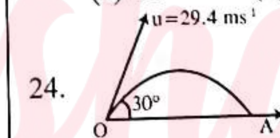
(a) $3\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{3}$ (c) $\frac{6\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

22. P ও Q দুটি সমান্তরাল বল এবং P > Q হলে নিচের কোনটি সত্য/সঠিক?



23. একটি গাড়ি ঘন্টায় 8 কি.মি. বেগে চলছে। গাড়ি থেকে 16 কি.মি. বেগে একটি বস্তুকে কোনদিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুর গতিপথ গাড়ির সাথে সমকোণ তৈরি করবে?

(a) 30° (b) 45° (c) 100° (d) 120°

24. 

; উদ্দীপকে OA =?

(a) 74 m (b) 76.38 m (c) 78 m (d) 78.4 m

25. u গতিবেগে আনুভূমিকের সাথে α কোণে একটি বস্তুকণা প্রক্ষিপ্ত হলে–

(i) বায়ুশূন্য স্থানে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত

(ii) আনুভূমিক পাল্লা R বৃহত্তম হলে, $R = \frac{u^2}{g}$

(iii) বস্তুকণাটির বিচরণকাল $= \frac{u\sin\alpha}{g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

উত্তরপত্র

1	c	2	c	3	d	4	a	5	d	6	c	7	a	8	d	9	a	10	d	11	a	12	c	13	d
14	d	15	d	16	a	17	c	18	d	19	a	20	d	21	c	22	a	23	d	24	b	25	a		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

বরিশাল বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. $z_1 = 1 + ia, z_2 = a + i$; এবং $|z+2| + |z-2| = 6,\ z = x + iy$ একটি কনিক।
(ক) $\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2
(খ) $a = \sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$. 4
(গ) কনিকটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

02. উদ্দীপক-১: $x^2 - bx - c = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান।
উদ্দীপক-২: $ax^2 + 2bx + c = 0$ এর একটি মূল
$cx^2 + 2bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের তিনগুণ।
(ক) $2x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্য দেখাও যে, $b^3 + c(3b+1) - c^2 = 0$ 4
(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $c = 3a$ অথবা $12b^2 = (c+3a)^2$. 4

03. দেওয়া আছে $\varphi(x) = \cos^{-1}x$ এবং $h(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$
(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}$. 2
(খ) $\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi((z) = \pi$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. 4
(গ) $(-\pi, \pi)$ ব্যবধিতে $h(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর। 4

04. উদ্দীপক-১: $ax^3 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ।
উদ্দীপক-২: $(y + ix)^{\frac{1}{3}} = a + ib$ একটি সমীকরণ।
(ক) $3x^2 + 2x + 2 = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান বের কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}$ ও $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $ax + by = 4ab(a^2 - b^2)$. 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. উদ্দীপক-১: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (–1,1) এবং উপকেন্দ্র(2,–3)।
উদ্দীপক-২: $4x^2 + 9y^2 - 40x - 108y + 388 = 0$ একটি কনিক।
(ক) $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এর সাহায্যে পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত কনিকটির উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

06. উদ্দীপক-১: $9x^2 - 4y^2 + 36x - 8y - 4 = 0$ একটি কনিকের সমীকরণ।
উদ্দীপক-২: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট একটি কনিক যা $(4, -2\sqrt{6})$ বিন্দুগামী; যার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর অবস্থিত।
(ক) $y^2 + 4x + 2y - 11 = 0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. উদ্দীপক-১: দুইটি বল ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং এদের মান যথাক্রমে cosB ও cosC এর সমানুপাতিক।
উদ্দীপক-২: F_1 ও F_2 মানের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি অনড় বস্তুর উপর দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। F_1 এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুতে 'd' দূরত্বে সরানো হল।

(ক) 5N, 7N ও 8N মানের বলত্রয় একটি কণার উপর ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। 8N ও 5N মানের বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ ব্যবহার করে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি A কোণকে $\frac{1}{2}(A+B-C)$ ও $\frac{1}{2}(C+A-B)$ এই দুই অংশে বিভক্ত করে। 4

(গ) উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, বলদ্বয়ের লব্ধি $\frac{F_1 d}{F_1+F_2}$ দূরত্বে সরে যায়। 4

08. উদ্দীপক-১: u আদিবেগ এবং আনুভূমির সাথে α কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলো। t সময় পর (x, y) বিন্দুতে পৌঁছায়।
উদ্দীপক-২: একটি পাথর কুয়ার ভিতর ফেলার t সময় পরে পানিতে এর পতন শোনা গেল। শব্দের বেগ v এবং কুয়ার গভীরতা h। বাতাসের বাধা অগ্রাহ্য করা হলো।

(ক) একজন সাতারু স্রোতের বেগের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর অপর তীরে যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাল। স্রোতের দিকের সাথে সে যে কোণে যাত্রা করেছিল, তা নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ ব্যবহার করে দেখাও যে, $x^2\tan\alpha - xR\tan\alpha + Ry = 0$ 4

(গ) উদ্দীপক-২ ব্যবহার করে দেখাও যে, $vgt^2 - 2h(gt+v) = 0.$ 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $-1+i$ এর আর্গুমেন্ট কত?
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

02. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে $1-x-y+xy$ এর মান কত?
(a) −2 (b) 2 (c) 3 (d) −3

03. $8+4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল কোনটি?
(a) $\pm(3-2i)$ (b) $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$
(c) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ (d) $\pm(3+2i)$

04. $\sqrt{-5}-1$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2+2x+6=0$ (b) $x^2+x+3=0$
(c) $x^2+2x-6=0$ (d) $x^2+x-3=0$

05. p এর কীরূপ মানের জন্য $x^2+px+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে?
(a) $-2\le p\le 2$ (b) $-4<p\le 4$
(c) $-2<p<2$ (d) $-4\le p<4$

06. $3x^3-1=0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β ও γ হলে $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ এর মান কত?
(a) −1 (b) 1 (c) −3 (d) 3

07. $x^2-2x+4=0$ সমীকরণটির –
(i) মূলদ্বয়ের যোগফল = 3 (ii) মূলদ্বয়ের গুণফল = 4
(iii) মূলগুল জটিল সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, ii

08. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?
(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) 5

09. $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)$ হলে x এর মান কত?
(a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

10. $\text{arc}\tan\left\{\sin\left(\text{arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ এর মান কত?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

11. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?
(a) $\frac{2}{3}n\pi-\frac{\pi}{9}$ (b) $\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{9}$
(c) $n\pi\pm\frac{\pi}{9}$ (d) $\frac{2}{3}n\pi\pm\frac{\pi}{9}$

12. $\text{cosec}\,\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$ হলে, θ এর মান কত? $(0<\theta<2\pi)$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \tan x$ এবং $g(x) = \sin^{-1} x$

13. $g(y) + g(\sqrt{1-y^2})$ এর মান কোনটি?

(a) π (b) 2π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

14. $f(x)f(2x) = 1$ হলে, x এর মান কত?

(a) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$

(b) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

(d) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$

15. $(x-4)^2 = -4(y-5)$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x = 4$ (b) $y = 6$

(c) $x = 5$ (d) $y = 5$

16. $y^2 = -12x$ পরাবৃত্তের -

(i) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16 একক

(ii) অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $x = 3$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, ii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

17. উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি?

(a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

18. উপবৃত্তটির শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি?

(a) $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(b) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$

(c) $\left(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(d) $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

19. $x^2 - y^2 = 18$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

(a) 6 (b) 12 (c) 16 (d) 18

20. 3P ও 5P মানের দুইটি বল পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কত?

(a) 3P (b) $2\sqrt{2}P$ (c) $\sqrt{34}P$ (d) $\sqrt{43}P$

21. যদি $\sqrt{5}$ এককের দুইটি সমান বল $120°$ কোণে এক বিন্দুতে কাজ করে, তাহলে,

(i) তাদের লব্ধি $\sqrt{5}$ একক

(ii) $\sqrt{5}$ একক বলের সাথে লব্ধি $60°$ কোণ উৎপন্ন করে

(iii) লব্ধি বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা ছোট

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, ii

22. $P, \sqrt{3}P, P$ বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। P ও $\sqrt{3}P$ বলের মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) $90°$ (b) $120°$ (c) $130°$ (d) $150°$

23. একজন ক্রিকেটার একটি ক্রিকেট বলকে আনুভূমিকের সাথে $60°$ কোণে 20 মিটার/সে. বেগে আঘাত করলে বলটির বিচরণকাল কত?

(a) $\frac{10}{g}$ সে. (b) $\frac{10\sqrt{3}}{g}$ সে

(c) $\frac{20}{g}$ সে. (d) $\frac{20\sqrt{3}}{g}$ সে.

24. 19.6 মিটার/সে. আদিবেগে ভূমির সাথে $45°$ কোণে একটি বস্তুকণা শূন্যে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক কত মিটার উচ্চতায় উঠবে?

(a) 9.8 মিটার (b) 11.025 মিটার

(c) 10 মিটার (d) 12 মিটার

25. 30 মিটার/সেকেন্ডে বেগে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের পাল্লা 60 মিটার হলে নিক্ষেপণ কোণ কত হবে?

(a) $20.39°$ (b) $25°$

(c) $30°$ (d) $32.35°$

উত্তরপত্র

1	c	2	c	3	c	4	a	5	c	6	b	7	b	8	b	9	a	10	d	11	d	12	c	13	c
14	a	15	b	16	b	17	d	18	a	19	b	20	c	21	a	22	d	23	d	24	a	25	a		

বোর্ড প্রশ্ন
২০২২
শর্ট সিলেবাস

যশোর বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. $M = -5 + 12\sqrt{-1}, P = \sqrt[3]{a + ib}$ এবং $q = x + iy$
   (ক) $1 + 2i$ কে আর্গন্ড চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর। 2
   (খ) M এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 4
   (গ) $p = q$ হলে, প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$. 4
02. $f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $g(x) = x^2 - px + q$.
   (ক) $3x^2 - mx + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলটির তিনগুণ হলে, m এর মান নির্ণয় কর। 2
   (খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত r হলে, দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$. 4
   (গ) $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
03. $f(x) = px^2 + 2qx + r, g(x) = x^2 + (p + r)x + (p^2 + r^2 + 2q^2)$ এবং $M(y) = 8y^3 + 42y^2 + 63y - 27$.
   (ক) $x^2 - 6x + 25 = 0$ সমীকরণের x এর মান নির্ণয় কর। 2
   (খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হলে, দেখাও যে, $g(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক হবে। 4
   (গ) $M(x) = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে সমীকরণটির সমাধান কর। 4
04. $f(x) = \sin*/$ এবং $g(y) = \cos y$.
   (ক) $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2
   (খ) $f(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + f(3x) = 1 + g(x) + f(\frac{\pi}{2} - 2x)$ সমীকরণটির সমাধান কর। 4
   (গ) প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\frac{f(\frac{\alpha}{2})}{f(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})}\tan\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \tan^{-1}\frac{f(a)g(\beta)}{g(\frac{\pi}{2}-\beta)+f(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. উদ্দীপক-১: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (5,3) অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (7,2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।
   উদ্দীপক-২: একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র $(-2,3)$, নিয়ামকের সমীকরণ $2x + y - 3 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
   (ক) $y^2 - 8x + 8y = 0$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত? 2
   (খ) পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
   (গ) উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
06. উদ্দীপক-১: কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল P এবং $Q(P > Q)$ দুটি বলের লব্ধি P বলের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। P বলকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণটি পূর্বের কোণের অর্ধেক হয়।
   উদ্দীপক-২: M মানের তিনটি বল একটি বিন্দুতে এরূপভাবে কার্যরত যেন এদের দিক ΔABC এর BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল।
   (ক) 5N এবং 12N দুটি বল একটি বিন্দুতে $45°$ কোণে ক্রিয়ারত থাকলে, বল দুটির লব্ধি নির্ণয় কর। 2
   (খ) P এবং Q বলের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। 4
   (গ) প্রমাণ কর যে, বলত্রয়ের লব্ধির পরিমাণ $M\sqrt{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}$. 4

07. উদ্দীপক-১: P, Q, R বলত্রয় একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ $60°$ এবং P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $150°$।

উদ্দীপক-২: 20 সে.মি দীর্ঘ AB হাল্কা দন্ডটি 10 সে.মি. ব্যবধানে দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W এবং 3W ওজন ঝুলানো হলো।

(ক) 15N এবং 20N ওজনের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত থাকলে, তাদের লব্ধি কত? 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $P = Q = \frac{R}{\sqrt{3}}$. 4

(গ) খুঁটি দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর। 4

08. উদ্দীপক-১: একটি বস্তুকণা স্থিরাবস্থা থেকে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা করে প্রথমে f_1 সুষম ত্বরণে এবং পরে f_2 সুষম মন্দনে চলো t সময় যাত্রা করে কণাটি S দূরত্ব গিয়ে থামে।

উদ্দীপক-২: কোনো অনুভূমিক তলের উপরস্থ একটি বিন্দু হতে একটি কণা u বেগে এবং α কোণে প্রক্ষিপ্ত হলো। তার পাল্লা R এবং লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা H.

(ক) একটি বস্তুকণাকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত করা হলো। কণাটি সর্বোচ্চ 39.2 মিটার উপরে উঠে ভূমিতে পতিত হলে, বেগ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{t^2}{2S} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. 19.6 মিটার উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর ছেড়ে দিলে ভূমিতে পড়তে কত সময় লাগবে?
(a) 1 sec (b) 1.41 sec
(c) 2 sec (d) 2.82 sec

02. 10N এবং 5N দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 15 মিটার লম্বা একটি হালকা দণ্ডের দুই প্রান্তে কার্যরত হলে ক্ষুদ্রতর বল থেকে লব্ধি কত দূরে ক্রিয়া করবে?
(a) 5 মিটার (b) 10 মিটার
(c) 15 মিটার (d) 30 মিটার

03. $z = x + iy$ হলে, $|z| = 5$ সমীকরণটি প্রকাশ করে-
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত
(c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

04. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ $(4, 8)$ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত?
(a) 20 (b) 16 (c) 12 (d) 8

05. $\tan\theta + 1 = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি?
(a) $(4n - 1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$
(b) $(4n + 1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$
(c) $(8n - 1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$
(d) $(8n + 1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

06. স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা করে একটি কণা 2 সেকেন্ডে 6 মিটার অতিক্রম করলে তৃতীয় সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে?
(a) 4.5 মিটার (b) 7.5 মিটার
(c) 13.5 মিটার (d) 15 মিটার

07. $9.8ms^{-1}$ আদিবেগে ভূমির সাথে $30°$ কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষেপ করা হলো। কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা কত?
(a) 0.25 m (b) 1.225 m
(c) 2.45 m (d) 4.9 m

08. $2y^2 - x^2 = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি?
(a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 3

09. একটি কণার উপর $3ms^{-1}$, $4ms^{-1}$ এবং $5ms^{-1}$ বেগ তিনটি ক্রিয়া করায় কণাটি সাম্যাবস্থায় আছে। ক্ষুদ্রতর বেগ দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) $0°$ (b) $60°$ (c) $90°$ (d) $120°$

10. $\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি?

(a) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$

(b) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

(c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

(d) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$P(x) = x^2 - Kx + 9$ একটি দ্বিঘাত বহুপদী, যেখানে K একটি ধ্রুবক।

11. $K = 2$ হলে $P(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান কত?

(a) -10 (b) -8 (c) 8 (d) 10

12. $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে যদি-

(a) $K > 6$ (b) $K < 6$

(c) $K = \pm 6i$ (d) $K = \pm 6$

13. $\cos\cot^{-1}2$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

14. $3x^3 - 6x + 8 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β ও γ হলে, $\sum\alpha$ এর মান কত?

(a) -6 (b) -2 (c) 0 (d) 2

15. $-\sqrt{3} - i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?

(a) $-\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{5\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

16. $4x^2 + y^2 = 4$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রে-

(i) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 4

(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 1

(iii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm\sqrt{2})$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

2N ও 3N মানের বলদ্বয় $60°$ কোণে একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

17. বলদ্বয়ের লব্ধির মান কত?

(a) $\sqrt{7}$ N (b) $\sqrt{19}$ N (c) 7 N (d) 19 N

18. লব্ধির বলের ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বলটির সাথে কত কোণ তৈরি করবে?

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4+3\sqrt{3}}\right)$ (d) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)$

19. $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ এর মান কত?

(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

20. $i^2 = -1$ হলে i^{-3} এর মান-

(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i

21. $1 - \sqrt{-3}$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^2 - 2x - 4 = 0$ (b) $x^2 - 2x + 4 = 0$

(c) $x^2 + 2x - 4 = 0$ (d) $x^2 + 2x + 4 = 0$

22. $z = i - 1$ হলে-

i. $\bar{Z} = -i - 1$ ii. $|z| = \sqrt{2}$

iii. z এর পোলার আকার $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y^2 = 1 - x$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

23. পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু কোনটি?

(a) $(-1, 0)$ (b) $(1, 0)$

(c) $(0, -1)$ (d) $(0, 1)$

24. পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখা কোনটি?

(a) $x = 0$ (b) $x - 2 = 0$

(c) $4x - 3 = 0$ (d) $4x - 5 = 0$

25. একটি বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত নিচের কোন বলত্রয়কে তাদের সাম্যাবস্থার জন্য একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে প্রকাশ করা সম্ভব নয়?

(a) 1N, 2N, ও 3N (b) 2N, 3N, ও 4N

(c) 3N, 4N, ও 5N (d) 3N, 5N, ও 7N

উত্তরপত্র

1	c	2	b	3	b	4	d	5	a	6	b	7	b	8	b	9	c	10	No	11	c	12	d	13	b
14	c	15	c	16	a	17	b	18	b	19	c	20	d	21	b	22	a	23	b	24	d	25	a		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

কুমিল্লা বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ–বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. উদ্দীপক-১: $z = -1 + i$ একটি জটিল সংখ্যা।
উদ্দীপক-২: $z = x + iy$.
(ক) $z = i$ হলে $\bar{z}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট আর্গন্ড চিত্রে দেখাও। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে $|z + 2| = 5$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

02. $10x^2 - 8x + 1 = 0$ এবং $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ দুইটি বহুপদী সমীকরণ।
(ক) $3x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 2
(খ) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় হবে উদ্দীপকে উল্লিখিত দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল ও অন্তরফলের যোগবোধক মান। 4
(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিঘাত সমীকরণের মূলত্রয় α, β, γ হলে [illegible] এর মান নির্ণয় কর। 4

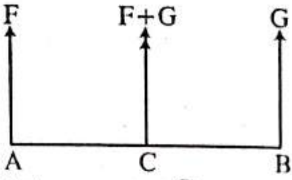
03. উদ্দীপক-১: $x^2 - 2x + b = 0$ এবং $x^2 - bx + 2 = 0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
উদ্দীপক-২: $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + i$.
(ক) α এর মান কত হলে $(a - 1)x^2 + (a + 2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে? 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত সমীকরণ দুইটির মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $b^2 + 4b - 12 = 0$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সমীকরণটি সমাধান কর। 4

04. উদ্দীপক-১: $f(x) = \cos x$.
উদ্দীপক-২: $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right) = \pi$.
(ক) $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\frac{3}{4}$ এর মান নির্ণয় কর। 2
(খ) $(-2\pi, 2\pi)$ ব্যবধিতে $f(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণটি সমাধান কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ হতে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = xyz$. 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. উদ্দীপক-১: একটি কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{13}}{3}$ এবং উহা $\left(4, \frac{\sqrt{28}}{3}\right)$ বিন্দুগামী।
উদ্দীপক-২: $x^2 + 2y^2 - 12x + 28 = 0$
(ক) $4x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ কনিকটি প্রমাণ আকারে প্রকাশ করে শনাক্ত কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত কনিকের অক্ষদ্বয়কে x– অক্ষ ও y– অক্ষ ধরে উহার অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

06. উদ্দীপক-১: একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x ও y অক্ষরেখা, একটি উপকেন্দ্র $(2,0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
উদ্দীপক-২: একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(-2,1)$.
(ক) $x^2 + 4y^2 = 1$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর. 2
(খ) নিয়ামকরেখা x অক্ষরেখার উপর লম্ব [illegible],0) বিন্দুগামী হলে, দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, উপবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + 2y^2 + 8x - 56 = 0$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(-6, -3)$ হলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. 

(ক) α কোণে ক্রিয়ারত 3 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং একই কোণে ক্রিয়ারত 6 ও 2 একক মানের বলদ্বয়ের লব্ধি 2R. α এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সমান্তরাল বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থান বিনিময় করলেও যদি তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুর অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে তবে দেখাও যে, F=G. 4

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের অবস্থান পরিবর্তন করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু FG বরাবর x দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $x = \frac{F-G}{F+G}AB; F > G$. 4

08. উদ্দীপক-১: একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে অবাধে পড়ন্ত একটি পাথর, তার গতির শেষতম সেকেন্ডে টাওয়ারের উচ্চতার $\frac{5}{9}$ অংশ অতিক্রম করে।

উদ্দীপক-২: দুইটি রেলগাড়ি একই রেল লাইনে যথাক্রমে u ও v সমবেগে একে অপরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। যখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব d তখন একে অপরকে দেখতে পায়। ট্রেন দুইটির সর্বোচ্চ মন্দন a ও b প্রয়োগ করে কোনো রকমে সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব।

(ক) 490 মিটার উচু একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে একটি পাথরকে আনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলো। পাথরটি মাটিতে পৌছার সময় নির্ণয় কর। 2

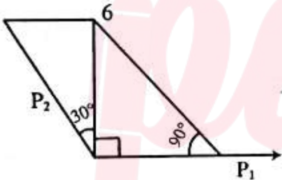
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $u^2b + v^2a = 2abd$. 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5}$ এর মান কত?
(a) -π (b) π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $-\frac{\pi}{2}$

02. 

চিত্র অনুসারে 6 একক বলের অংশকদ্বয় P_1 ও P_2 হলে, P_1 এর মান কোনটি?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 - 5x + k = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

03. k এর মান কত হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে?
(a) $k = 4$ (b) $k = \frac{25}{4}$ (c) $k < \frac{25}{4}$ (d) $k > \frac{25}{4}$

04. $k = 6$ হলে $\alpha + 2, \beta + 2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (b) $x^2 + 9x + 20 = 0$
(c) $x^2 + 9x - 20 = 0$ (d) $x^2 - 9x - 20 = 0$

05. $y^2 = 18x$ পরাবৃত্তের উপরস্থ (2,6) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত?
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{21}{2}$ (d) $\frac{13}{2}$

06. $z = x + iy$ হলে $|z - 1| = 5$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে?
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

07. একই বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R হলে-
i. $R = P + Q$, যখন $\alpha = 90°$
ii. $R = P \sim Q$, যখন $\alpha = 180°$
iii. $Q = P$ হলে $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $-1 - i\sqrt{3}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত?
(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$

09. অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে এবং 9.8 মি/সে. বেগে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি অনুভূমিকভাবে চলবে?
(a) $\frac{1}{2}$ সে (b) $\frac{1}{4}$ সে (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ সে (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ সে

10. অনুভূমিকের সাথে A কোণে এবং B বেগে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর
(i) সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \frac{B^2 \sin A}{2g}$
(ii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় গমনকাল $= \frac{2B \sin A}{g}$
(iii) অনুভূমিক পাল্লা $= \frac{B^2 \sin 2\alpha}{g}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii

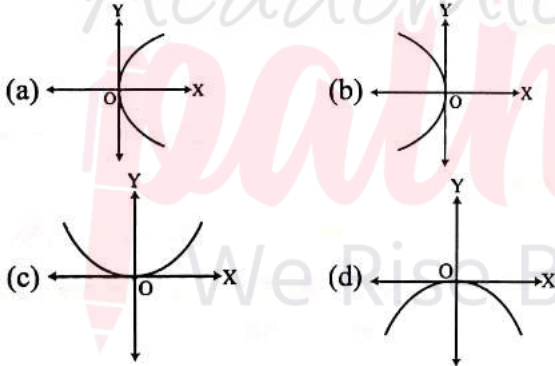
11. $\tan 5\theta . \tan 4\theta = 1$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?
(a) $(2n+1)\frac{\pi}{9}$ (b) $(2n-1)\frac{\pi}{9}$
(c) $(2n+1)\frac{\pi}{18}$ (d) $(2n-1)\frac{\pi}{18}$

12. $\sin 2\theta + 3\sin\theta = 0$ হলে θ এর মান কোনটি?
(a) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ (b) $(4n+1)\frac{\pi}{2}$
(c) $(2n+1)\pi$ (d) $n\pi$

13. $x^2 + 5y = 0$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি
(a) $4y + 5 = 0$ (b) $4x + 5 = 0$
(c) $4y - 5 = 0$ (d) $4x - 5 = 0$

14. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে অপর মূলটি কত?
(a) $\frac{1}{1-i}$ (b) $\frac{1-i}{2}$ (c) $\frac{1+i}{2}$ (d) $1 - i$

15. $x^2 = -12y$ এর স্কেচ কোনটি?



16. $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$ এর মান কত?
(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$

17. $\sqrt{6}$N মানের দুইটি সমান বল 60° কোণে এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধির মান কত?
(a) $2\sqrt{6}$N (b) $2\sqrt{3}$N (c) 18N (d) $3\sqrt{2}$N

18. $x^3 - \frac{1}{3}x - 15 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে–
(i) $\sum \alpha = 0$ (ii) $\sum \alpha\beta = -\frac{1}{3}$ (iii) $\alpha\beta\gamma = 15$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$9x^2 + 25y^2 = 225$

19. উদ্দীপকের কনিকের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(\pm4, 0)$ (b) $(\pm5, 0)$
(c) $(0, \pm4)$ (d) $(0, \pm5)$

20. উদ্দীপকের কনিকের নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) $\frac{25}{4}$ (b) $\frac{25}{2}$ (c) 4 (d) 8

21. 2N, $\sqrt{5}$N এবং 3N বলত্রয় কোনো বিন্দুতে ক্রিয়া করে ভারসাম্য সৃষ্টি করে। ক্ষুদ্রতম বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কোনটি?
(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 180°

22. স্থিরাবস্থা হতে সমত্বরণে চলমান একটি কণা 4 সেকেন্ডে 16 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। ৫ম সেকেন্ডে কণাটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?
(a) 9 মি. (b) 11 মি. (c) 18 মি. (d) 22 মি.

23. i^{-4} এর মান কোনটি?
(a) $-i$ (b) i (c) -1 (d) 1

24. $-1 + i$ এর পোলার আকার–
(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
(b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
(c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
(d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

25. 9.8 মিটার/সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপিত কোনো বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা কত?
(a) 2.0 মি. (b) 4.9 মি. (c) 9.8 মি. (d) 19.6 মি.

উত্তরপত্র

1	No	2	c	3	b	4	a	5	d	6	b	7	c	8	a	9	a	10	b	11	c	12	d	13	c
14	c	15	d	16	c	17	d	18	d	19	a	20	b	21	c	22	a	23	a	24	d	25	b		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

দিনাজপুর বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

01. দৃশ্যকল্প-১: $z_1 = 1 - 3i, z_2 = 1 - i$
দৃশ্যকল্প-২: $|z-3| - |z+3| = 4$
(ক) $(2+i)(x+iy) = 1 + 3i$ হলে x, y নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\sqrt{z_1 z_2}$ নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর যখন $z = x + iy$. 4

02. দৃশ্যকল্প-১: $(p+1)x^2 + 2(p+3)x + 2p + 3 = 0$ একটি রাশি।
দৃশ্যকল্প-২: $ax^2 + 3x + c = 0$ এবং $cx^2 + 3x + a = 0$ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
(ক) $2x^3 - 9x^2 + 9x + 2 \equiv (x-2)(ax^2 + bx + c)$ হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর যেখানে a, b এবং c ধ্রুবক। 2
(খ) p এর মান কত হলে ১ম দৃশ্যকল্পে উল্লিখিত রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে? 4
(গ) যদি দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তাহলে প্রমাণ কর যে, $c + a = \pm 3$. 4

03. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$
$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0 \ldots\ldots (ii)$
(ক) a, b মূলদ হলে, দেখাও যে, (i) সমীকরণের মূলদ্বয় সর্বদা মূলদ হবে। 2
(খ) (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \beta$ ও $|\alpha - \beta|$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) (ii) নং সমীকরণের একটি মূল $3 - \sqrt{2}$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর। 4

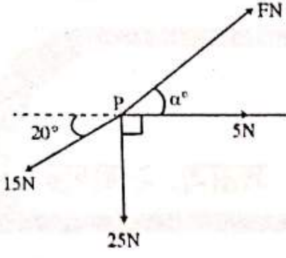
04. দৃশ্যকল্প-১: $2\sin^2\theta - 2 = \cos 2\theta$
দৃশ্যকল্প-২: $f(y) = \tan^{-1} y$.
(ক) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মুখ্যমান নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণ কর যেখানে $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\{2f(x)\} = 2\tan\{f(x) + f(x^3)\}$. 4

খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

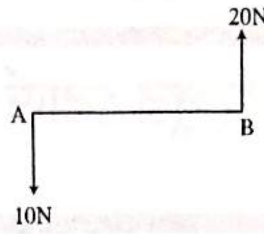
05. $A(1,-3), B(0,7), C(1,1)$
(ক) $4x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও এর অনুরূপ নিয়ামক রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। 2
(খ) $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ A এবং এটি B বিন্দুগামী হলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর। 4
(গ) A ও C কোনো উপবৃত্তের শীর্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

06.
Y
M(4, 2) N(8, 2)
X' O X
Y'

(ক) M ও N বিন্দুদ্বয় কোনো উপবৃত্তের ফোকাস এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2
(খ) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র M এবং শীর্ষ O। 4
(গ) M ও N বিন্দুদ্বয় কোনো অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07.


চিত্র: ১



চিত্র: ২

(ক) প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। 2

(খ) চিত্র-১ এর বলগুলো P বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় থাকলে F এবং α এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) চিত্র-২ থেকে দেখাও যে, বল দুটিকে সমপরিমাণে বৃদ্ধি করলে নতুন লব্ধি আরও দূরে সরে যাবে। 4

08. একজন ক্রিকেটার ভূমির সাথে $35°$ কোণে 85.5 মিটার/সে. বেগে একটি ক্রিকেট বল আঘাত করে।

(ক) সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা t-তম সেকেন্ডে x দূরত্ব এবং $(t+n)$ তম সেকেন্ডে y দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, ত্বরণ $f = \frac{y-x}{n}$. 2

(খ) বলটির সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

(গ) বলটি বাউন্ডারী লাইনের উপর পড়লে ক্রিকেটার হতে বাউন্ডারী লাইনের দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $3x^3 - 1 = 0$ এর মূলগুলো α, β ও γ হলে, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ এর মান-
(a) -1 (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1

02. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right) =$ কত?
(a) $\sin x$ (b) x (c) $1-x$ (d) $1+x$

03. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}y$ সমীকরণে $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, y এর মান কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$

04. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\alpha =$ কত?
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

05. $k = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে θ এর মান কত?
(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{5\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

06. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের আড় অক্ষ নিচের কোনটি?
(a) x-অক্ষ (b) y-অক্ষ
(c) x-অক্ষের সমান্তরাল (d) y-অক্ষের সমান্তরাল

07. $x^2 = 16y$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা কত হবে?
(a) $e = 1$ (b) $e = 0$
(c) $e > 1$ (d) $0 < e < 1$

08. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$
(i) উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{4}{5}$
(ii) উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $= \left(0, \pm\frac{24}{5}\right)$
(iii) নিয়ামক দুইটির দূরত্ব= 25
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়কে উপবৃত্তের অক্ষ ধরে ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$।

09. বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য কত একক?
(a) $\sqrt{5}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

10. উপবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $3x^2 + 5y^2 = 5$
(b) $4x^2 + 3y^2 = 5$
(c) $2x^2 + 3y^2 = 5$
(d) $4x^2 + 5y^2 = 5$

11. P মানের দুইটি সমান বলের লব্ধি P হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?
(a) $0°$ (b) $30°$ (c) $60°$ (d) $120°$

12. $120°$ কোণে আনত $\sqrt{7}$ এককের দুইটি সমান বল একই বিন্দু হতে ক্রিয়ারত-
(i) লব্ধির মান $\sqrt{7}$ একক
(ii) লব্ধি $\sqrt{7}$ একক বলের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।
(iii) লব্ধি বলদ্বয়ের যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

13. 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দূরত্বে একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত একক দূরত্বে সরে যাবে?
(a) 1 একক (b) 2 একক
(c) 3 একক (d) 4 একক

14. একটি ট্রেন 30 মি./সে. বেগে চলা অবস্থায় ব্রেক করে 5 মি./সে.^{2} মন্দন সৃষ্টি করা হলো। চতুর্থ সেকেন্ডে এটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?
(a) 12.5 মি. (b) 14.5 মি.
(c) 16.5 মি. (d) 18.5 মি.

15. u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু h উচ্চতায় আসার দুটি সময়ের পার্থক্য কত?
(a) $\sqrt{u^2 - 2gh}$ (b) $\frac{2}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$
(c) $\frac{g}{2}\sqrt{u^2 - 2gh}$ (d) $g\sqrt{u^2 - 2gh}$

16. কোনো প্রক্ষেপকের আনুভূমিক পাল্লা R, বিচরণকাল T, সর্বাধিক উচ্চতা H এবং প্রক্ষেপ কোণ α হলে-
(i) $R = 4H\cot\alpha$
(ii) $H = \frac{gT^2}{8}$
(iii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

17. একটি পাথরকে ভূমি থেকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 5 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দুতে ফিরে আসে। পাথরটির ভূমিতে পতন বেগ কত?
(a) $18.56\ ms^{-1}$ (b) $24.5\ ms^{-1}$
(c) $25.57\ ms^{-1}$ (d) $22.40\ ms^{-1}$

18. $i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13}$ এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) 0

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x = \sqrt[3]{1}$ একটি সমীকরণ।

19. সমীকরণের মূলগুলোর যোগফল-
(a) ω (b) ω^2 (c) 0 (d) 1

20. সমীকরণের মূলগুলোর গুণফল-
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $1 + i$

21. $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 2 + i$ হলে, $z_1\bar{z}_2$ এর মডুলাস
(a) $\tan^{-1} 2$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{10}$

22. নিচের কোনটি বহুপদী রাশি?
(a) $x^{-2} + x^{-3}$ (b) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$
(c) $x^{\frac{1}{4}}$ (d) x

23. কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হলে পৃথায়ক হবে-
(i) পূর্ণবর্গ (ii) ধনাত্মক সংখ্যা
(iii) ঋণাত্মক সংখ্যা
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (c) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β

24. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান-
(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) 5 (d) -5

25. α^2 ও β^2 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ-
(a) $9x^2 + 19x + 1 = 0$
(b) $9x^2 - 19x + 1 = 0$
(c) $9x^2 + 19x - 1 = 0$
(d) $9x^2 - 19x - 1 = 0$

উত্তরপত্র

1	d	2	b	3	c	4	c	5	b	6	b	7	a	8	b	9	a	10	d	11	d	12	d	13	c
14	a	15	b	16	d	17	b	18	d	19	c	20	c	21	d	22	d	23	a	24	c	25	b		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

ময়মনসিংহ বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময় ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও ত্রিকোণমিতি

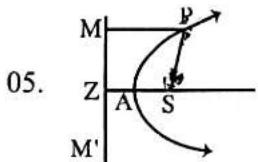
01. $z_1 = 1 + ix, z_2 = a + ib$ এবং $z_3 = x + iy$ তিনটি জটিল সংখ্যা।
(ক) $i - \sqrt{3}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 2
(খ) $|z_2|^2 = 1$ হলে, দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। 4
(গ) $\sqrt[3]{\overline{z_2}} = z_3$ হলে প্রমাণ কর যে, $|z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y} - \frac{a}{2x}}$. 4

02. $8x^2 + 2x - (b + 4) = 0$ এবং $y^2 + y + 1 = 0$ দুটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
(ক) $2 - \sqrt{-3}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। 2
(খ) ১ম সমীকরণের একটি মূল যদি অপরটির বর্গের সমান হয় তবে b এর মান নির্ণয় কর। 4
(গ) ২য় সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে দেখাও যে, $\alpha^2 = \beta$ এবং $\beta^2 = \alpha$. 4

03. দৃশকল্প-১: $p(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$.
দৃশকল্প-২: $ax^2 + bx + c = 0$ ....(i)
$cx^2 - 2bx + 4a = 0$ ....(ii)
(ক) $-2i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2
(খ) $p(x)$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে দেখাও যে, $a = b = c$. 4
(গ) (i) নং সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং (ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয় β ও γ হলে প্রমাণ কর যে, $2a + c = 0$ অথবা $(2a - c)^2 + 2b^2 = 0$. 4

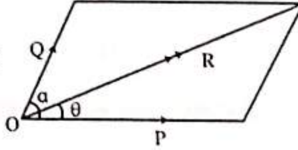
04. $f(x) = \cos x$ একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।
(ক) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{y}$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{y}$ 2
[যেখানে, $x > 0, y > 0,\ 0 < xy < 1$]
(খ) যদি $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = \frac{3\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. 4
(গ) $f(x) + \sqrt{3}\ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$ হলে সমীকরণটির সমাধান কর। 4

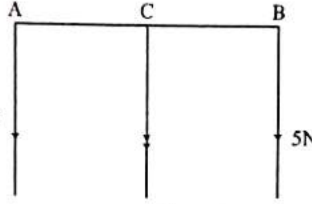
খ বিভাগ – বলবিদ্যা ও জ্যামিতি

05. 

উপরের চিত্রটি একটি কনিক নির্দেশ করে। যার উপকেন্দ্র S, শীর্ষবিন্দু A এবং MZM' নিয়ামক রেখা।
(ক) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপকের কনিকটির সমীকরণ, $y^2 = 6x$ এবং SP = 6 হলে, P বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপকের কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র (–1,1) এবং শীর্ষবিন্দু (2,–3)। 4

06. উদ্দীপক-১: $4x^2 + 6y^2 - 4x - 36y + 43 = 0$.
উদ্দীপক-২: একটি কনিকের উপকেন্দ্রদ্বয় (10,5) ও (8,3) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$
(ক) $5x^2 + 4y^2 = 1$ কনিকের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ এ বর্ণিত সমীকরণকে প্রমিত আকারে প্রকাশ করে কনিকটির নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ এ বর্ণিত কনিকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. দৃশ্যকল্প-১: 

; দৃশ্যকল্প-২: 

(ক) $P = Q$, $R = 3\sqrt{3}$ N এবং $\alpha = 60°$ হলে সমান বলদ্বয় নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\alpha = 3\theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{P^2-Q^2}{Q}; (P > Q)$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি AB বরাবর কত মিটার দূরে সরে যাবে তা নির্ণয় কর। 4

08. উদ্দীপক-১: দুটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির দ্বিগুণ। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধি বেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়।
উদ্দীপক-২: u বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার একই আনুভূমিক পাল্লা (R) এর জন্য দুটি বিচরণ পথের বিচরণকাল t_1 ও t_2.
(ক) u আদি বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বিচরণকাল নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপক-১ হতে α এর মান নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপক-২ হতে দেখাও যে, $R = \frac{1}{2} g t_1 t_2$. 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. i^{-65} এর মান কত?
(a) −1 (b) 1 (c) −i (d) i

02. $-3 - \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত?
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$

03. $z = x + iy$ হলে-
(i) $|z| = |\bar{z}|$ (ii) $z.|\bar{z}| = |z|^2$
(iii) $\arg(\bar{z}) = \arg(z)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i ও ii (b) i ও iii (c) ii ও iii (d) i, ii ও iii

04. $x = 1 + \sqrt{2}i$ হলে $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ এর মান কত?
(a) 4 (b) 2 (c) 1 (d) −2

05. $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\sum \alpha^2$ এর মান কত?
(a) −3 (b) −1 (c) 0 (d) 1

06. বাস্তব সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ হলে অপর মূল কোনটি?
(a) $\sqrt{2} + 1$ (b) $-\sqrt{2} - 1$
(c) $\sqrt{2} - 1$ (d) $-\sqrt{2} + 1$
Note: সহগগুলো বাস্তব সহগ বিশিষ্ট।

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x - x^2 + k = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

07. সমীকরণটির একটি উৎপাদক $x + 3$ হলে k এর মান কত?
(a) −15 (b) −3 (c) 3 (d) 15

08. সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব হলে-
(a) $k \le -1$ (b) $k \ge -1$ (c) $k < -1$ (d) $k > -1$

09. $x^2 = 2y$ কনিকের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

10. $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব কত?
(a) 2 (b) $\sqrt{3}$ (c) 1 (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

11. $x + y + k = 0$ রেখাটি $y^2 = 2x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান কত?

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) -2

12. $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ অধিবৃত্তের-

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$

(ii) আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 4

(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 5

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i ও ii (b) i ও iii (c) ii ও iii (d) i, ii ও iii

13. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ কোনটি?

(a) $y = \pm\frac{4}{3}x$ (b) $x = \pm\frac{4}{3}y$

(c) $y = \pm\frac{5}{4}y$ (d) $x = \pm\frac{5}{4}y$

14. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) 2

15. $\cot^{-1}2 - \cot^{-1}5$ এর মান কোনটি

(a) $\cot^{-1}3$ (b) $\cot^{-1}\frac{11}{3}$ (c) $\cot^{-1}\frac{11}{7}$ (d) $\cot^{-1}\frac{9}{7}$

16. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $2\cos 2\theta - 1 = 0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?

(a) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (b) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (c) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (d) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

17. অবান্তর মূল ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে-

(i) সিদ্ধ করে না

(ii) বর্গ করলে পাওয়া যায়

(iii) বর্গমূল করলে পাওয়া যায়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i ও ii (b) i ও iii (c) ii ও iii (d) i, ii ও iii

18. 6N ও 8N বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত হলে লব্ধি $2\sqrt{13}$N হবে?

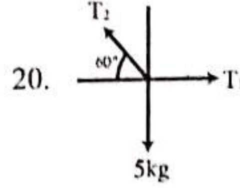
(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

19. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে যেকোনো দুটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের-

(i) সমান (ii) সমান্তরাল (iii) বিপরীতমুখী

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

20. 

T_1, T_2 ও 5N বলত্রয় ভারসাম্যে রাখা হলে T_1 এর মান কত?

(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ (c) $5\sqrt{3}$ (d) $20\sqrt{3}$

21. A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 45N ও 15N বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

AC = 5m হলে AB = কত?

(a) 5m (b) 10m (c) 15m (d) 20m

22. এক ব্যক্তি 450 মিটার চওড়া একটি স্রোতহীন নদী সাঁতার দিয়ে ঠিক সোজাসুজিভাবে 15 মিনিটে পার হলে সাতারুর বেগ কত কি.মি/ঘণ্টা?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{9}{5}$ (c) 3 (d) $\frac{9}{2}$

23. একটি বস্তু উপর থেকে মুক্তভাবে 5 সেকেন্ডে পড়ল। বস্তুটি শেষের 3 সেকেন্ডে কত ফুট পড়েছিল?

(a) 336 (b) 256 (c) 192 (d) 128

24. ভূমি হতে 3 মি./সে. আদিবেগে একটি বস্তু উলম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি সর্বাধিক কত মিটার উপরে উঠবে?

(a) $\frac{6}{g}$ (b) $\frac{3}{g}$ (c) $\frac{9}{2g}$ (d) $\frac{9}{g}$

25. u আদিবেগ আনুভূমিকের সাথে α কোণে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হলে-

(i) বিচরণকাল $\frac{2u\sin\alpha}{g}$

(ii) বৃহত্তম পাল্লা $\frac{u^2}{g}$

(iii) সর্বাধিক উচ্চতা $\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

উত্তরপত্র

1	c	2	d	3	a	4	d	5	b	6	b	7	d	8	b	9	c	10	a	11	b	12	c	13	a
14	c	15	b	16	d	17	a	18	d	19	b	20	a	21	b	22	b	23	a	24	c	25	d		

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

মডেল টেস্ট-০১

পূর্ণমান: ৫০ + ২৫=৭৫ সময়: ৩ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৫০ সময়: ২: ৩৫ মিনিট

01. (i) $x = a + b,\ y = a\omega + b\omega^2$ এবং $z = a\omega^2 + b\omega$

(ii) ω হলো এককের একটি জটিল ঘনমূল।

(ক) মডুলাস ও আর্গুমেন্ট বলতে কী বুঝ? 2

(খ) (i) নং থেকে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = 6ab$ 4

(গ) (ii) থেকে প্রমাণ কর যে, $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8) = 9$ 4

02. $mx^2 + nx + Q = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ক) $m = n = Q$ হলে উদ্দীপকের সমীকরণের মূলগুলোর প্রকৃতি ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) $m = 4, n = -6, Q = 1$ ধরে প্রাপ্ত সমীকরণের মূলগুলো α, β হলে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ বের কর। 4

(গ) $m = 27, n = 6, Q = -(p+2)$ হলে প্রাপ্ত সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে P এর মান বের কর। 4

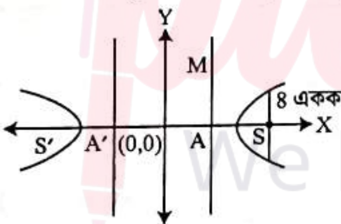
03. $y^2 = 4ax$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

(ক) একটি সরল চিত্রের সাহায্যে পরাবৃত্ত উপস্থাপন কর। 2

(খ) $ln = am^2$ হয় তবে দেখাও যে, $lx + my + n = 0$ রেখা পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করে। 4

(গ) $a = 4$ এবং কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 হলে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

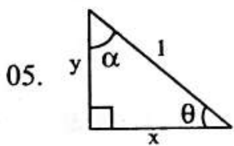
04. একটি অধিবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে অবস্থিত।



(ক) কোন অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 এবং 10 একক হলে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আড় অক্ষ X অক্ষ বরাবর এবং উৎকেন্দ্রিকতা 3 হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের আড় অক্ষ Y অক্ষ বরাবর এবং যা $(2,3)$ ও $(1,-2)$ বিন্দুগামী হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

05. 

(ক) α ও θ কে sine এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে প্রকাশ কর। 2

(খ) $x + y = \sqrt{2}$ হলে θ নির্ণয় কর। 4

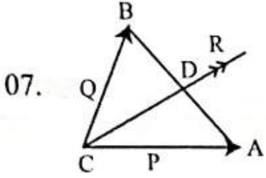
(গ) $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$। 4

06. $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \tan^{-1} x$

(ক) দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ । 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2g\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.\tan\frac{\theta}{2}\right) = \cos^{-1}\frac{b+af(\theta)}{a+bf(\theta)}$ । 4

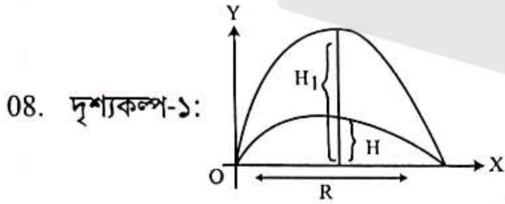
(গ) সমাধান কর: $\sqrt{3}f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1, -2\pi < x < 2\pi$ । 4

07. 

(ক) বলের ত্রিভুজ সূত্রটি লিখ। 2

(খ) চিত্রে P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে $\cos A$ ও $\cos B$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, ইহাদের লব্ধি R, $\sin C$ এর সমানুপাতিক। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, লব্ধির ক্রিয়ারেখা CA এর সাথে $\frac{1}{2}(A + C - B)$ কোণ উৎপন্ন করে। 4

08. দৃশ্যকল্প-১: 

দৃশ্যকল্প-২: শিমুল ও মিজু প্রত্যেকেই আলাদাভাবে নৌকা নিয়ে 3 কি.মি./ঘণ্টা বেগে প্রবাহিত 500 মিটার প্রশস্ত একটি নদী পার হতে চায়। তাদের প্রত্যেকের নৌকার বেগ 5 কি.মি./ঘণ্টা।

(ক) একটি প্রক্ষেপক $21ms^{-1}$ বেগে এবং অনুভূমিকের সাথে 30^o কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হল, এর আনুভূমিক পাল্লা কত? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $R = 4\sqrt{HH_1}$ । 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ শিমুল স্বল্পতম পথে এবং মিজু স্বল্পতম সময়ে নদী পাড়ি দিলে তাদের প্রয়োজনীয় সময়ের ব্যবধান কত? 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ২৫ সময়: ২৫ মিনিট

01. এককের ঘনমূল তিনটির যোগফল-
(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) কোনটিই নয়

02. $1 + \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যার–
(i) মডুলাস = 2 (ii) আর্গুমেন্ট = $\frac{\pi}{3}$
(iii) অনুবন্ধি জটিল সংখ্যা = $-1 + \sqrt{3}i$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

03. $-8 - 6i$ এর বর্গমূল কোনটি?
(a) $\pm(1 - 3i)$ (b) $\pm(3 - 6i)$
(c) $\pm(3 - 2i)$ (d) $\pm(2 + 2i)$

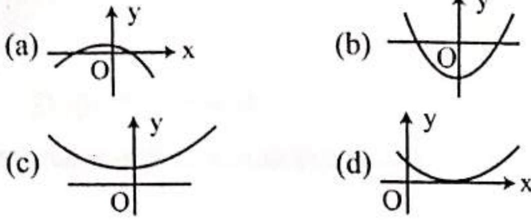
04. যদি $Z = x + iy$ হয় হবে $Z\bar{Z} = 0$ সমীকরণটি হবে-
(a) সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত
(c) অধিবৃত্ত (d) বৃত্ত

05. $6x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল α ও β হলে, $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 3 = 0$
(c) $x^2 - 11x + 30 = 0$ (d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

06. $x^2 - 4x + 16 = 0$ সমীকরণের-
(i) মূলদ্বয় মূলদ (ii) মূলদ্বয়ের যোগফল−4
(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল 16
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

07. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি কত?
(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{9}$

08. নিচের কোন লেখচিত্রের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান?



09. কেন্দ্রবিহীন কনিক নিচের কোনটি?

(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) অধিবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

10. $y^2 = 32x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যে বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 12 ঐ বিন্দুর ভুজ কত?

(a) −4 (b) −8 (c) 4 (d) 8

$SP = 12 = PM = PM' + MM' = x + 8$

$\Rightarrow x = 4 \therefore$ ভুজ = 4

11. $(\pm 3,0)$ উপকেন্দ্র এবং $\frac{1}{3}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের নিয়ামক রেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $x = \pm 9$ (b) $x = \pm 27$
(c) $x = \pm 3$ (d) $x = \pm 8$

12. $4y^2 - 5x^2 = 20$ অধিবৃত্তের—

(i) শীর্ষের স্থানাংক (0,0)
(ii) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$
(iii) নিয়ামকের সমীকরণ $3y \pm 5 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

13. $x = 2t, y = t^2$ দ্বারা সূচিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক কত?

(a) $(-1,0)$ (b) $(0,-1)$ (c) $(1,0)$ (d) $(0,1)$

14. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান-

(a) $-\frac{1}{7}$ (b) 1 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{1}{7}$

15. $\sec^2(\cot^{-1} 5) =$ কত?

(a) $\frac{26}{25}$ (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{24}{25}$

16. $\sin\theta - \cos\theta = 0$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [যেখানে $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

17. $n \in \mathbb{Z}$ হলে, $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এর সাধারণ সমাধান কোনটি?

(a) $(8n \pm 1)\frac{\pi}{8}$ (b) $(8n \pm 1)\frac{\pi}{4}$
(c) $(n \pm 1)\frac{\pi}{8}$ (d) $(n \pm 1)\frac{\pi}{4}$

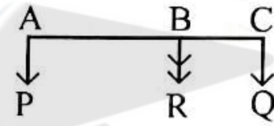
18. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) 180° (b) 0° (c) 45° (d) 90°

19. কোন বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্য রাখে। সমান বলদ্বয়ের প্রতিটির মান-

(a) 3N (b) $3\sqrt{3}$N (c) $\sqrt{3}$N (d) 7N

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে P ও Q সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি R, এখানে P = 12N, Q = 9 N এবং AB = 9 সে.মি.

20. R বলের মান কোনটি?

(a) 21 N (b) 3 N (c) 9 N (d) 12 N

21. BC এর দৈর্ঘ্য কত?

(a) 9 সে.মি (b) 21 সে.মি (c) $\frac{27}{4}$ সে.মি (d) 12 সে.মি

22. 45° কোণে নিক্ষিপ্ত কোনো বস্তুর আনুভূমিক পাল্লা ও সর্বোচ্চ উচ্চতা যথাক্রমে R ও H হলে কোন সম্পর্কটি সত্য হবে?

(a) 2R = H (b) R = H (c) R = 2H (d) R = 4H

23. $s = t^3 + 5t^2 + 7$ হলে, 4 সেকেন্ড পরে ত্বরণ কত?

(a) 34 (b) 88 (c) 118 (d) 54

24. একটি মিনারের শীর্ষ হতে 19.5 মিটার/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 5 sce পরে মিনারের পাদদেশে পতিত হয়। মিনারের উচ্চতা কত?

(a) 15 মি. (b) 25 মি. (c) 50 মি. (d) 220 মি.

25. স্রোতের বেগের দ্বিগুণ বেগ সম্পন্ন কোনো ব্যক্তি সোজাসুজিভাবে নদী পার হতে চায়। স্রোতের সাথে কত কোণে তাকে সাঁতার দিতে হবে?

(a) 60° (b) 90° (c) 110° (d) 120°

উত্তরপত্র

1	c	2	a	3	a	4	d	5	a	6	a	7	d	8	d	9	d	10	c	11	b	12	c	13	d
14	b	15	a	16	c	17	a	18	b	19	b	20	a	21	d	22	d	23	a	24	b	25	d		

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

মডেল টেস্ট-০২

পূর্ণমান: ৫০ + ২৫=৭৫ সময়: ৩ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৫০ সময়: ২: ৩৫ মিনিট

01. $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 4 + 3i$ এবং $p = a - ib$

(ক) $z_1 + z_2$ জটিল সংখ্যাটির পোলার আকার নির্ণয় কর। 2

(খ) $z_1 z_2$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $a^2 + b^2 = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = p$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, এখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা। 4

02. $px^2 + qx + r = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ক) দেখাও যে, $m = n$ না হলে, $2x^2 - 2(m+n)x + m^2 + n^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না। 2

(খ) উদ্দীপকের সমীকরণের একটি মূল যদি p ও r স্থান বিনিময় করলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তার একটি মূলের দ্বিগুণ হয়। তবে প্রমাণ কর যে, $2p = r$ অথবা $(2p + r)^2 = 2q^2$ । 4

(গ) উদ্দীপকে $p = 1, q = 5, r = 6$ এর জন্য দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha - 2$ এবং $\beta - 3$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর। 4

03. $4x^2 + Py^2 = 80 \cdots\cdots\cdots (i)$

$5x^2 - 4y^2 = 20 \cdots\cdots\cdots (ii)$

(ক) উৎকেন্দ্রিকতা e এর মানের উপর কনিকের আকৃতি নির্ভর করে। ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) (i) উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দুগামী হলে P নির্ণয় করে উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। 4

(গ) (ii) এর উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় করে দেখাও যে, কণিকটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। 4

04. একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (2,5) এবং $x = 4$ রেখাটি পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুতে অক্ষের উপর লম্ব।

(ক) $7x^2 + 16y^2 = 112$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

05. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = p$

(ক) $\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17}\right)$- কে সাইনের বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ কর। 2

(খ) $x = -\cos\theta\,; y = \cos 3\theta$ এবং $z = 0$ হলে p নির্ণয় কর। 4

(গ) $p = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$। 4

06. α ও β দুইটি বাস্তব সংখ্যা যেখানে $\alpha = \frac{x}{a}$ এবং $\beta = \frac{y}{b}$।

(ক) $\sin^{-1}\frac{2}{5x} = \frac{\pi}{3}$ হলে $\sec^{-1}\frac{5x}{2}$ এর মান কত? 2

(খ) উদ্দীপকের $a = b = 2$ এবং $\cos^{-1}\alpha + \cos^{-1}\beta = \theta$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy\cos\theta + \frac{1}{4}y^2 = \sin^2\theta$। 4

(গ) যদি উদ্দীপকের $a = 2$ এবং $b = 3$ হয় তবে সমাধান কর $\sec^{-1}\alpha - \sec^{-1}\beta = \sec^{-1}3 - \sec^{-1}2$ । 4

07. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R যথাক্রমে ΔABC এর কৌণিক বিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজটির লম্ব কেন্দ্রগামী।

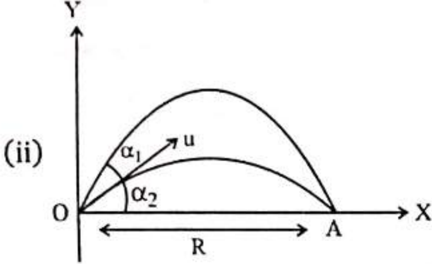
(ক) ত্রিভুজটির অন্ত:কেন্দ্র I হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ । 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = \tan A : \tan B : \tan C$ । 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2) = R(a^2 + b^2 - c^2)$ । 4

08. (i) সমত্বরণে চলমান একখানি রেলগাড়ি ধারাবাহিক t_1, t_2 ও t_3 সময়ে সমান ক্রমিক দূরত্ব অতিক্রম করে।

(ii)



এখানে α_1 ও α_2 কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বিচরণকাল t_1 ও t_2 ।

(ক) ত্বরণ কাকে বলে? বিচরণকাল বলতে কী বুঝ? 2

(খ) উদ্দীপক (i) হতে প্রমাণ কর: $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1+t_2+t_3}$ । 4

(খ) উদ্দীপক (ii) হতে প্রমাণ কর যে, $R = \frac{1}{2} g t_1 t_2$ । 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ২৫ সময়: ২৫ মিনিট

01. 1 – i জটিল সংখ্যাটির—

(i) মডুলাস = $\sqrt{2}$ (ii) আর্গুমেন্ট = $\frac{\pi}{4}$

(iii) পোলার আকৃতি, $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω, যেখানে $\omega = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

02. $(1+\omega)(1+\omega^2)$ এর মান কোনটি?

(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

03. $\arg \omega$ কোনটি?

(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

04. 2i এর বর্গমূল কোনটি?

(a) $\pm(1+i)$ (b) $\pm(1-i)$

(c) $\pm(-1+i)$ (d) $\pm(-1-i)$

05. 7 + 2i ও 7 − 2i মূলদ্বয়বিশিষ্ট সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x^2 - 14x + 53 = 0$ (b) $x^2 - 14x - 53 = 0$

(c) $x^2 + 14x - 53 = 0$ (d) $x^2 + 14x + 53 = 0$

06. $4x^3 - 7x^2 + 2x - 8 = 0$ সমীকরণের মূল ত্রয়ের সমষ্টি কোনটি?

(a) $-\frac{4}{7}$ (b) $\frac{-7}{4}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{4}{7}$

07. $2x^2 + 2x - k$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে, k এর সঠিক মান নিচের কোনটি?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{1}{2}$

08. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়-

(i) মূলদ্বয় $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) পৃথায়ক = $b^2 - 4ac$

(iii) মূলদ্বয়ের গুণফল = $\frac{-b}{a}$

নিচের কোনটি সঠিক?

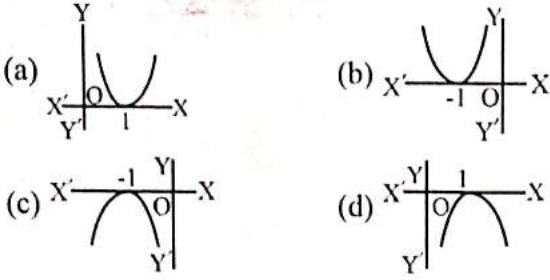
(a) ii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

09. পরাবৃত্তের জন্য প্রযোজ্য কোনটি?

(a) e = 1 (b) e < 1

(c) e > 1 (d) e = 0

10. $y = -(x-1)^2$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র কোনটি?



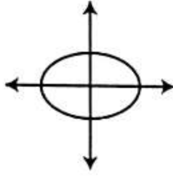
11. $4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x - 225 = 0$ সমীকরণটির জ্যামিতিক পরিচয় কোনটি?

(a) পরাবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) বৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

12. P এর মান কত হলে $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{p} = 1$ উপবৃত্ত (6, 4) বিন্দু দিয়ে যায়?

(a) $\frac{1}{25}$ (b) $\frac{17}{200}$ (c) $\frac{200}{17}$ (d) 25

13. চিত্রে অঙ্কিত উপবৃত্তটি কোন শর্তে বৃত্ত হবে?



(a) $e = 0$ (b) $e = 1$ (c) $e > 1$ (d) $e = \infty$

14. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি?

(a) $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ (b) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (c) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ (d) $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

15. $\cos^{-1}\frac{1}{3} + \cos^{-1}\frac{1}{2} =$ কত?

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{6} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

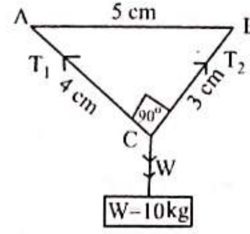
16. $\cot(\cos^{-1}x)$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

17. $\tan^2\theta - 2\sqrt{3}\tan\theta + 3 = 0$ এর সমাধান কোনটি? [যেখানে $0 < \theta < \pi$]

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

18.



C বিন্দুতে T_1, T_2 এবং $W = 10$ কেজি ওজনের ক্রিয়ার ফলে ভারসাম্য সৃষ্টি হয়। রশির টান $T_1 =$ কত?

(a) 4 কেজি ওজন (b) 6 কেজি ওজন

(c) 8 কেজি ওজন (d) 10 কেজি ওজন

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

P ও Q(P > Q) দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 8N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 2N।

19. P এর মান কোনটি?

(a) 2N (b) 6N (c) 5N (d) 8N

20. বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে, লব্ধির মান কোনটি?

(a) 7N (b) 3N (c) $\sqrt{13}$N (d) 5N

21. কোন বিন্দুতে 2P এবং P মানের দুইটি বল ক্রিয়ারত। প্রথমটিকে তিনগুণ এবং দ্বিতীয়টিকে 12 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত?

(a) 5 একক (b) 6 একক (c) 7 একক (d) 10 একক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি প্রক্ষেপক 25 মি/সেঃ বেগে এবং অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে শূন্যে প্রক্ষেপ করা হল।

22. অনুভূমিক পাল্লা কত?

(a) 55.23m (b) 32.88m (c) 15.94m (d) 7.97m

23. সর্বাধিক উচ্চতা কত?

(a) 55.23m (b) 31.88m (c) 15.94m (d) 7.97m

24. $9.8ms^{-1}$ বেগে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু সর্বাধিক কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

(a) 1.5m (b) 3m (c) 4.9m (d) 9.8m

25. স্রোতের বেগের দ্বিগুণ বেগ সম্পন্ন কোনো ব্যক্তি সোজাসুজিভাবে নদী পার হতে চায়। স্রোতের সাথে কত কোণে তাকে সাঁতার দিতে হবে?

(a) 60° (b) 90° (c) 110° (d) 120°

উত্তরপত্র

1	b	2	c	3	a	4	a	5	a	6	c	7	d	8	b	9	a	10	d	11	d	12	d	13	a
14	b	15	b	16	b	17	b	18	b	19	c	20	a	21	b	22	a	23	d	24	d	25	d		

উদ্ভাস-এর ঢাকার শাখাসমূহ

শাখা	ফোন নং	ঠিকানা
মিরপুর	০১৭১৩২৩৬৭০৫	প্লট-৪ (৪র্থ তলা), ব্লক-বি, সেকশন-৬ (শেরেবাংলা স্টেডিয়ামের ৫নং গেটের বিপরীতে)।
রূপনগর	০১৭১৩২৩৬৭৩৪	বাড়ী নং-২০ (৪র্থ তলা), রোড নং-১২, রূপনগর, মিরপুর।
ক্যান্টনমেন্ট	০১৭১৩২৩৬৭২৪	৮৩/১,সালাম প্লাজা (৪র্থ তলা), কচুক্ষেত মেইন রোড (বাটা শোরুমের পাশের বিল্ডিং), ঢাকা ক্যান্টনমেন্ট।
ফার্মগেট	০১৭১৩২৩৬৭১১	মালেক টাওয়ার (৬ষ্ঠ তলা, ২য় লিফটের ৫), ফার্মগেট (ফার্মগেট পুলিশ বক্সের বিপরীতে)।
	০১৭১৩২৩৬৭১০	৭৮ গ্রীন রোড (২য় তলা) হোটেল গ্রীন প্যালেস-এর পাশের বিল্ডিং।
	০১৭৮৭৬৮৭৫০১	কনকর্ড টাওয়ার (৫ম তলা) ফার্মগেট পুলিশ বক্সের বিপরীতে।
মোহাম্মদপুর	০১৭১৩২৩৬৭০১	বাড়ী নং-১৪/১৭ (২য় তলা), ইকবাল রোড, মোহাম্মদপুর (পোস্ট অফিসের গলি)।
সাইন্স ল্যাব.	০১৭১৩২৩৬৭০৬	হ্যাপী আর্কেড শপিং মল (৩য় তলা), বাড়ী নং- ৩, রোড নং- ৩ মিরপুর রোড, ধানমন্ডি।
বকশিবাজার	০১৭১৩২৩৬৭১২	হেলিকন সেন্টার (৪র্থ তলা), ১৯/১, ১৯/২ (১৮ তলা ভবন), বকশিবাজার মোড় (ঢাকা মেডিকেল কলেজ সংলগ্ন)।
লক্ষীবাজার	০১৭১৩২৩৬৭২০	১৫, লক্ষীবাজার (৪র্থ তলা), সেন্ট গ্রেগরী স্কুলের বিপরীতে, পুরান ঢাকা।
যাত্রাবাড়ী	০১৭১৩২৩৬৭১৯	বাড়ী নং-১০১, শহীদ ফারুক সড়ক (৩য় তলা), যাত্রাবাড়ী (অগ্রণী ব্যাংকের পাশের বিল্ডিং)।
দনিয়া	০১৭১৩২৩৬৭১৮	বাড়ী নং-৫৯৪ (২য় তলা), দনিয়া বাজার রোড, দনিয়া (দনিয়া মাজার-এর পাশের বিল্ডিং)।
ডেমরা (কোনাপাড়া)	০১৭১৩২৩৬৭৫৭	আজিজ টাওয়ার (৩য় তলা), ফার্মের মোড়, কোনাপাড়া, ডেমরা (UCB ব্যাংকের উপরে)।
বনশ্রী	০১৭১৩২৩৬৭২৩	বাড়ী নং-১৩, ব্লক-বি (৪র্থ তলা), রামপুরা (মেইন রোড, বনশ্রী প্রজেক্ট)।
বাসাবো	০১৭১৩২৩৬৭২২	বাড়ী নং-১১৪/এ (২য় তলা), সবুজবাগ, বাসাবো (বৌদ্ধ মন্দির-এর বিপরীতে)।
খিলগাঁও	০১৭১৩২৩৬৭৬৮	বাড়ি নং ১৪১৪/১/এ ন্যাশনাল আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজের ১নং বিল্ডিং গেইট এর বিপরীতে।
মতিঝিল	০১৭১৩২৩৬৭০৮	বাড়ী নং-১৬৭, ইডেন বিল্ডিং (২য় তলা), মতিঝিল (নটর ডেম কলেজের বিপরীতে)।
শান্তিনগর	০১৭১৩২৩৬৭০৩	১ নং সিদ্ধেশ্বরী লেন, মৃধা ভবন (৪র্থ তলা, লিফটের ৩), শান্তিনগর (সিদ্ধেশ্বরী গার্লস স্কুলের পূর্ব পাশে)।
মালিবাগ	০১৭১৩২৩৬৭০২	হোসাফ শপিং কমপ্লেক্স (৪র্থ তলা), মালিবাগ মোড় (মেডিনোভা ডায়াগনস্টিক সেন্টার বিল্ডিং)।
টংগী	০১৭১৩২৩৬৭৫৯	হোল্ডিং- ১৮৬/৯, এস. এস. একাডেমী রোড (২য় তলা), আউচপাড়া, টংগী।
উত্তরা	০১৭১৩২৩৬৭০৭	সেক্টর নং-৬, রোড নং-১২, হাউজ নং-৭ (৫ম তলা), হাউজ বিল্ডিং, উত্তরা।
সাভার	০১৭১৩২৩৬৭২১	বি-২ জালেশ্বর, ওয়াইএমসিএ বিল্ডিং, রেডিও কলোনী, সাভার, (সিঙ্গার শো-রুম এর ২য় তলা)।

উদ্ভাস-এর ঢাকার বাইরের শাখাসমূহ

গাজীপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪৬	ও কে টাওয়ার, স্বপ্ন শপিং এর ৩য় তলা (সরকারি মহিলা কলেজের উত্তর পার্শ্বে), জয়দেবপুর।
নারায়ণগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭১৭	এলাহী ভিলা, ৩৯/এ (২য় তলা), আল্লামা ইকবাল রোড (জামে মসজিদের দক্ষিণে), চাষাড়া।
ময়মনসিংহ	০১৭১৩২৩৬৭১৬	বাড়ী নং-১৯/এ (২য় তলা), সাহেব আলী রোড, নতুন বাজার, ময়মনসিংহ।
ময়মনসিংহ (কে.বি.)	০১৭১৩২৩৬৭৬৯	বাড়ী নং-৯৯ সরকার প্লাজা (২য় তলা), কেওয়াটখালি, ওয়াপদা মোড়, কে.বি. ইসমাইল রোড।
জামালপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪০	বাড়ী নং- ৪৮ (৩য় তলা), আমলাপাড়া (জিলা স্কুল-এর বিপরীতে), জামালপুর।
শেরপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪৯	বাড়ী নং-২৫১, ওয়ালটন প্লাজা (২য় তলা), খরমপুর, শেরপুর।
কিশোরগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৩৯	বুলবুল ভিলা (৩য় তলা), বকুলতলা মোড়, খরমপট্টি, কিশোরগঞ্জ।
নেত্রকোণা	০১৭১৩২৩৬৭৬৭	বাড়ী নং-৬৪১ (৩য় তলা), পৌরসভার বিপরীতে, নেত্রকোণা।
নরসিংদী	০১৭১৩২৩৬৭৩৮	বাড়ী নং-২০৫/০৪, নুসরাত ভিলা (২য় তলা), বালুর মাঠ, পশ্চিম ব্রাহ্মন্দী, নরসিংদী।
ব্রাহ্মণবাড়িয়া	০১৭১৩২৩৬৭৪৩	বাড়ী নং- ৯৬৩, খালেক মঞ্জিল (২য় তলা), মৌলভীপাড়া, ব্রাহ্মণবাড়িয়া।
সিলেট	০১৭১৩২৩৬৭২৯	জুবায়ের বাণিজ্যিক ভবন (২য় তলা), চৌহাট্টা (সিভিল সার্জন কার্যালয়-এর বিপরীতে)।
টাঙ্গাইল	০১৭১৩২৩৬৭৩৭	বাড়ী নং-২৮৭, জেলা সদর রোড, আকুরটাকুর পাড়া, টাঙ্গাইল (ধলেশ্বরী হাসপাতাল-এর ৪র্থ তলা)।
সিরাজগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৪২	বাড়ী নং- ৪, এস কে ভবন (৪র্থ তলা), বিএ কলেজ রোড (কাগজ বিতান সংলগ্ন), সিরাজগঞ্জ।
পাবনা	০১৭১৩২৩৬৭৩৬	আলিয়া মাদ্রাসা মার্কেট (২য় তলা), রাধানগর, পাবনা।
কুষ্টিয়া	০১৭১৩২৩৬৭৩৫	বাড়ী নং-৩/১ (২য় তলা), বিচারপতি মাহবুব মোর্শেদ সড়ক, পেয়ারাতলা, কুষ্টিয়া।
ঝিনাইদহ	০১৭১৩২৩৬৭৬১	কে সি কলেজের পশ্চিমে (এস এ পরিবহন সংলগ্ন), ঝিনাইদহ।
চুয়াডাঙ্গা	০১৭১৩২৩৬৭৬৪	বাড়ী নং- ২৯৫৭ (৩য় তলা), কলেজ রোড (গণপূর্ত অফিসের সামনে), চুয়াডাঙ্গা।
রাজশাহী	০১৭১৩২৩৬৭১৩	বাড়ী নং-১৫৪/২ (৩য় তলা), কাদিরগঞ্জ (নগর ভবনের পশ্চিম পাশে), রাজশাহী।
নওগাঁ	০১৭১৩২৩৬৭৫৬	আফিয়া গার্ডেন (৩য় তলা), কেডি মোড়ের উত্তর পার্শ্বে (পিএম স্কুল সংলগ্ন), উকিল পাড়া, নওগাঁ।
নাটোর	০১৭১৩২৩৬৭৫১	কাজী টাওয়ার (৪র্থ তলা), বই পট্টি, স্টেশন রোড, আলাইপুর, নাটোর।
চাঁপাইনবাবগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৪৭	বাড়ী নং-৫২, গাবতলা মোড় (নর্থ ব্রীজ স্কুলের ৪র্থ তলা), চাঁপাইনবাবগঞ্জ।
বগুড়া	০১৭১৩২৩৬৭২৭	বাড়ী নং-২৯২/৩০৪, ফজল কটেজ (২য় তলা), জলেশ্বরীতলা (কালী মন্দির সংলগ্ন), বগুড়া।
জয়পুরহাট	০১৭১৩২৩৬৭৫৪	প্রফেসর পাড়া, সূর্যের হাসি ক্লিনিক এর ৪র্থ তলা, জয়পুরহাট।
গাইবান্ধা	০১৭১৩২৩৬৭৫৫	আরশী প্লাজা (৩য় তলা), ডাক বাংলো মোড়, ডিবি রোড, গাইবান্ধা।
রংপুর	০১৭১৩২৩৬৭২৬	বাড়ী নং-৩৭ (৪র্থ তলা), মেডিকেল মোড় (রংপুর ক্যান্ট. পাবলিক কলেজ গেটের বিপরীতে)।
কুড়িগ্রাম	০১৭১৩২৩৬৭৫৩	এম আর জেড প্লাজা (২য় তলা), ঘোষ পাড়া (সেবা ক্লিনিক-এর সামনে), কুড়িগ্রাম।
সৈয়দপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪১	বাড়ী নং- ২০২ (৩য় তলা), দিনাজপুর রোড, নতুন বাবু পাড়া (সিঙ্গার শো-রুমের উপরে)।
দিনাজপুর	০১৭১৩২৩৬৭৩৩	নার্গিস প্লাজা (৩য় তলা), চারুবাবুর মোড় (সেবা ফার্মেসীর উপরে), দিনাজপুর।
ঠাকুরগাঁও	০১৭১৩২৩৬৭৪৮	ইসলাম প্লাজার পশ্চিম পার্শ্বে, আলিম এন্টারপ্রাইজের (৩য় তলা) আমতলী মোড়।
মানিকগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৬৩	মানিকগঞ্জ প্লাজা (২য় তলা), শহীদ রফিক সড়ক, মানিকগঞ্জ।
ফরিদপুর	০১৭১৩২৩৬৭৩২	বাড়ী নং-৫৫ (২য় তলা), সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ রোড (অম্বিকা সড়ক), ঝিলটুলি।
গোপালগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৬০	হোল্ডিং- ২৮১/৩ (৪র্থ তলা), বটতলা, গোপালগঞ্জ।
মাগুরা	০১৭১৩২৩৬৭৫২	বাড়ী নং- ৪৫/৪৬ (৩য় তলা), কাউন্সিল পাড়া (পৌরসভার পিছনে), মাগুরা।
যশোর	০১৭১৩২৩৬৭৩১	মতি শপিং কমপ্লেক্স (৩য় তলা), জজ কোর্ট মোড় (প্রেস ক্লাবের পাশের বিল্ডিং), যশোর।
খুলনা	০১৭১৩২৩৬৭১৫	বাড়ী নং-৪৬/১ (৫ম তলা), মশিউর রহমান রোড, শান্তিধাম মোড়, খুলনা।
সাতক্ষীরা	০১৭১৩২৩৬৭৫০	সরকারি কলেজ রোড (২য় তলা), মুনজিতপুর (করিম মেসের বিপরীতে), সাতক্ষীরা।
বরিশাল	০১৭১৩২৩৬৭৩০	বাড়ী নং-৩১/৩২, রোজ-বে (নিচ তলা), উত্তর আলেকান্দা, বগুড়া রোড, বটতলা, বরিশাল।
মুন্সিগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৬২	বাড়ী নং-৫৪/১ (৩য় তলা), বঙ্গবন্ধু সড়ক (কাচারি চত্ত্বর), শিল্পকলার দক্ষিণ পাশে, মুন্সীগঞ্জ।
কুমিল্লা	০১৭১৩২৩৬৭২৮	বাড়ী নং-২০৩/১৮৭, গার্ডেন সিটি (৪র্থ তলা), ঝাউতলা, (পুলিশ লাইন মোড় সংলগ্ন), কুমিল্লা।
চাঁদপুর	০১৭১৩২৩৬৭৬৫	দোহা প্লাজা (৩য় তলা), স্টেডিয়াম রোড, চাঁদপুর।
ফেনী	০১৭১৩২৩৬৭৪৪	শাহজাহান টাওয়ার (২য় তলা), মিজান রোড-এর মাথায় (সোনালী ব্যাংকের পশ্চিম পাশে), ট্রাংক রোড, ফেনী।
নোয়াখালী	০১৭১৩২৩৬৭৪৫	বাড়ী নং ২০৮, আলিফ প্লাজা (৪র্থ তলা), পৌর বাজার (কৃষি ব্যাংকের উপরে), প্রধান সড়ক, মাইজদী কোর্ট, নোয়াখালী।
চট্টগ্রাম (চকবাজার)	০১৭১৩২৩৬৭১৪	গুলজার টাওয়ার (৪র্থ তলা), গুলজার মোড়, চকবাজার, চট্টগ্রাম।
চট্টগ্রাম (হালিশহর)	০১৭১৩২৩৬৭৫৮	মমতাজ হাইটস (৪র্থ তলা), বড়পুল মোড় (ইসলামী ব্যাংকের বিপরীতে), হালিশহর।
কক্সবাজার	০১৭১৩২৩৬৭৬৬	সৈকত টাওয়ার (৫ম তলা), বার্মিজ মার্কেট, কক্সবাজার।

জেলা কো-অর্ডিনেটর

সুনামগঞ্জ	০১৩১৩৩৬৮৬৭১	রাঙামাটি	০১৩১৩৩৬৮৬৬৬	মেহেরপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৭০	বরগুনা	০১৩১৩৩৬৮৬৫৮
হবিগঞ্জ	০১৩১৩৩৬৮৬৫৬	খাগড়াছড়ি	০১৩১৩৩৬৮৬৬৩	নড়াইল	০১৩১৩৩৬৮৬৫০	পটুয়াখালী	০১৩১৩৩৬৮৬৬১
মৌলভীবাজার	০১৩১৩৩৬৮৬৫৫	শরীয়তপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৪৮	বাগেরহাট	০১৩১৩৩৬৮৬৫৪	ভোলা	০১৩১৩৩৬৮৬৬২
লক্ষীপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৪৭	মাদারীপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৬৮	পিরোজপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৬০	লালমনিরহাট	০১৩১৩৩৬৮৬৪৬
বান্দরবান	০১৩১৩৩৬৮৬৬৫	রাজবাড়ী	০১৩১৩৩৬৮৬৬৯	ঝালকাঠি	০১৩১৩৩৬৮৬৫৯	পঞ্চগড়	০১৩১৩৩৬৮৬৫৩
						ঠাকুরগাঁও (পীরগঞ্জ)	০১৩১৩০০৩৬৩৪২

অনলাইনে ভর্তির জন্য ভিজিট করো www.udvash.com 09666775566